Diagonales de fractions rationnelles

et équations différentielles auto-adjointes

INRIA

Gilles Christol

Université Pierre et Marie Curie

7 mai 2012

Question

L'équation différentielle *minimale*

d'une

diagonale de fraction rationnelle

est-elle (toujours) auto-adjointe ?

Ce qu'en dit la géométrie.

Plan

Diagonales de fractions rationnelles : définition

Soit K un corps et soit P et Q des polynômes de $K[x_0, \ldots, x_n]$.

Si Q est *inversible* dans $K((x_0, \ldots, x_n)) = K[[x_0, \ldots, x_n]][\frac{1}{x_0 \cdots x_n}]$

et si $\displaystyle \frac{P}{Q}(x_0, \ldots, x_n) = \sum_{r_i \le s_i} a_{s_0 \cdots s_n} \, x_0^{s_0} \cdots x_n^{s_n}$, (les r_i dépendent de $\frac{P}{Q}$)

la série $$\mathrm{Diag}\left(\frac{P}{Q}\right)(\lambda) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum a_{s \cdots s} \, \lambda^s \qquad \in K((\lambda)) = K[[\lambda]][\frac{1}{\lambda}]$$

s'appelle *diagonale de la fraction rationnelle* $\frac{P}{Q}$ (en $n+1$ variables).

- Si $Q = x_0^{r_0} \cdots x_n^{r_n} R$ avec $R(0, \ldots, 0) \ne 0$, alors Q est inversible,
- Mais $x_i + x_j$ $(0 \le i < j \le n)$ n'est pas inversible.

Pour contourner ce problème d'inversibilité, *B. Adamczewski et J. P. Bell* ont introduit une notion de "séries de Laurent" à n variables.

Cas $n = 1$

Théorème

Une fonction f du corps $K((\lambda))$ est algébrique sur le corps $K(\lambda)$ si et seulement si elle est diagonale d'une fraction rationnelle de deux variables.

En "séparant les racines" (opération élémentaire mais algorithmiquement couteuse) on se ramène à la situation suivante

Cas régulier (Furstenberg)

Soit $\widetilde{Q}$ un polynôme de $\mathbb{Q}[\lambda, y]$ tel que $\widetilde{Q}(0,0) = 0$ et $\widetilde{Q}'_y(0,0) \neq 0$. Alors l'équation $\widetilde{Q}(\lambda, y) = 0$ admet une unique racine f dans $\lambda\,\mathbb{Q}[[\lambda]]$ et, pour tout $n \geq 0$, on a

$$f^n(\lambda) = \mathrm{Diag}\,\frac{y^{n+1}\,\widetilde{Q}'_y(xy, y)}{\widetilde{Q}(xy, y)}.$$

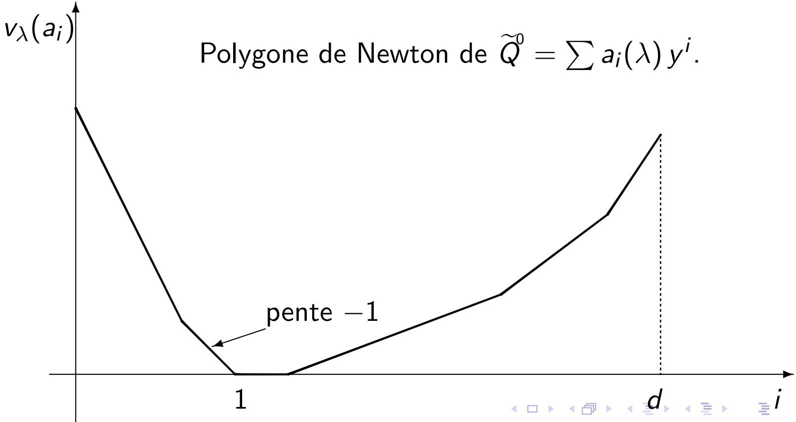
Plus généralement, les diagonales de fonctions algébriques à n variables sont diagonales de fractions rationnelles à $2n$ variables.

Pour Q dans $K[x_0,\dots,x_n][\frac{1}{x_0\cdots x_n}]$ on définit $\widetilde{Q}^0 \in K[\lambda, x_1\dots,x_n]$ par

$$Q(\tfrac{\lambda}{x_1\cdots x_n}, x_1,\dots,x_n) = \lambda^{r_0} x_1^{r_1}\cdots x_n^{r_n}\,\widetilde{Q}^0(\lambda, x_1,\dots,x_n)$$

avec $r_i \in \mathbb{Z} \quad (0 \le i \le n)$, $\quad v_\lambda(\widetilde{Q}^0) = v_{x_i}(\widetilde{Q}^0) = 0 \quad (1 \le i \le n)$.

