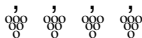


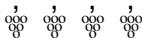
Déterminants, Pfaffiens et groupe symétrique

Alain Lascoux



Institut Gaspard Monge, Université Paris-Est
Alain.Lascoux@univ-mlv.fr

`phalanstere.univ-mlv.fr/~al`



Déterminants et Pfaffiens sont obtenus par une sommation (alternée) sur le **groupe symétrique**.

Pour une matrice M , le **déterminant** est

$$M \rightarrow \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \pm M[1, \sigma_1] \dots M[n, \sigma_n]$$

Pour une matrice antisymétrique Z , le **Pfaffien** est, à un facteur près,

$$Z \rightarrow \sum_{\sigma} \pm \left(Z[1, 2] Z[3, 4] \dots Z[n-1, n] \right)^{\sigma}$$

On n'a donc besoin que de l'idempotent $(1/n!) \sum \pm \sigma$ qui correspond à une représentation de dimension 1 du groupe symétrique.

Comment déduire des identités à l'aide d'un espace de dimension 1 ?

La situation change quand les entrées des matrices ou Pfaffiens sont type

$$f_{i,j}(a_i, a_j, x_i, x_j).$$

On a maintenant 3 groupes symétriques.

Le groupe \mathfrak{S}^a agissant sur les a_i , le groupe \mathfrak{S}^x agissant sur les x_i , et enfin le groupe diagonal agissant sur les indices simultanément.

Les représentations du groupe symétrique de dimension > 1 peuvent faire leur entrée.

Rappel:

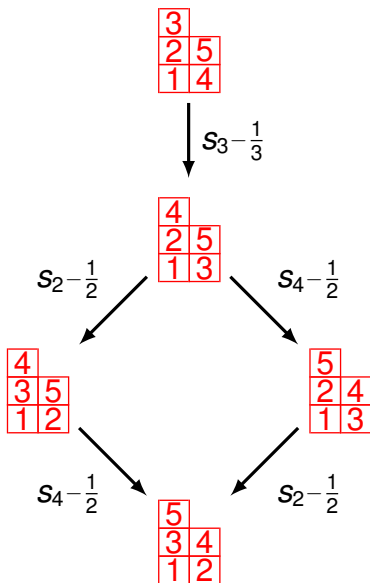
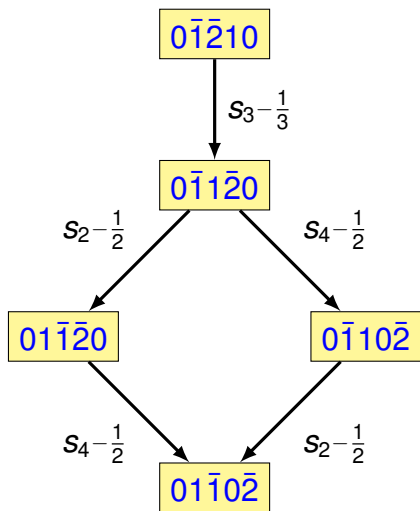
A une partition $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_\ell]$ de n est associé un **vecteur spectral**

$$v^\lambda = [0, -1, \dots, (-\lambda_1+1), 1, 0, \dots, (-\lambda_2+2), \dots, (\lambda_\ell-1), \dots, (-\lambda_\ell+\ell)]$$

qui permet d'engendrer un graphe (orienté) dit de **Yang-Baxter**.

