# Méthodes algébriques pour la résolution d'équations différentielles matricielles d'ordre arbitraire

Carole El Bacha

Université de Limoges ; CNRS ; XLIM ; UMR 6172

24 octobre 2011

# Exemples de systèmes différentiels linéaires

- Nombreuses applications en chimie, physique, mécanique des fluides, théorie du contrôle, etc.
  - ▷ Exemple des systèmes de file d'attente : Choi, Kim & Lee (1998) :

$$\begin{cases} \lambda Q(z) + \nu z \frac{dQ}{dz}(z) - \mu(1-\beta+\beta z)P_1(z) = 0, \\ (\lambda+\mu)P_1(z) + \nu z \frac{dP_1}{dz}(z) - \lambda Q(z) - \nu \frac{dQ}{dz}(z) - 2\mu(1-\beta+\beta z)P_2(z) = 0, \\ (\lambda\alpha+2\mu)P_2(z) + \nu(1-\alpha)(z-1)\frac{dP_2}{dz}(z) - \lambda P_1(z) - \nu \frac{dP_1}{dz}(z) - \lambda\alpha z P_2(z) = 0. \end{cases}$$

  - ▷ Exemple de la mécanique des fluides : Littelfield & Desai (1990) :

$$\begin{cases} -\frac{dp}{dr} + \frac{m}{r}\frac{d^2\psi}{dr^2} - \frac{m}{r^2}\frac{d\psi}{dr} - \frac{m^3\psi}{r} = 0, \\ mp - \frac{1}{r}\frac{d^3\psi}{dr^3} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2\psi}{dr^2} - \left(\frac{1}{r^3} - \frac{m^2}{r}\right)\frac{d\psi}{dr} + \mathrm{Ra}\,T = 0, \\ \frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT}{dr} - m^2 T - \frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr} = 0. \end{cases}$$

# Objet de la thèse

- Objectif principal : introduire des méthodes directes pour l'étude des systèmes d'équations différentielles linéaires d'ordre arbitraire :
  - ▷ Méthodes directes $\equiv$ méthodes ne réduisant pas le système en un autre du premier ordre ou en une équation différentielle scalaire,
  - ▷ Étude théorique & algorithmique (implémentation & complexité).

- Sujet principal : s'intéresser aux problèmes locaux :
  - ▷ Classification de singularités,
  - ▷ Calcul des solutions formelles,
  - ▷ Calcul des invariants formels.

- Stratégie générale : développer et utiliser des outils appropriés de l'analyse locale pour le calcul efficace de certaines données.

# Systèmes d'ÉDO/ÉAD linéaires

$$\mathcal{A}_\ell(x)\, y^{(\ell)}(x) + \cdots + \mathcal{A}_1(x)\, y'(x) + \mathcal{A}_0(x)\, y(x) = f(x),$$

où

- $\ell \in \mathbb{N}^*$ et $x$ une variable complexe,
- $\mathcal{A}_i$ des matrices de fonctions analytiques de taille $m \times n$,
- $f$ un vecteur de fonctions analytiques de dimension $m$,
- $y$ un vecteur inconnu de dimension $n$ et $y^{(i)}(x) = \frac{d^i y}{dx^i}(x)$.

Si

- ▷ $m = n$ et $\det(\mathcal{A}_\ell(x)) \neq 0 \Longrightarrow$ système d'équations différentielles ordinaires (ÉDO) linéaires.
- ▷ $m \neq n$ ou $\det(\mathcal{A}_\ell(x)) = 0 \Longrightarrow$ système d'équations algébro-différentielles (ÉAD) linéaires.

Analyse locale au voisinage d'un point $x_0 \Longrightarrow \mathcal{A}_i(x) \in \mathbb{C}((x - x_0))^{m \times n}$ et $f(x) \in \mathbb{C}((x - x_0))^m$.

$$\boxed{\text{On prend } x_0 = 0}$$

# Systèmes d'ÉDO linéaires : systèmes du 1er ordre

Systèmes d'équations différentielles ordinaires linéaires du 1er ordre :

$$y'(x) = A(x)\, y(x) \quad \text{où } A(x) \in \mathbb{C}((x))^{n\times n}$$

$x_0 = 0$ singularité pour $A(x) \implies x_0 = 0$ singularité pour le système.

- Travaux et algorithmes :
  - ▷ Classification des singularités (régulières ou irrégulières) : Moser (1960), Hilali/Wazner (1987), Levelt (1991), Barkatou (1995), Barkatou/Pflügel (2007,2009) etc.
  - ▷ Calcul des solutions formelles (solutions régulières et irrégulières): Coddington/Levinson (1955), Balser (1979), Wasow (1987), Chen (1990), Barkatou (1997), Barkatou/Pflügel (1998), Pflügel (2000) etc.
  - ▷ Calcul des invariants formels (Invariants de Katz, de Malgrange, de Levelt-Gérard) : Hilali (1987), Hilali/Wazner (1986), Barkatou (1997) etc.
- Implémentation disponible : ISOLDE et DEtools.

# Systèmes d'ÉDO linéaires : systèmes d'ordre $> 1$

$$\mathcal{A}_\ell(x)\, y^{(\ell)}(x) + \cdots + \mathcal{A}_1(x)\, y'(x) + \mathcal{A}_0(x)\, y(x) = f(x),$$

- Approche classique : convertir en un système d'ordre 1 et de taille $n\,\ell$.