Q de $K[x,y,\frac{1}{xy}]$ est inversible dans $K((x,y))$ ssi le polygone de Newton λ-adique de $\widetilde{Q}^0$ n'a pas de pente dans l'intervalle $]-1,0[$.



Cas des corps finis

Théorème

Soit K un corps fini de caractéristique p et f dans $K[[\lambda]]$.

Les conditions suivantes sont équivalentes

1. f est algébrique sur le corps $K(\lambda)$,
2. f est diagonale d'une fraction rationnelle de $K[[x_0, \ldots, x_n]]$ (n quelconque),
3. les coefficients de f sont reconnaissables par un automate.

Cas des corps p-adiques

Théorème

On munit $\mathbb{Z}_p[[\lambda]]$ de la valeur absolue $\left|\sum a_s\,\lambda^s\right| = \sup|a_s|$.

Les ensembles des $f = \sum a_s\,\lambda^s \in \mathbb{Z}_p[[\lambda]]$

1. qui sont algébriques sur le corps $\mathbb{Q}_p(\lambda)$,
2. ou qui sont diagonales d'une fraction rationnelle (de $\mathbb{Q}_p[[x_0,\ldots,x_n]]$ pour n quelconque) ,
3. ou dont les coefficients a_s sont reconnaissables par un automate,

ont la même adhérence.

Cohomologie de de Rham : variétés réelles

Soit X une variété différentielle réelle localement compacte de *dimension n*.

On note $\mathrm{H}^i_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{R})$ la cohomologie du *complexe de de Rham* de X :

$$0 \longrightarrow \Omega^0(X) \xrightarrow{d} \Omega^1(X) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Omega^n(X) \longrightarrow 0 \qquad \text{(DR)}$$

des formes différentielles C^∞ sur X muni de la différentielle extérieure d.

- (DR) est une résolution du faisceau localement constant $\mathbb{R}$: $\mathrm{H}^i_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{R}) = \mathrm{H}^i(X,\mathbb{R})$.
- Si X est compacte, $\mathrm{H}^i_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{R})$ est un e.v. de dimension finie.

On a une *dualité* entre la cohomologie et l'*homologie singulière*

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{H}_i(X) & \times & \mathrm{H}^i_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ <\mathcal{C} & , & \omega> & \overset{\text{déf}}{=} & \int_{\mathcal{C}} \omega \end{array}$$

pour $\omega \in \Omega^i(X)$, $d\omega = 0$ et un “cycle ” de dimension i de X.

Cohomologie de de Rham : variétés complexes

Soit X une variété analytique complexe de *dimension n*.

$\Omega^m(X) \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ \text{formes différentielles } \textit{holomorphes} \text{ de degré } m \text{ sur } X \right\}$.

La variété réelle correspondante $X_{\mathbb{R}}$ est de dimension $2n$ et on a

$$\Omega^m(X_{\mathbb{R}}) \supset \oplus_{p+q=m} \Omega^p(X) \wedge \overline{\Omega^q(X)} \qquad (\mathrm{DR}\mathbb{C})$$

et cette inclusion est quasiment une égalité.

Les groupes $\mathrm{H}^i_{\mathrm{DR}}(X, \mathbb{C}) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{H}^i_{\mathrm{DR}}(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ peuvent aussi se calculer comme l'*hypercohomologie* $\mathbb{H}^i(\Omega^\bullet(X))$ du complexe

$$0 \longrightarrow \Omega^0(X) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^n(X) \longrightarrow 0 \ .$$

En particulier, si X est une *variété affine*, on a

$$\mathrm{H}^n_{\mathrm{DR}}(X, \mathbb{C}) = \Omega^n(X) / d\left(\Omega^{n-1}(X)\right) \ .$$

Cohomologie de de Rham : variétés kählériennes

Si X est (l'analytifiée d')une sous-variété *algébrique lisse* d'un $\mathbb{P}_n$, alors c'est une *variété kählérienne* et en particulier elle est symplectique.