On a droit aux transpositions $[\dots, a, b, \dots]$, $a < b - 1$. Dans ce cas on enregistre la place des composantes échangées, et la différence des valeurs échangées. Avec a, b en positions $i, i+1$:

Etiquette $s_i + 1/(a-b)$

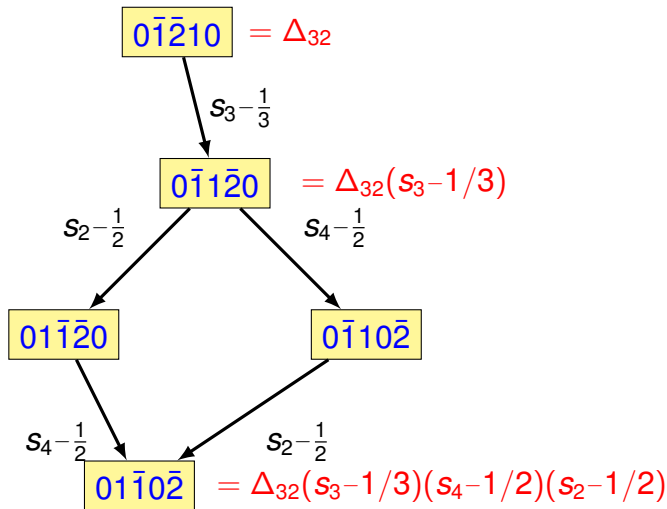


Le même graphe, pour $\lambda = [3, 2]$, en utilisant les **vecteurs spectraux**, ou les **tableaux de Young** comme étiquettes des sommets. Pas d'autres transpositions possibles, graphe de dimension 5.

On lit les **matrices de représentation** de toutes les **transpositions simples** s_1, \dots, s_4 sur le graphe. Mais on peut utiliser le graphe pour **engendrer** des polynômes, en se donnant un polynôme pour le premier sommet. Le graphe engendre 4 autres polynômes, en agissant par les étiquettes des arêtes sur les polynômes figurant en chaque sommet.

Polynôme de départ: produit de Vandermondes.

$$\lambda = [3, 2] \Rightarrow \Delta_{32} = \Delta(x_1, x_2, x_3)\Delta(x_4, x_5)$$



Base de Young = base engendrée à partir de Δ_λ par le graphe de Yang-Baxter.

Base de Specht = base engendrée à partir de Δ_λ par le graphe de Yang-Baxter, en prenant les étiquettes s_i au lieu de s_{i-1}/k .

Théorème: Toute somme de Δ_λ^σ s'exprime de manière unique dans la base de **Young**, ainsi que dans la base de **Specht**.

Autre base: celle de **Kazhdan-Lusztig**, engendrée elle aussi à partir de Δ_λ .

Je vais décrire les bases de **Young** et de **KL** pour les représentations intervenant dans le calcul des Pfaffiens et déterminants.

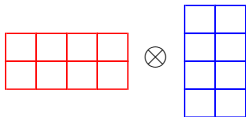
Prenons le Pfaffien $\mathfrak{Pf}((a_i - a_j) g_{i,j})$, avec $g_{i,j} = g_{j,i}$. Il appartient à l'espace engendré par les permutations de

$$(a_1 - a_2)(a_3 - a_4)(a_5 - a_6) \cdots$$

qui n'est autre que la représentation indiquée par un rectangle de hauteur 2.

Mais le groupe symétrique \mathfrak{S}^g ne reste pas inactif! Il induit une représentation, les deux représentations sont en fait **intriquées**, celle de \mathfrak{S}^g correspond à la forme transposée.

Schématiquement, le Pfaffien appartient à l'espace irréductible



Bien plus. Le Pfaffien est diagonal, à la fois dans les bases de Young, et dans celles de Kazhdan-Lusztig. En indiquant les bases par les tableaux standards,

$$\mathfrak{Pf}(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j \mid \mathbf{g}_{i,j}) = \sum \pm Y_t^a Y_{\tilde{t}}^g$$

$$\mathfrak{Pf}(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j \mid \mathbf{g}_{i,j}) = \sum \pm K_t^a K_{\tilde{t}}^g$$