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(\ell-2)}(x) \\ y^{(\ell-1)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I_n \\ \widetilde{\mathcal{A}}_0(x) & \widetilde{\mathcal{A}}_1(x) & \widetilde{\mathcal{A}}_2(x) & \cdots & \widetilde{\mathcal{A}}_{\ell-1}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(\ell-2)}(x) \\ y^{(\ell-1)}(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix},$$

où $\widetilde{\mathcal{A}}_i(x) = -\mathcal{A}_\ell(x)^{-1}\mathcal{A}_i(x)$

  Inconvénient : augmentation de la taille du système $n \longrightarrow n\,\ell$.

- Quelques travaux ne traitant pas le cas général et ne calculant qu'un certain type de solutions :
  - Navarro/Company/Jódar (1993-94),
  - Abramov/Bronstein/Khmelnov (2005).
    Package de Maple : LinearFunctionalSystems.

- Absence de méthodes directes.

# Systèmes d'ÉAD linéaires

Systèmes composés d'ÉDO linéaires couplées avec des équations algébriques.

- Intensivement étudiés du point de vue numérique : Petzold (1982,1983), Campbell (1985,1987), Gear (1988), Kunkel/Mehrmann (1994,1996), Quéré-Stuchlik (1996), Shi (2004).
  - ▷ Classification des ÉAD suivant les notions d'indices : indice différentiel, indice d'étrangeté, etc.
- Du point de vue symbolique : réduire les ÉAD en des systèmes de forme plus "simple":
  - ▷ Forme de Popov : Davies/Cheng/Labahn (2008),
  - ▷ Forme de Hermite (forme triangulaire) : Giesbrecht/Kim (2009),
  - ▷ Forme de Jacobson (forme diagonale) : Middeke (2008), Levandovskyy/Schindelar (2010).

# Les principales contributions

- √ Nouvelles méthodes directes pour le calcul des solutions régulières et classification des singularités pour les systèmes d'ÉDO dits simples (ISSAC'09,MTNS'10,JSC'11)
- √ Méthode directe pour le calcul des formes $k$-simples des systèmes d'ÉDO du 1er ordre.
- √ Nouvel algorithme de réduction pour les systèmes d'ÉAD d'ordre arbitraire (ISSAC'10, JSC'12).

# Analyse locale des systèmes d'ÉDO linéaires

$$\mathcal{A}_\ell(x)\, y^{(\ell)}(x) + \cdots + \mathcal{A}_1(x)\, y'(x) + \mathcal{A}_0(x)\, y(x) = 0 \quad \text{avec } \mathcal{A}_\ell(x) \text{ inversible}$$

Analyse locale en $x_0 = 0$ :

- $\mathcal{A}_i(x) \in \mathbb{K}((x))^{n\times n}$ pour $i = 0, \ldots, \ell$ ($\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$),
- Dérivation d'Euler $\vartheta = x\frac{d}{dx}$.

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{L}\,(x, \vartheta)\,(y(x)) = \sum_{i=0}^{\ell} A_i(x)\vartheta^i(y(x)) = 0, \qquad (\mathcal{S})$$

où pour $i = 0, \ldots, \ell$, $A_i(x) \in \mathbb{K}[[x]]^{n\times n}$ et $A_\ell(x) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}((x)))$.

$$(\mathcal{S}) \rightsquigarrow \vartheta \begin{pmatrix} y(x) \\ \vartheta(y(x)) \\ \vdots \\ \vartheta^{(\ell-2)}(y(x)) \\ \vartheta^{(\ell-1)}(y(x)) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I_n \\ \widetilde{A}_0(x) & \widetilde{A}_1(x) & \widetilde{A}_2(x) & \ldots & \widetilde{A}_{\ell-1}(x) \end{pmatrix}}_{C(x)} \begin{pmatrix} y(x) \\ \vartheta(y(x)) \\ \vdots \\ \vartheta^{(\ell-2)}(y(x)) \\ \vartheta^{(\ell-1)}(y(x)) \end{pmatrix},$$

**où** $\widetilde{A}_i(x) = -A_\ell(x)^{-1}A_i(x) \in \mathbb{K}((x))^{n\times n}$

- ▷ $x = 0$ est une singularité pour $(\mathcal{S})$.
- ▷ Dimension de l'espace de solutions formelles de $(\mathcal{S})$ est égale à $n\,\ell$.

# Solutions régulières et singularités régulières

$$\mathcal{L}(x,\vartheta)(y(x)) = A_\ell(x)\vartheta^\ell(y(x)) + \cdots + A_1(x)\vartheta(y(x)) + A_0(x)y(x) = 0, \quad (\mathcal{S})$$

Déf. : Une solution régulière de $(\mathcal{S})$ est une solution de la forme

$$y(x) = x^{\lambda_0} z(x),$$

où $\lambda_0 \in \overline{\mathbb{K}}$ et $z(x) \in \overline{\mathbb{K}}[[x]][\ln(x)]^n$ $(\deg_{\ln(x)}(z) < n\,\ell)$.

Déf. : $x = 0$ est une singularité régulière de $(\mathcal{S})$ s'il y a $n\,\ell$ solutions régulières linéairement indépendantes.

