14

Théorèmes taubériens pour l'énumération asymptotique

Kevin Compton
University of Michigan and INRIA, Rocquencourt

[résumé par Paul Zimmermann]

Dans son livre intitulé *Divergent Series* [2], G.H. Hardy définit les théorèmes Taubériens à partir des théorèmes Abéliens :

> *"An 'Abelian' theorem is, roughly, one which asserts that, if a sequence or function behaves regularly then some average of the sequence or function behaves regularly."*
>
> *"['Tauberian' theorems are] ... corrected forms of the false converses of Abelian theorems."*

Un exemple simple de cette réciprocité est le suivant :

$$(1) \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = L$$

$$(2) \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n}{(1-x)^{-1}} = L$$

L'implication (1) ⇒ (2) est un théorème Abélien, alors que (2) ⇒ (1) n'est pas vrai (prendre par exemple $b_n = (-1)^n$). Mais en ajoutant une condition à (2), la réciproque devient vraie et on obtient un théorème Taubérien:

$$(2) \text{ et } b_{n+1} - b_n = o(\frac{1}{n}) \quad \Longrightarrow \quad (1).$$

On peut généraliser ce premier théorème en remarquant que le dénominateur apparaissant dans (2) est la série $\sum a_n x^n$ avec comme valeur particulière $a_n = 1$:

Soient les séries $a(z) = \sum a_n z^n$, $b(z) = \sum b_n z^n$ et $c(z) = b(z)/a(z)$. Si

$$(i) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n-1}}{a_n} = R, \quad 0 < R < \infty$$

(ii) $\qquad c(z)$ a un rayon de convergence supérieur à R

alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = c(R).$$

Ce dernier théorème, dû à Schur, permet par exemple de montrer que le nombre de cycles de longueur j dans une permutation aléatoire suit une loi de Poisson de moyenne $1/j$. En effet, il suffit de prendre $a(z) = 1/(1-z)$, la série génératrice exponentielle des permutations, et $b(z)$ celle des permutations ayant m cycles de longueur j, soit $(z^j/j)^m e^{-z^j/j}/(1-z)$. On montre de la même

manière que la probabilité qu'un graphe fonctionnel n'ait pas de point fixe tend asymptotiquement vers e^{-1}.
On peut aussi énoncer des théorèmes Taubériens plus généraux sur des fonctions au lieu de séquences, c'est-à-dire sur des transformées de Laplace au lieu de séries entières. C'est l'approche de Wiener :

> *"The merits of Wiener's method lie in its great power and generality, and the light which it throws on the whole subject; not in simplicity." G.H. Hardy*

Faisons correspondre à une séquence (b_n) la fonction $f(t) = b_{\lfloor t \rfloor}$, où $\lfloor t \rfloor$ désigne la partie entière de t. Ainsi, on associe à la série $b(x) = \sum b_n x^n$ la fonction

$$\int_0^\infty f(t) e^{-yt} dt,$$

plus précisément $b(e^{-y}) \sim \int_0^\infty f(t)e^{-yt}dt$ lorsque y tend vers 0.
Les hypothèses des théorèmes taubériens classiques sont de la forme :

$$\int_{-\infty}^\infty F(t)G(x-t)dt \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} L \int_0^\infty G(t)dt,$$

ce que l'on abrège en $F * G \to L\|G\|_1$. Le théorème principal est le suivant.
Théorème Taubérien de Wiener : *Soit $\hat{G}$ la transformée de Fourier de G. Si pour $F \in \mathcal{L}^\infty$,*

$$\begin{array}{ll} (i) & F * G \to L\|G\|_1 \\ (ii) & \hat{G}(x) \neq 0 \text{ pour tout réel } x \end{array}$$

alors $F * H \to L\|H\|_1$ pour toute fonction $H \in \mathcal{L}^1$.
La plupart des théorèmes taubériens se déduisent de ce dernier en choisissant G (le noyau) et H convenables, par exemple la version suivante due à Pitt :

> Pour $f \in L^\infty[0,\infty)$, si l'on a $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^\infty f(t)g(\frac{x}{t})dt \to L \int_0^\infty g(t)dt$,
> et si la condition supplémentaire $\displaystyle\int_0^\infty g(t)t^{-ix}dt \neq 0$ est vérifiée pour tout réel x, alors pour tout h,
> $$\frac{1}{x}\int_0^\infty f(t)h(\frac{x}{t})dt \to L\int_0^\infty h(t)dt.$$

En prenant $g(t) = e^{-t}$ et h la fonction indicatrice de l'intervalle $[0,1]$, on obtient le théorème de Hardy-Littlewood :

> Si f bornée vérifie $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^\infty f(t)e^{-t/x}dt = L$, alors $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^\infty f(t)dt = L$.

En retournant aux séquences entières, ce théorème ne nous donne des indications que sur la moyenne de Césaro.
C'est plutôt un résultat sur la limite de $f(x)$ qui nous intéresse. Pour cela, il faut alors rajouter une condition aux hypothèses:

Si f bornée *et lentement décroissante* vérifie

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^\infty f(t)e^{-t/x}dt = L,$$

alors $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$.

Une fonction f est dite lentement décroissante si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\lambda > 1$ tel que pour tout x et $x \leq y \leq \lambda x$, on ait $f(y) > f(x) - \epsilon$. Ce résultat se transporte facilement dans le domaine des séquences entières:

Si (b_n) est bornée et lentement décroissante, et que $\lim_{x\to 1}(1-x)\sum_0^\infty b_n x^n = L$, alors $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

Les fonctions à variation lente [1] donnent lieu elles aussi à des théorèmes Taubériens:

(Karamata) Si f est bornée et l est à variation lente avec

$$\frac{1}{x}\int_0^\infty f(t)e^{-t/x}dt \sim l(x),$$

alors $\frac{1}{x}\int_0^\infty f(t)dt \sim l(x)$.

Ce théorème se généralise en remplaçant dans l'hypothèse $1/x$ par $1/x^{\alpha+1}$, avec $\alpha > -1$, et $f(t)/t^\alpha$ bornée. Cela permet de prouver que $\frac{1}{x}\int_0^\infty f(t)/t^\alpha dt \sim l(x)$, et si en plus $f(t)/t^\alpha$ est à décroissance lente, que $f(x)/x^\alpha \sim l(x)$.
Ceci permet de montrer directement que le nombre moyen de composantes dans un graphe fonctionnel est $\sim 1/2\log x$.
En conclusion: *"Tauberian theorems should be used more widely in combinatorics. Begin with Hardy, not Feller. Feller considers only Tauberian theorems with kernel e^{-t}. We have found more combinatorial applications by taking $t^\alpha e^{-t}$. Hardy has a list of half a dozen other kernels. [...] prospects for combinatorial applications."*

Références

[1] N. H. Bingham, C. M. Goldie, and J. L. Teugels. *Regular Variation.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 1987.

[2] G. H. Hardy. *Divergent Series.* Oxford University Press, 1949.