Ces bases sont des fonctions non seulement théoriques, mais que l'on peut utiliser pour des calculs explicites. Par exemple, le Pfaffien de Sundquist $\mathfrak{P}f\left(\frac{a_i - a_j}{x_i + x_j}\right)$ pour $n = 2$, est (en éliminant le dénominateur qui est clair)

$$\begin{aligned} & a_3 a_4 x_1^2 x_4^2 - a_2 a_1 x_2^2 x_4^2 - a_2 a_1 x_3^2 x_1^2 + a_1 a_4 x_2^2 x_4^2 + a_1 a_4 x_3^2 x_1^2 + a_3 a_2 x_2^2 x_4^2 + \\ & a_3 a_2 x_3^2 x_1^2 - a_3 a_4 x_2^2 x_4^2 - a_3 a_4 x_3^2 x_1^2 + a_3 a_1 x_1^2 x_2^2 + a_3 a_1 x_3^2 x_4^2 - a_1 a_4 x_1^2 x_2^2 - \\ & a_1 a_4 x_3^2 x_4^2 + a_3 a_4 x_3^2 x_2^2 + a_2 a_1 x_1^2 x_4^2 + a_2 a_1 x_3^2 x_2^2 - a_2 a_4 x_1^2 x_4^2 - a_2 a_4 x_3^2 x_2^2 - \\ & a_3 a_1 x_1^2 x_4^2 - a_3 a_1 x_3^2 x_2^2 - a_3 a_2 x_1^2 x_2^2 - a_3 a_2 x_3^2 x_4^2 + a_2 a_4 x_1^2 x_2^2 + a_2 a_4 x_3^2 x_4^2 \end{aligned}$$

et dans la base de KL,

$$\begin{aligned} & - (x_1^2 - x_2^2)(x_3^2 - x_4^2)(a_1 - a_4)(a_2 - a_3) \\ & + (x_2^2 - x_3^2)(x_1^2 - x_4^2)(a_1 - a_2)(a_3 - a_4), \end{aligned}$$

expression plus compréhensible!

Je vais expliciter le cas des **déterminants de Hankel**, c'est-à-dire le cas où $g_{i,j}$ dépend seulement de $i + j$, disons

$$g_{i,j} = h_{i+j-3},$$

avec des indéterminées h_i qui peuvent être identifiées à des **fonctions complètes**.

Cela permet de se servir de la théorie des fonctions symétriques et de traiter les déterminants en les h_i comme des **fonctions de Schur**.

Quelques objets combinatoires.

A un **tableau de Young** à deux lignes, on associe une paire de partitions conjuguées, en soustrayant à la ligne du bas $[1, 2, \dots, n-1]$, à celle du haut, $[n+1, \dots, 2n]$.

Ainsi

3	6	7	9	11	12
1	2	4	5	8	10

$$\begin{aligned} \Rightarrow [7, \dots, 12] - [3, 6, 7, 9, 11, 12] &= [4, 2, 2, 1, 0, 0] \\ [1, 2, 4, 5, 8, 10] - [1, \dots, 6] &= [0, 0, 1, 1, 3, 4] \end{aligned}$$

correspond bijectivement à $\lambda = [4, 3, 1, 1]$.

A λ on associe une **partition gauche** (c'est-à-dire une paire de partitions dont les diagrammes sont emboîtés)

$$\boxed{\lambda} = ([(n-1)^n] + \lambda\omega) / \lambda^\sim,$$

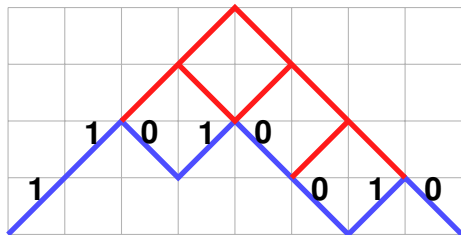
en notant $\lambda\omega$ le reordonnement croissant λ .

Pour l'exemple courant, c'est

$$\begin{aligned} \boxed{\lambda} &= ([5^6] + [0, 0, 1, 1, 3, 4]) / [0, 0, 1, 2, 2, 4] \\ &= [5, 5, 6, 6, 8, 9] / [0, 0, 1, 2, 2, 4]. \end{aligned}$$

Lisant la frontière de λ , on obtient un **chemin de Dyck** et un **mot de Yamanouchi**.