Supposons que $A_\ell(0)$ est inversible, alors

- $A_\ell(x)$ est inversible dans $\mathbb{K}[[x]]^{n\times n}$.
- La matrice block compagnon $C(x) \in \mathbb{K}[[x]]^{n\ell\times n\ell}$.
- $x = 0$ est une singularité régulière pour $\vartheta(Y(x)) = C(x)Y(x)$ et $(\mathcal{S})$.

# Cas où $A_\ell(0) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ : solutions régulières $x^{\lambda_0} z(x)$

Équation différentielle scalaire d'ordre $\ell$

$\sum_{i=0}^{\ell} a_i(x)\,\vartheta^i(y(x)) = 0$

t.q. $a_\ell(0) \neq 0$

$\downarrow$

$\lambda_0$ racine du polynôme indiciel

$p(\lambda) = \sum_{i=0}^{n\ell} a_i(0)\lambda^i$

$\downarrow$

Méthode de Frobenius
Méthode de Poole
Méthode de Heffter

Équation différentielle matricielle d'ordre $\ell$ et de taille $n \geq 2$

$\sum_{i=0}^{\ell} A_i(x)\vartheta^i(y(x)) = 0$

t.q. $A_\ell(0) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$

$\downarrow$

$\lambda_0$ valeur propre de la matrice polynomiale

$L(\lambda) = \sum_{i=0}^{\ell} A_i(0)\lambda^i$

$\downarrow$

Généralisation de la méth. de Frobenius
Généralisation de la méth. de Poole

# Cas où $A_\ell(0) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ : calcul des solutions régulières

$$\mathcal{L}(x,\vartheta)(y(x)) = A_\ell(x)\vartheta^\ell(y(x)) + \cdots + A_1(x)\vartheta(y(x)) + A_0(x)y(x) = 0, \quad (\mathcal{S})$$

où $A_i(x) = \sum_{j=0}^{\infty} A_{i,j}x^j$ $(A_{i,j} \in \mathbb{K}^{n\times n})$ tel que $A_\ell(0)$ est inversible.

Stratégie suivie par Poole : Chercher des solutions régulières écrites sous la forme

$$y(x) = x^{\lambda_0}\left(U_0 + U_1 x + U_2 x^2 + \cdots\right),$$

où $\lambda_0 \in \overline{\mathbb{K}}$, $U_i \in \overline{\mathbb{K}}[\ln(x)]^n$ t.q. $\deg(U_i) < n\,\ell$ et $U_0 \neq 0$.

Pour $j \geq 0$, posons

$$L_j(\lambda) = A_{\ell,j}\lambda^\ell + \cdots + A_{1,j}\lambda + A_{0,j}$$

$$\Longrightarrow \mathcal{L}(x,\vartheta)(y(x)) = \sum_{j=0}^{\infty} x^j L_j(\vartheta)(y(x)) = 0$$

- $L_0(\lambda) = \mathcal{L}(0,\lambda)$ appelée matrice polynomiale associée à $(\mathcal{S})$ ;
- $A_\ell(0)$ inversible $\Longrightarrow \deg(\det(L_0(\lambda))) = n\,\ell$.

# Cas où $A_\ell(0) \in GL_n(\mathbb{K})$ : calcul des solutions régulières

En injectant $y(x) = x^{\lambda_0} \sum_{i=0}^{\infty} U_i x^i$ dans $\mathcal{L}(x, \vartheta)(y(x)) = 0$ :

- $\lambda_0$ et $U_0$ satisfont $L_0(\vartheta)(x^{\lambda_0} U_0) = 0$ :
  - ▷ $\lambda_0$ valeur propre de $L_0(\lambda)$ ($\lambda_0 \in \sigma(L_0)$), c-à-d, $\det(L_0(\lambda_0)) = 0$.
  - ▷ $U_0$ est donné par

$$U_0 = \sum_{i=0}^{k-1} v_{k-1-i} \frac{\ln^i(x)}{i!},$$

où $0 \neq v_0, \ldots, v_{k-1} \in \overline{\mathbb{K}}(\lambda_0)^n$ forment une chaîne de Jordan de $L_0(\lambda)$ associée à $\lambda_0$ :

$$\begin{pmatrix} L(0) & & & \\ \vdots & \ddots & & (0) \\ \frac{1}{j!} L^{(j)}(0) & & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \frac{1}{(k-1)!} L^{(k-1)}(0) & \cdots & \cdots & \cdots & L(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_j \\ \vdots \\ v_{k-1} \end{pmatrix} = 0,$$

$\longrightarrow$ $k \leq$ à l'une des multiplicités partielles de $\lambda_0$.
$\longrightarrow$ Algorithme pour le calcul des chaînes de Jordan : Zuñiga (2005) qu'on a implémenté en Maple.