La décomposition (DR$\mathbb{C}$) donne alors une *filtration de Hodge* sur $\mathrm{H}^m_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C})$ dont le gradué associé est

$$\oplus_{p+q=m}\mathrm{H}^q\left(X,\Omega^p(X)\right)$$

Cohomologie de de Rham : variétés kählériennes

Si X est (l'analytifiée d')une sous-variété *algébrique lisse* d'un $\mathbb{P}_n$, alors c'est une *variété kählérienne* et en particulier elle est symplectique.

La décomposition $(\mathrm{DR}\mathbb{C})$ donne alors une *filtration de Hodge* sur $\mathrm{H}^m_{\mathrm{DR}}(X, \mathbb{C})$ dont le gradué associé est

$$\oplus_{p+q=m} \mathrm{H}^q\left(X, \Omega^p(X)\right)$$

Par exemple, si X est une courbe projective (lisse), on a :

- $\mathrm{H}^0\left(X, \Omega^1(X)\right) \sim \{$différentielles de première espèce (sans pôle)$\}$,
- $\mathrm{H}^1\left(X, \Omega^0(X)\right) \sim \{$différentielles de seconde espèce (sans résidu)$\}$ $/\{$différentielles exactes$\}$

Se ramener à la "dimension centrale"

Soit X une variété analytique compacte de *dimension n*.

Théorème de Lefschetz (facile)

et soit Y une *section hyperplane* de X telle que $X - Y$ soit lisse.

$$\mathrm{H}^i_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C}) \to \mathrm{H}^i_{\mathrm{DR}}(Y,\mathbb{C}) \text{ est } \begin{cases} \text{un } \textit{isomorphisme} \text{ pour} & i < n-1 \\ \text{une } \textit{injection} \text{ pour} & i = n-1. \end{cases}$$

"Etudier" $\int f(x,y,z)\,dx \wedge dy$ revient (presque) à étudier $\int f(x,y,ax+by)\,dx \wedge dy$ pour des coefficients a et b bien choisis ...

Théorème de Lefschetz (difficile)

Pour $r \geq 1$, on a un isomorphisme $\mathrm{H}^{n-r}_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^{n+r}_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C})$

On s'intéressera essentiellement à $\mathrm{H}^n_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C})$ ... D'ailleurs, c'est la situation pour l'étude des diagonales de fractions rationnelles !

Cohomologie relative

Soit $f : X \to S$ un morphisme lisse de variétés analytiques complexes .
On note $\Omega^m(X/S)$ les S-formes différentielles de degré m sur X
et on pose $\mathcal{H}^i_{\mathrm{DR}}(X/S) \overset{\text{déf}}{=} \mathbb{R}^i f_*\big(\Omega^\bullet(X/S)\big)$.

Pour chaque i , $\mathcal{H}^i_{\mathrm{DR}}(X/S)$ est un faisceau sur S qui est muni d'une connexion intégrable appelée *connexion de Gauss-Manin*.

Grossièrement parlant, il s'agit d'une dérivation sous le signe $\int$:
pour calculer la dérivée $\frac{d}{d\lambda}\Big(f(\lambda, x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m\Big)$
où les $x_{m+1}, \ldots, x_n$ sont définis implicitement par $n - m$ relations

$$g_i(\lambda, x_1, \ldots, x_n) = 0 \ ,$$

on décide que les $x_1, \ldots, x_m$ ne dépendent pas de λ : $\frac{d}{d\lambda}\big(x_i\big) = \frac{d}{d\lambda}\big(dx_i\big) = 0.$
Le résultat ne dépend des variables "indépendantes" $x_1, \ldots, x_m$ choisies ... qu'à une différentielle exacte près.

Diagonale de fraction rationnelle : formule intégrale

Lorsque $K = \mathbb{C}$, on a $\mathrm{Diag}\left(\frac{P}{Q}\right)(\lambda) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_\gamma \omega$ avec :

- $\gamma = \prod_{i=1}^n \gamma_i$ et $\gamma_i =$ cercle $\{|x_i| = \varepsilon\}$ orienté positivement.
- $\omega = \frac{P}{Q}(x_0, \ldots, x_n) \frac{dx_1}{x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dx_n}{x_n} = \frac{\widetilde{P}^0}{\widetilde{Q}^0}(\lambda, x_1, \ldots, x_n) \frac{dx_1}{x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dx_n}{x_n}$.