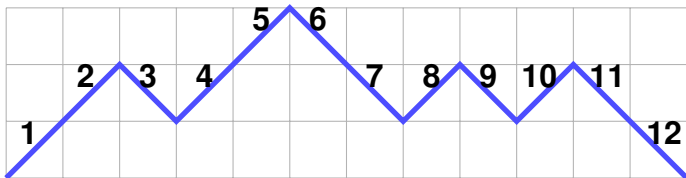
Pour $n = 4, \lambda = [3, 1]$ on a



$$\lambda = [3, 1]$$

$$Yama [1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0]$$

Numérotant les pas $1, 2, \dots, 2n$, et appariant les pas en vis-à-vis, on obtient des facteurs $(a_i - a_j)$

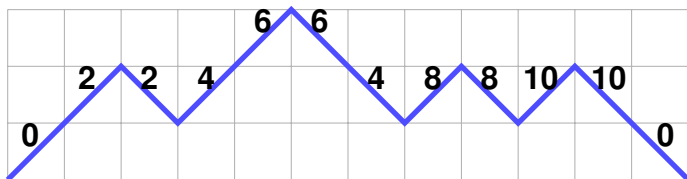


$$\varphi^a([4, 3, 1, 1]) = (a_1 - a_{12})(a_2 - a_3)(a_4 - a_7)(a_5 - a_6)(a_8 - a_9)(a_{10} - a_{11})$$

produit noté $\Delta^a(12|23|47|56|\dots)$.

C'est la première **base (duale) de Kazhdan-Lusztig** $\mathbb{L}K_\lambda^a$.

En changeant d'espace, on obtient une autre base de KL. Cette fois-ci, les objets sont interprétés comme des **exposants** de monômes.



$$\psi([4, 3, 1, 1]) = [0, 2, 2, 4, 6, 6, 4, 8, 8, 10, 10, 0].$$

On étiquette $0, 2, \dots, 2n-2$ les pas montants successifs, les pas descendants qui leur sont appariés ont la même étiquette.

Les vecteurs $\psi(\lambda)$ sont les exposants d'une deuxième **base de Kazhdan-Lusztig (duale)**.

Il est un peu plus élaboré de définir une base de KL (et pas KL duale). Il faut mettre deux entiers dans chaque boîte du diagramme de λ .

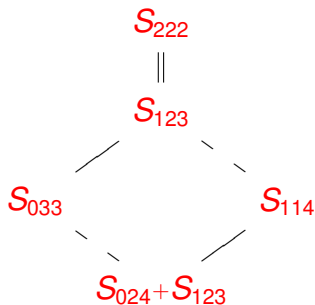
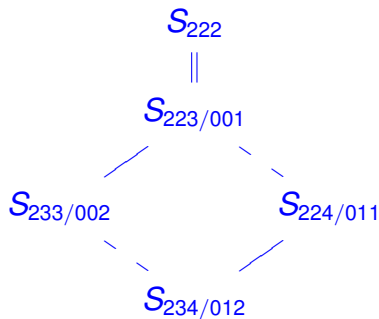
Pour $n = 6$, and $\lambda = [4, 3, 1, 1]$, le remplissage

$$\mathcal{D}_{4311} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 6, 3 & 7, 2 & 8, 1 & 9, 0 \\ \hline 5, 2 & 6, 1 & 7, 0 & \\ \hline 4, 1 & & & \\ \hline 3, 0 & & & \\ \hline \end{array}$$

nombre **bleus** consécutifs à partir du coin rempli par 6.

nombre **rouges**: coins 0 que l'on efface, nouveaux coins 1, etc.

La base de KL^S est engendrée à partir $\mathcal{K}_0^S = S_{n-1, \dots, n-1}$, en utilisant les bi-remplissages des diagrammes comme une suite d'opérations, une boîte i, k s'interprétant comme $s_i - 1 / (1 + k)$. Voici à gauche la base de Specht, à droite le base de KL du même espace de produits de fonctions complètes (en utilisant les fonctions de Schur gauches, ou les fonctions de Schur).