# Cas où $A_\ell(0) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ : calcul des solutions régulières

- pour $m \geq 1$, $U_m$ satisfait le système différentiel non-homogène

$$L_0(\vartheta + \lambda_0 + m)(U_m) = -\underbrace{\sum_{i=0}^{m-1} L_{m-i}(\vartheta + \lambda_0 + i)(U_i)}_{\text{polynôme en } \ln(x)}.$$

  ▷ Théorème : Un système différentiel non-homogène

$$B_\ell \vartheta^\ell(y(x)) + B_{\ell-1}\vartheta^{\ell-1}(y(x)) + \cdots + B_0 y(x) = Q(\ln(x)),$$

  où pour $i = 0, \ldots, \ell$, $B_i \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $B_\ell \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ et $Q \in \mathbb{F}[\ln(x)]^n$ de degré $d$ ($\mathbb{K} \subseteq \mathbb{F} \subseteq \mathbb{C}$) admet au moins une solution polynomiale en $\ln(x)$ de degré $p$ avec

$$d \leq p \leq d + \max\{\kappa_i, i = 1, \ldots, m_g(0)\},$$

  où les $\kappa_i$ designent les multiplicités partielles de 0 (si $0 \notin \sigma(L)$, $\kappa_i = 0$).

$\longrightarrow$ La résolution du système ci-dessus est réduite à la résolution d'un système algébrique linéaire.

# Cas où $A_\ell(0) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ : calcul des solutions régulières

Sol. rég. $x^{\lambda_0} U_0$ de $L_0(\vartheta)(y(x)) = 0 \rightsquigarrow$ Sol. rég. $x^{\lambda_0} \sum_{i=0}^{\infty} U_i x^i$ de $(\mathcal{S})$.

- ▷ Dimension de l'espace des solutions régulières de $L_0(\vartheta)(y(x)) = 0$ est $\deg(\det(L_0(\lambda))) = n\,\ell \Longrightarrow$ Une base de l'espace des solutions formelles de $(\mathcal{S})$.
- ▷ Implémentation en Maple.
Complexité arithmétique : $O\big(n^4\,\ell^3\,\nu^2 + n^6\,\ell^4\big)$ opérations dans $\mathbb{K}$ où les séries impliquées dans les solutions sont calculées jusqu'à l'ordre $\nu$.
- ▷ Complexité arithmétique de l'approche transformant $(\mathcal{S})$ en un système du 1er ordre de taille $n\,\ell$ puis utilisant l'algorithme de Barkatou-Pflügel (1998) : $O\big(n^4\,\ell^4\,\nu^2 + n^5\,\ell^5\,\nu\big)$ opérations dans $\mathbb{K}$.

# Cas où $A_\ell(0) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ : Tables de comparaison

| $\ell$ | $\sigma(L_0)$ | Poole | Abramov et al. | Barkatou-Pflügel |
|---|---|---|---|---|
| 4 | $\{\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{3}\}$ | 0.368 | 1.050 | 1.354 |
| 8 | $\{\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{3}\}$ | 1.198 | 9.064 | 6.484 |
| 12 | $\{\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{3}\}$ | 2.822 | 41.265 | 26.573 |
| 4 | $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$ | 0.287 | 1.037 | 1.310 |
| 8 | $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$ | 1.004 | 8.524 | 6.812 |
| 12 | $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$ | 2.123 | 34.711 | 23.634 |

Table: Temps (en secondes) pour $n = 2$ et $\nu = 5$

| $n$ | $\sigma(L_0)$ | Poole | Abramov et al. | Barkatou-Pflügel |
|---|---|---|---|---|
| 2 | $\{\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{3}\}$ | 0.479 | 1.307 | 1.648 |
| 5 | $\{\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{3}\}$ | 2.396 | 26.516 | 39.413 |
| 8 | $\{\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{3}\}$ | 7.202 | 116.363 | 327.552 |
| 2 | $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$ | 0.291 | 1.064 | 1.401 |
| 5 | $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$ | 1.383 | 17.188 | 31.158 |
| 8 | $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$ | 5.151 | 77.646 | 279.047 |

Table: Temps (en secondes) pour $\ell = 4$ et $\nu = 5$

# Cas où $A_\ell(0)$ n'est pas forcément inversible

$$(\mathcal{S}) : \quad \mathcal{L}\,(x,\vartheta)\,(y(x)) = \sum_{i=0}^{\ell} A_i(x)\vartheta^i(y(x)) = 0,$$

où

- $A_i(x) \in \mathbb{K}[[x]]^{n\times n}$,
- $A_\ell(x)$ non forcément inversible,
- $\det(L_0(\lambda)) \neq 0$ avec $L_0(\lambda) = \mathcal{L}\,(0,\lambda) = \sum_{i=0}^{\ell} A_i(0)\,\lambda^i$.

$\boxed{(\mathcal{S}) \text{ est dit simple}}$

▷ Théorème : Si $(\mathcal{S})$ est simple alors $\dim \mathcal{E}_{\text{sol. rég. de } (\mathcal{S})} = \deg(\det(L_0(\lambda)))$.

▷ Les méthodes développées pour le cas $A_\ell(0)$ inversible s'appliquent sur tout système simple $(\mathcal{S})$.

Corollaire : Si $(\mathcal{S})$ est simple et $A_\ell(x) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}((x)))$, alors $(\mathcal{S})$ a une singularité régulière en $x = 0$ si et seulement si $A_\ell(0) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

# Systèmes d'ÉDO non simples

Comment calculer les solutions régulières d'un système non simple ?

# Systèmes d'ÉDO non simples

$$(\mathcal{S}) : \quad \mathcal{L}\,(x,\vartheta)\,(y(x)) = \sum_{i=0}^{\ell} A_i(x)\vartheta^i(y(x)) = 0$$

$(\mathcal{S})$ est supposé non simple et $A_\ell(x) \in \mathbb{K}[x]^{n\times n}$ inversible

Stratégie adoptée : calculer un système simple $\overline{\mathcal{L}}(x,\vartheta)(z(x)) = 0$ à partir duquel on peut calculer les solutions régulières de $(\mathcal{S})$.