$$\omega \in \Omega^n(U \cap V/S) \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} S & : & \mathrm{spec}\,\mathbb{C}(\lambda) \quad \big(\mathrm{ou} \quad \{0 < |\lambda| < \varepsilon\}\big) \\ V & : & \{x_0 \cdots x_n = \lambda\} \subset \mathbb{A}_S^{n+1} \\ U & : & \{\widetilde{Q}^0(\lambda, x_1, \ldots, x_n) \neq 0\} \subset \mathbb{P}_S^n \end{array} \right.$$

* γ est un cycle dans V : $x_i \neq 0$ pour $1 \leq i \leq n$ et $x_0 = \frac{\lambda}{x_1 \cdots x_n} \neq 0$,

* Pour $|\lambda|$ petit, c'est un cycle dans U : sur γ , on a $|x_0| = |\lambda|\varepsilon^{-n} \leq \varepsilon$.

* $V = \mathbb{A}_S^n - \bigcup_{1 \leq i \leq n}\{x_i = 0\}$.

Vision plus intrinsèque

De $\dfrac{dx_0}{x_0} + \cdots + \dfrac{dx_n}{x_n} = \dfrac{d\lambda}{\lambda} = 0$, on déduit , pour $1 \leq i \leq n$

$$\frac{dx_1}{x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dx_n}{x_n} = (-1)^i \quad \frac{dx_0}{x_0} \wedge \cdots \wedge \frac{dx_{i-1}}{x_{i-1}} \wedge \frac{dx_{i+1}}{x_{i+1}} \wedge \cdots \wedge \frac{dx_n}{x_n}.$$

Deligne propose de noter $\qquad \omega = \dfrac{P}{Q} \, \dfrac{dx_0 \cdots dx_n}{d\lambda}.$

Attention

Si on remplace x_0 par x_i, γ_0 et γ_i ont des orientations différentes :

si $x_j = \varepsilon \, e^{it_j}$, $\lambda = |\lambda| \, e^{i\tau}$, alors $t_0 + \cdots + t_n = \tau$ càd $t_0 = -t_i$.

Quelques dimensions

- $\dim \mathcal{H}^n_{\mathrm{DR}}(V/S) = 1$ (formule de Kunneth sur $V = \prod_{1 \leq i \leq n} \operatorname{spec} \mathbb{C}(\lambda)^*$).

  Un représentant de la classe est $\dfrac{dx_1}{x_1} \wedge \cdots \wedge \dfrac{dx_n}{x_n}$.

- Si le diviseur $D \overset{\text{déf}}{=} \{\widetilde{Q}^0 = 0\}$ est régulier alors

$$\dim \mathcal{H}^n_{\mathrm{DR}}(U/S) = (d-1)\frac{(d-1)^n - (-1)^n}{d} .$$

- Si le diviseur $\widetilde{Q}^0 = 0$ est régulier et en position générale :

$$\widetilde{Q}^0 = \sum_{m_1 + \cdots + m_n \leq d} a_{m_1 \ldots m_n} x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n} \quad \text{avec} \quad a_{0\ldots0}\, a_{d\ldots0} \cdots a_{0\ldots d} \neq 0$$

alors $\dim \mathcal{H}^n_{\mathrm{DR}}(U \cap V/S) = d^n + n$ [Katz].

Dualité de Poincaré pour les variétés réelles

La cohomologie de de Rham à supports compacts est définie par le complexe

$$0 \longrightarrow \Omega^0_{(c)}(X) \xrightarrow{d} \Omega^1_{(c)}(X) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Omega^n_{(c)}(X) \longrightarrow 0 \qquad \text{(DR(c))}$$

des formes différentielles C^∞ sur X *à supports compacts*.

On note $\mathrm{H}^i_{\mathrm{DR}\ (c)}(X, \mathbb{R})$ ses groupes de cohomologie.

Si X est orientable, la "dualité de Poincaré" est donnée par

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{H}^{n-i}_{\mathrm{DR}\ (c)}(X,\mathbb{R}) & \times & \mathrm{H}^i_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ <\omega_1 & , & \omega_2> & \stackrel{\text{déf}}{=} & \int_X \omega_1 \wedge \omega_2 \end{array}$$

C'est un accouplement parfait.

Dual d'un D-module

Soit X une variété analytique complexe de dimension n et soit $\mathcal{D}_X$ le faisceau des *opérateurs différentiels holomorphes* sur X.