Nous avons déjà dit que le Pfaffien est diagonal dans les bases de Young et de KL.

Dans le cas présent des Pfaffiens de Hankel, l'énoncé est

Theorem. Le Pfaffien de Hankel d'entrées $(a_i - a_j)h_{i+j-2-n}$ est diagonal dans la paire de base $\mathcal{L}K^a$, $\mathcal{L}L^S$:

$$\mathfrak{Pf}(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = \sum_{\lambda \leq \rho} (-1)^{|\lambda|} \varphi^a(\lambda) \mathcal{L}L_{\lambda}^S.$$

Par exemple $n = 3$, on a

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{P}f(\mathbf{a}, \mathbf{h}) &= \Delta^a(16|25|34)\mathcal{K}_0^S - \Delta^a(16|23|45)\mathcal{K}_1^S \\
 &\quad + \Delta^a(14|23|56)\mathcal{K}_2^S + \Delta^a(12|36|45)\mathcal{K}_{11}^S \\
 &\quad - \Delta^a(12|34|56)\mathcal{K}_{21}^S \\
 &= (a_1 - a_6)(a_2 - a_5)(a_3 - a_4) S_{222} - (a_1 - a_6)(a_2 - a_3)(a_4 - a_5) S_{123} \\
 &+ (a_1 - a_4)(a_2 - a_3)(a_5 - a_6) S_{114} + (a_1 - a_2)(a_3 - a_6)(a_4 - a_5) S_{033} \\
 &\quad - (a_1 - a_2)(a_3 - a_4)(a_5 - a_6)(S_{024} + S_{123}).
 \end{aligned}$$

En interprétant les h_i comme les fonctions complètes de x_1, \dots, x_n (définies par la série génératrice $\sum z^r h_r = \prod_i (1 - zx_i)^{-1}$), on trouve que le Pfaffien est égal au q -discriminant

$$\mathcal{D}(n, q) = \prod_{i \neq j} (x_i - qx_j)$$

En notant $[i]$ le q -entier $(q^i - 1)/(q - 1)$, on a donc les développements suivants:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(2, q) &= (x_1 - qx_2)(x_2 - qx_1) \\ &= [3]\mathcal{K}_0^S - q\mathcal{K}_1^S = (1 + q + q^2)\mathcal{S}_{11} - q\mathcal{S}_{02}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(3, q) &= [3][5]\mathcal{K}_0^S - q[5]\mathcal{K}_1^S + q[3]^2\mathcal{K}_2^S + q^2[3]\mathcal{K}_{11}^S - q^3\mathcal{K}_{12}^S \\
&= (1+q+q^2)(1+\dots+q^4)\mathcal{S}_{222} - q(1+\dots+q^4)\mathcal{S}_{123} + q^2(1+q+q^2)\mathcal{S}_{114} \\
&\quad + q^2(1+q+q^2)\mathcal{S}_{033} - q^3(\mathcal{S}_{024} + \mathcal{S}_{123}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(4, q) &= [3][5][7]\mathcal{K}_0^S - q[5][7]\mathcal{K}_1^S + q^2[3][7]\mathcal{K}_2^S - q^3[3][5]\mathcal{K}_3^S \\
&\quad + q^2[3][7]\mathcal{K}_{11}^S - q^3[7]\mathcal{K}_{21}^S - q^3[3][5]\mathcal{K}_{111}^S \\
&\quad + q^4[3]^2\mathcal{K}_{22}^S + q^4[5]\mathcal{K}_{31}^S + q^4[5]\mathcal{K}_{211}^S \\
&\quad - q^5[3]\mathcal{K}_{32}^S - q^5[3]\mathcal{K}_{221}^S - q^5[3]\mathcal{K}_{311}^S + q^6\mathcal{K}_{321}^S.
\end{aligned}$$