Pour

- $\ell = 1$, Barkatou-Pflügel (1998) : il existe $S(x)$ et $T(x)$ inversibles dans $\mathbb{K}((x))^{n\times n}$ t.q. $\overline{\mathcal{L}}(x,\vartheta) = S(x)\mathcal{L}(x,\vartheta)T(x)$ est simple.
- $\ell \geq 2$, ceci n'est plus vrai.

Exemple : $A_2(x)\vartheta^2(y(x)) + A_1(x)\vartheta(y(x)) + A_0(x)y(x) = 0$

$$\text{avec } L_0(\lambda) = A_2(0)\lambda^2 + A_1(0)\lambda + A_0(0) = \begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

# Calcul de $\overline{\mathcal{L}}(x, \vartheta)$

- Par une substitution linéaire $y(x) = T(x)z(x)$ avec $T(x) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}((x)))$ quand c'est possible,
- Autre...

# Par une substitution linéaire quand c'est possible

Une condition nécessaire pour l'existence d'une telle substitution linéaire est que $\mathcal{L}(0, \lambda)$ possède une base du noyau à droite dont les vecteurs sont tous constants.

On donne :

- Un algorithme qui soit montre l'existence d'une telle substitution linéaire et la calcule soit prouve qu'elle n'existe pas.
- Complexité arithmétique : $O^{\sim}(n^{\omega+1}\,\ell\,D + n^2\,\ell\,N\,D)$ opérations dans $\mathbb{K}$ où $D$ est la somme des degrés des colonnes de $A_\ell(x)$ et $N$ est l'ordre de troncation des matrices $A_i(x)$ de $\mathcal{L}(x, \vartheta)$.

# Autre démarche

▷ Un algorithme qui consiste à appliquer des opérations élémentaires sur les lignes de $\mathcal{L}(x,\vartheta)$ et donne un opérateur $\overline{\mathcal{L}}(x,\vartheta)$ tel que $\mathrm{rang}(\overline{\mathcal{L}}(x,\vartheta)) = \mathrm{rang}(\overline{\mathcal{L}}(0,\lambda))$.

$$\boxed{\mathcal{L}(x,\vartheta) = \sum_{i=0}^{\ell} A_i(x)\vartheta^i \in \mathbb{K}[x][\vartheta]^{n\times n} \text{ et } A_\ell(x) \text{ inversible}}$$

- $A_\ell(x)$ inversible $\Longrightarrow \mathrm{rang}(\mathcal{L}(x,\vartheta)) = n$.
- Les opérations élémentaires sur les lignes conservent le rang.

$$\mathcal{L}(x,\vartheta) \text{ t.q } \mathrm{rang}(\mathcal{L}(x,\vartheta)) = n \text{ et } \mathrm{rang}(\mathcal{L}(0,\lambda)) < n$$

$$\Big\downarrow \text{Opérations élémentaires } \mathcal{P}(x,\vartheta) \text{ sur les lignes}$$

$$\overline{\mathcal{L}}(x,\vartheta) = \mathcal{P}(x,\vartheta)\mathcal{L}(x,\vartheta) \text{ avec } \mathrm{rang}(\overline{\mathcal{L}}(0,\lambda)) = \mathrm{rang}(\overline{\mathcal{L}}(x,\vartheta)) = n$$

# Autre démarche

Premier (resp. Second) type d'opérations élémentaires sur les lignes de $\mathcal{L}(x,\vartheta)$ :

1. échanger deux lignes ;
2. multiplier une ligne à gauche par un élément non nul de $\mathbb{K}(x)[\vartheta]$ (resp. de $\mathbb{K}(x)$) ;
3. ajouter à une ligne une autre ligne multipliée à gauche par un élément de $\mathbb{K}(x)[\vartheta]$.

$$\boxed{\overline{\mathcal{L}}(x,\vartheta) = \mathcal{P}(x,\vartheta)\mathcal{L}(x,\vartheta)}$$

- ▷ $\mathcal{E}_{\text{solutions de } \mathcal{L}(x,\vartheta)(y(x))=0} \subseteq \mathcal{E}_{\text{solutions de } \overline{\mathcal{L}}(x,\vartheta)(z(x))=0}$.

  Égalité $\iff \mathcal{P}(x,\vartheta) \in \mathbb{K}(x)[\vartheta]^{n\times n}$ est unimodulaire
  $\iff \mathcal{P}(x,\vartheta) =$ produit d'opérations élémentaires du second type

- ▷ Complexité arithmétique : $O^{\sim}\left(n^{\omega+2}\, N\, \ell_{\mathrm{simple}} + n^4\, N^2\, \ell_{\mathrm{simple}}\right)$ opérations dans $\mathbb{K}$, $\ell_{\mathrm{simple}} = \mathrm{ord}(\overline{\mathcal{L}}(x,\vartheta))$ et $N = \deg_x(\mathcal{L}(x,\vartheta))$.