[localement de la forme $\sum a_\alpha D^\alpha = \sum a_{s_1,\dots,s_n}(x_1,\dots,x_n)\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{s_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{s_n}$]

Le *dual* d'un $\mathcal{D}_X$-module *(holonome)* M, est le $\mathcal{D}_X$-module (holonome)

$$M^* \overset{\text{déf}}{=} Hom_{\mathcal{O}_X}\Big(\Omega^n(X), \mathbf{R}Hom_{\mathcal{D}_X}(M,\mathcal{D}_X)\Big)\Big(= Hom_{\mathcal{O}_X}(\Omega^n(X), Ext^n_{\mathcal{D}_X}(M,\mathcal{D}_X))\Big).$$

[Il faudrait faire un décalage, mais nous allons négliger cette difficulté technique]

Pratiquement, si $P = \sum a_\alpha D^\alpha$ et si $M = \mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X.P$ alors :

$$\mathbf{R}Hom_{\mathcal{D}_X}(M,\mathcal{D}_X) = Ext^1_{\mathcal{D}_X}(M,\mathcal{D}_X) = \mathcal{D}_X/P.\mathcal{D}_X$$

et $M^* = Hom_{\mathcal{O}_X}\Big(\Omega^n_X, \mathcal{D}_X/P.\mathcal{D}_X\Big) = \mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X.P^*$ avec

$$P^* = \sum (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_\alpha$$

Image directe

Soit $f : X \to S$ un morphisme de variétés analytiques complexes et soit M un (complexe borné de) $\mathcal{D}(X)$-module(s). On pose

$$\mathrm{DR}(M) \overset{\text{déf}}{=} 0 \to M \to \Omega^1_X \otimes M \to \cdots \to \Omega^n_X \otimes M \to 0$$

Proposition

Il existe des complexes bornés de $\mathcal{D}(S)$-modules

$$\int_{f_*} M \overset{\text{déf}}{=} \mathbf{R}f_*(\mathcal{D}_{S\leftarrow X} \overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{D}_X}{\bigotimes}} M) \quad \text{et} \quad \int_{f_!} M \overset{\text{déf}}{=} \mathbf{R}f_!(\mathcal{D}_{S\leftarrow X} \overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{D}_X}{\bigotimes}} M)$$

avec $\mathcal{D}_{S\leftarrow X} \overset{\text{déf}}{=} f^{-1}Hom_{\mathcal{O}_S}(\omega_S, \mathcal{D}_S) \underset{f^{-1}\mathcal{O}_S}{\bigotimes} \omega_X.$

tels que $\mathrm{DR}\left(\int_{f_*} M\right) = \mathbb{R}f_* \,\mathrm{DR}(M)$

Par exemple, la cohomologie du complexe $\int_{f_*} \mathcal{O}_X$ de $\mathcal{D}(S)$-modules est exactement donnée par les $\mathcal{H}^i_{\mathrm{DR}}(X/S)$.

Le théorème de l'image directe

On pose désormais $n = \dim X/S = \dim X - \dim S$.

Théorème [Mebkhout]

Il existe un morphisme canonique $\int_{f_*} M^* \to \left(\int_{f_!} M\right)^*$.

Si $X \to S$ est *propre* $\int_{f_*} M^* \to \left(\int_{f_*} M\right)^*$ est un *isomorphisme* .

Corollaire [dualité de Poincaré en famille]

Si $X \to S$ est propre on a $\int_{f_*} \mathcal{O}_X = \left(\int_{f_*} \mathcal{O}_X\right)^*$

c'est-à-dire $\left(\mathcal{H}^i_{\mathrm{DR}}(X/S)\right)^* = \mathcal{H}^{2n-i}_{\mathrm{DR}}(X/S)$.

En combinant avec le théorème de Lefschetz difficile, on obtient

$$\left(\mathcal{H}^{n-r}_{\mathrm{DR}}(X/S)\right)^* = \begin{cases} \mathcal{H}^{n}_{\mathrm{DR}}(X/S) & \text{si } \ r = 0 \\ \mathcal{H}^{n+r}_{\mathrm{DR}}(X/S) \sim \mathcal{H}^{n-r}_{\mathrm{DR}}(X/S) & \text{si } \ 0 < |r| \leq n \end{cases}$$

Les équations différentielles $\mathcal{H}^i_{\mathrm{DR}}(X/S)$ sont donc auto-adjointes ...