# Solutions formelles d'un système d'ÉDO du premier ordre

Considérons un système d'ÉDO linéaires du premier ordre :

$$(\mathcal{S}') : \quad \vartheta(y(x)) = x^{-p} A(x) y(x),$$

où $A(x) \in \mathbb{K}[[x]]^{n \times n}$ t.q. $A(0) \neq 0$ et $p \in \mathbb{N}$ (appelé rang de Poincaré).

Une base des solutions formelles de $(\mathcal{S}')$ :

$$y_i(x) = e^{q_i(x^{-1/r_i})}\, x^{\lambda_i}\, z_i(x^{1/r_i}), \qquad i = 1, \ldots, n$$

où $r_i \geq 1$, $q_i(t) \in t\overline{\mathbb{K}}[t]$, $\lambda_i \in \overline{\mathbb{K}}$ et $z_i(x^{1/r_i}) \in \overline{\mathbb{K}}[[x^{1/r_i}]][\log(x)]^n$.

- ▷ $q_i = 0 \Longrightarrow y_i(x)$ solution régulière,
- ▷ $q_i \neq 0 \Longrightarrow y_i(x)$ solution irrégulière.

- Les polynômes $q_i$ sont invariants.

# Polygone de Newton

$$\text{Système } (\mathcal{S}') \xrightarrow{\text{choix d'un vecteur cyclique}} \text{Équation différentielle scalaire d'ordre } n \xrightarrow{\text{on associe}} \text{Polygone et polynômes de Newton}$$

- Polygone de Newton de $(\mathcal{S}')$ $\equiv$ Polygone de Newton de l'équ. diff. associée.

▷ Pentes du polygone de Newton sont des rationnels entre 0 et $p$.

▷ $\begin{cases} \text{Pentes} > 0 \rightsquigarrow \text{degrés en } 1/x \text{ des } q_i \\ \text{Racines des polynômes associés} \rightsquigarrow \text{coefficients dominants des } q_i. \end{cases}$

▷ Une pente nulle de longueur $m \Longrightarrow m$ polynômes $q_i$ nuls.

- La super-réduction (Hilali/Wazner (1987)) $\rightsquigarrow$ pentes entières du polygone de Newton de $(\mathcal{S}')$.

Question : pour un $k \in \{0, \ldots, p\}$, comment détecter si $k$ est une pente du polygone de Newton de $(\mathcal{S}')$ ou pas ?

# Pentes entières du polygone de Newton

$$(\mathcal{S}') : \quad \vartheta(y(x)) = x^{-p}A(x)y(x) \rightsquigarrow D(x)\vartheta_k(y(x)) + N(x)y(x) = 0$$

où $\vartheta_k = x^k\vartheta$, $D(x)$ et $N(x)$ dans $\mathbb{K}[[x]]^{n\times n}$ et $D(x) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}((x)))$.

Exemple : $\left\{ \begin{array}{lll} (\mathcal{S}') & \rightsquigarrow & x^{\boldsymbol{k}}\vartheta(y(x)) = B(x)y(x) \text{ où } B(x) = x^{\boldsymbol{k-p}}A(x) \\ & \rightsquigarrow & D(x)\vartheta_{\boldsymbol{k}}(y(x)) = D(x)B(x)y(x) \\ & & \text{ où } D(x) = x^{\mathbf{diag}(\gamma_{\mathbf{1}},\dots,\gamma_{\boldsymbol{n}})} \text{ avec } \gamma_{\boldsymbol{i}} = \max(0, -\mathrm{val}(B(x)_{\boldsymbol{i},*})) \end{array} \right.$

Soit $d(\lambda) = \det(D(0)\lambda + N(0))$.

- $d(\lambda) \neq 0$ :
  - ▷ $k = 0$ et $d(\lambda) \notin \mathbb{K}^* \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ : pente du polygone de Newton} \\ d(\lambda) \text{ : polynôme indiciel} \end{array} \right.$
  - ▷ $k \in \{1, \dots, p\}$ et $d(\lambda) = \lambda^s b(\lambda)$ avec $b(0) \neq 0$ et $b(\lambda) \notin \mathbb{K}^*$
    $\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} k \text{ : pente du polygone de Newton} \\ b(\lambda) \text{ : polynôme de Newton associé} \end{array} \right.$

  Un système $D(x)\vartheta_k(y(x)) + N(x)y(x) = 0$
  satisfaisant $\det(D(0)\lambda + N(0)) \neq 0$ est dit $k$-simple

- $d(\lambda) = 0 \Longrightarrow$ on ne peut rien dire.

# Construction de système $k$-simple équivalent

Stratégie proposée :

$$(\mathcal{S}') \rightsquigarrow D(x)\vartheta_k(y(x)) + N(x)y(x) = 0 \underbrace{\rightsquigarrow}_{\substack{\downarrow \\ \text{algorithme direct}}} \underbrace{\widetilde{D}(x)\vartheta_k(z(x)) + \widetilde{N}(x)z(x) = 0}_{\text{système équivalent } k\text{-simple}}$$

- Systèmes équivalents : Changement de variable $y(x) = T(x)z(x)$ puis multiplication à gauche par $S(x)$ où $S(x), T(x) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}((x)))$.

Considérons un opérateur

$$\mathcal{D} = D(x)\,\vartheta_k + N(x), \quad (\text{non } k\text{-simple})$$

où

- $N(x) \in \mathbb{K}[[x]]^{n\times n}$,
- $D(x) = x^{\alpha} Q(x)$ où $\alpha = \mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ où $\alpha_i \in \mathbb{N}$ t.q. $\alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_n$ et $Q(x) \in \mathbb{K}[[x]]^{n\times n}$ t.q. $Q(0) = I_n$.

▷ Avec $\mathcal{D}$, on associe $\alpha(\mathcal{D}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $|\alpha(\mathcal{D})| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$.

# Construction de système $k$-simple équivalent

$$L(\lambda) = D(0)\,\lambda + N(0) = \begin{pmatrix} I_r\,\lambda + N_0^{11} & N_0^{12} \\ N_0^{21} & N_0^{22} \end{pmatrix} \quad \text{avec } \det(L(\lambda)) = 0$$

- rang $\begin{pmatrix} N_0^{21} & N_0^{22} \end{pmatrix} < n - r$
  - ▷ Proposition : S'il existe $i_0 \in \{r+1, \ldots, n-1\}$ t.q.

$$L(\lambda)_{i_0,*} = u_{i_0+1} L(\lambda)_{i_0+1,*} + \cdots + u_n L(\lambda)_{n,*} \quad (u_i \in \mathbb{K})$$

alors, il existe $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $S(x) \in \mathbb{K}[x^{-1}]^{n\times n}$ de la forme

$$S(x) = P\,\mathrm{diag}(1, \ldots, 1, x^{-\gamma}, 1, \ldots, 1)\,S_1,$$

où

- $P$ est une matrice de permutation,
- $S_1 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$,
- $\gamma \in \mathbb{N}^*$
- $x^{-\gamma}$ vient à la $i_0$ème position,

tel que l'opérateur $\widetilde{\mathcal{D}} = S(x)\,\mathcal{D}\,T \in \mathbb{K}[[x]][\vartheta_k]^{n\times n}$ satisfait

$$\left|\alpha(\widetilde{\mathcal{D}})\right| = |\alpha(\mathcal{D})| - \gamma < |\alpha(\mathcal{D})|\,.$$

# Construction de système $k$-simple équivalent

Après au plus $|\alpha(\mathcal{D})|$ itérations, on obtient $\overline{\mathcal{D}} = \overline{D}(x)\,\vartheta_k + \overline{N}(x)$ :

- soit $|\alpha(\overline{\mathcal{D}})| = 0 \Longrightarrow \overline{D}(0) = I_n \Longrightarrow \overline{\mathcal{D}}$ est $k$-simple,
- soit $|\alpha(\overline{\mathcal{D}})| \neq 0$, les lignes constantes du faisceau associé à $\overline{\mathcal{D}}$ sont linéairement indépendantes et $\overline{\mathcal{D}}$ est $k$-simple,
- soit $|\alpha(\overline{\mathcal{D}})| \neq 0$, les lignes constantes du faisceau associé à $\overline{\mathcal{D}}$ sont linéairement indépendantes mais $\overline{\mathcal{D}}$ n'est pas $k$-simple.

# Exemple

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -x^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x^3 \end{pmatrix} \vartheta + \begin{pmatrix} x - x^3 + 1 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x - x^3 & 0 & 0 & 1 & -x \\ x^4 - x^2 & 0 & 0 & 1 - x^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda + 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^{-1} & -x^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T = I_5$$

$$\overline{\mathcal{D}} = S(x)\mathcal{D}T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -x^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -x^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x^3 \end{pmatrix} \vartheta + \begin{pmatrix} x - x^3 + 1 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 - x^2 + x - x^3 & 0 & 0 & x & -1 \\ x^4 - x^2 & 0 & 0 & 1 - x^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{L}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda + 1 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \det(\overline{L}(\lambda)) \neq 0$$

# Construction de système $k$-simple équivalent

$$L(\lambda) = D(0)\,\lambda + N(0) = \begin{pmatrix} I_r\,\lambda + N_0^{11} & N_0^{12} \\ N_0^{21} & N_0^{22} \end{pmatrix} \quad \text{avec } \det(L(\lambda)) = 0$$

- $\operatorname{rang}\begin{pmatrix} N_0^{21} & N_0^{22} \end{pmatrix} = n - r$
  - ▷ Proposition : Il existe $T(x) \in \mathbb{K}[x]^{n\times n}$ et $S(x) \in \mathbb{K}[x^{-1}]^{n\times n}$ inversibles t.q. les lignes constantes du faisceau associé à $S(x)\mathcal{D}T(x)$ sont linéairement dépendantes et $|\alpha(S(x)\mathcal{D}T(x))| = |\alpha(\mathcal{D})|$.
  - ▷ Exemple : $\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x^3 \end{pmatrix} \vartheta + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1-x^2 & 0 & 0 & 1 & -x \\ x^3-x & 0 & 0 & 1-x^2 & 0 \end{pmatrix}$

$$L(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S(x) = \begin{pmatrix} x^{-1} & 0 & 0 & 0 & -x^{-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Big\downarrow \quad T(x) = \operatorname{diag}(x, 1, 1, 1, 1)$$

$$\overline{L}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

# Algorithme et complexité arithmétique

## Algorithme

- *Entrée : un opérateur* $\mathcal{D} = D(x)\vartheta_k + N(x)$ *non k-simple, tronqué à l'ordre* $\nu \geq |\alpha(\mathcal{D})|$.
- *Sortie : un opérateur équivalent k-simple.*

  *Tant que* $L(\lambda) = D(0)\,\lambda + N(0)$ *est singulière*

  1. *Calculer un opérateur équivalent dont les lignes constantes du faisceau associé sont linéairement dépendantes.*
  2. *Réduire la valeur de* $|\alpha|$.

  *Fin tant que*

- Implémentation en Maple.
- Complexité arithmétique : $O(n^{\omega+1}|\alpha(\mathcal{D})| + \nu\, n^3\, |\alpha(\mathcal{D})|)$ opérations dans $\mathbb{K}$.

1. Calcul des solutions régulières et classification des singularités
2. Calcul des formes $k$-simples d'un système d'ÉDO du premier ordre
3. Réduction des ÉAD
4. Conclusions et perspectives

# Simultanément réduit par rapport aux lignes et colonnes

Déf. : $L \in \mathbb{K}[[x]][\partial]^{m\times n}$ est réduit par rapport à ses lignes si son rang est égal au rang de son coefficient dominant par lignes.

- Théorème : $\exists\ U \in \mathbb{K}[[x]][\partial]^{m\times m}$ unimodulaire t.q. $UL$ est réduit par rapport aux lignes.
- Algorithme : Beckermann/Chen/Labahn (2006).

Proposition : $L \in \mathbb{K}[[x]][\partial]^{m\times n}$ est simultanément réduit par rapport aux lignes et colonnes ssi $L$ a, à une permutation près, la partition par blocs

$$\left(\begin{array}{ccc|c} L_{11} & \cdots & L_{1k} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ L_{k1} & \cdots & L_{kk} & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

où les $L_{ii}$ sont des matrices carrées d'opérateurs :

(a) $\ell c(L_{ii})$ est inversible ;
(b) $\mathrm{ord}(L_{ii}) > \mathrm{ord}(L_{i+1\,i+1})$ pour $i = 1, \ldots, k-1$ ;
(c) $\mathrm{ord}(L_{ij}) \leq \mathrm{ord}(L_{ii})$ pour $j < i$ et $\mathrm{ord}(L_{ij}) \leq \mathrm{ord}(L_{jj})$ pour $i < j$.

# Exemple

$$L = \begin{pmatrix} A_{11}\partial^3 + B_{11}\partial^2 + C_{11}\partial + D_{11} & B_{12}\partial^2 + C_{12}\partial + D_{12} & D_{13} \\ B_{21}\partial^2 + C_{21}\partial + D_{21} & B_{22}\partial^2 + C_{22}\partial + D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}[[x]][\partial]^{n\times n}$$

avec $A_{11}$, $B_{22}$ et $D_{33}$ inversibles.

$D_{33}$ inversible $\Longrightarrow \exists\ S, T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}((x)))$ t.q.

$$\widetilde{L} = SLT = \begin{pmatrix} \widetilde{A}_{11}\partial^3 + \widetilde{B}_{11}\partial^2 + \widetilde{C}_{11}\partial + \widetilde{D}_{11} & \widetilde{B}_{12}\partial^2 + \widetilde{C}_{12}\partial + \widetilde{D}_{12} & 0 \\ \widetilde{B}_{21}\partial^2 + \widetilde{C}_{21}\partial + \widetilde{D}_{21} & \widetilde{B}_{22}\partial^2 + \widetilde{C}_{22}\partial + \widetilde{D}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{pmatrix}$$

avec $\widetilde{A}_{11}$, $\widetilde{B}_{22}$ et $D_{33}$ inversibles.

$$\begin{pmatrix} \widetilde{A}_{11}\partial^3 + \widetilde{B}_{11}\partial^2 + \widetilde{C}_{11}\partial + \widetilde{D}_{11} & \widetilde{B}_{12}\partial^2 + \widetilde{C}_{12}\partial + \widetilde{D}_{12} \\ \widetilde{B}_{21}\partial^2 + \widetilde{C}_{21}\partial + \widetilde{D}_{21} & \widetilde{B}_{22}\partial^2 + \widetilde{C}_{22}\partial + \widetilde{D}_{22} \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \widetilde{A}_{11} & 0 & \widetilde{B}_{12} \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \widetilde{B}_{22} \end{pmatrix} \partial + \begin{pmatrix} 0 & -I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ \widetilde{D}_{11} & \widetilde{C}_{11} & \widetilde{B}_{11} & \widetilde{D}_{12} & \widetilde{C}_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I \\ \widetilde{D}_{21} & \widetilde{C}_{21} & \widetilde{B}_{21} & \widetilde{D}_{22} & \widetilde{C}_{22} \end{pmatrix},$$

# Conclusions et perspectives

Conclusions :

- √ Méthodes directes pour le calcul des solutions régulières des systèmes simples et classification des singularités pour les systèmes simples d'ÉDO.
- √ Méthode directe pour le calcul des formes $k$-simples des systèmes d'ÉDO du 1er ordre.
- √ Nouvel algorithme pour la réduction des ÉAD.

Perspectives :

- ▷ Développement de méthodes directes pour le calcul des solutions irrégulières.
- ▷ Problèmes globaux : calcul des solutions polynomiales, rationnelles, exponentielles etc.
- ▷ Problèmes de factorisation et de divisibilité
- ▷ Généralisation du concept de réduction au sens de Moser aux ÉAD du 1er ordre.

Merci de votre attention !!