Pôles logarithmiques

Soit V une variété complexe et soit $X \supset V$ une variété compacte telle que $D = X - V = \bigcup_{i=1}^m D_i$ soit un *diviseur à croisements normaux*.

D'après Hironaka, on peut toujours se ramener à cette situation.

On note $\Omega(X)^m\langle D\rangle$ les f.d. sur X *à pôle logarithmique le long de D* c'est-à-dire localement (en $P \in D$) de la forme $\omega \wedge \frac{dQ_{i_1}}{Q_{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{dQ_{i_h}}{Q_{i_h}}$ avec $\omega \in \Omega^{m-h}(X)$ et $D_{i_j} = \{Q_{i_j} = 0\}$ se "croisant" en P.

On obtient ainsi une filtration de $\Omega^m(X)\langle D\rangle$ "par l'ordre du pôle".
On notera $\mathrm{gr}_h\left(\Omega^m(X)\langle D\rangle\right)$ le gradué associé.

Les formes différentielles à pôle logarithmique suffisent pour calculer la cohomologie : $\mathrm{H}^m_{\mathrm{DR}}(V,\mathbb{C}) = \mathbf{H}^m\big(\Omega^\bullet(V)\big) = \mathbf{H}^m\big(\Omega^\bullet(X)\langle D\rangle\big)$

Application "résidu de Poincaré"

Elle est définie localement par $\omega \wedge \frac{dQ_{i_1}}{Q_{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{dQ_{i_h}}{Q_{i_h}} \longmapsto \omega$.

Elle fournit, pour chaque $0 \leq h \leq m$, des isomorphismes

$$\mathrm{gr}_h \left(\Omega^m(X)\langle D\rangle\right) = \bigoplus_{i_1<\cdots<i_h} \Omega^{m-h}(D_{i_1} \cap \cdots \cap D_{i_h})$$

et se généralise "facilement" au cas relatif : $V = X - D \hookrightarrow X \xrightarrow{f} S$.

Théorème (Deligne-Katz)

$$E_1^{-h,m+h} \stackrel{\text{déf}}{=} \bigoplus_{i_1<\cdots<i_h} \mathcal{H}_{\mathrm{DR}}^{m-h}(D_{i_1} \cap \cdots \cap D_{i_h}/S) \Rightarrow \mathbb{R}^m f_*\left(\Omega^\bullet(X/S)\langle D\rangle\right)$$

où chaque terme est muni de la connexion de Gauss-Manin,

est une *suite spectrale* de *$\mathcal{O}_S$-modules* (libres de rang fini) *avec connexion*

et est *dégénérée en E_2*.

Traduction

Ainsi "l'équation différentielle" $L \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{R}^n f_* \big(\Omega^\bullet(X/S)\langle D\rangle\big) = \mathcal{H}^n_{\mathrm{DR}}(V/S)$

est munie d'une *filtration par le poids*

c'est-à-dire est décomposée en un produit $L = L_0 \dots L_{-n}$.

Si la suite spectrale était dégénérée en E_1, le gradué associé serait

$$\bigoplus_{h=-n}^{0} \mathcal{H}^{n-h}_{\mathrm{DR}}(D_h/S) \quad , \qquad \text{avec} \qquad D_h \stackrel{\text{déf}}{=} \bigcup_{i_1<\dots<i_h} D_{i_1} \cap \dots \cap D_{i_h} \quad .$$

Chacun des termes (L_i) de ce gradué serait donc auto-adjoint.

En fait chaque composant du gradué est un sous-quotient des précédents :

$$\ker\Big(\mathcal{H}^{n-h}_{\mathrm{DR}}(D_h/S) \to \mathcal{H}^{n-h+2}_{\mathrm{DR}}(D_{h-1}/S)\Big)$$
$$\Big/ \,\mathrm{Im}\Big(\mathcal{H}^{n-h-2}_{\mathrm{DR}}(D_{h+1}/S) \to \mathcal{H}^{n-h}_{\mathrm{DR}}(D_h/S)\Big)$$

Chacun des termes intervenant dans cette formule est auto-adjoint !

Questions

1. Si L et M sont auto-adjointes, leur *produit* LM est-il auto-adjoint ?

   [C'est vrai si les modules différentiels sont en somme directe]

2. Si on a un *complexe de modules différentiels* dont tous les termes sont auto-adjoints, la cohomologie est-elle auto-adjointe ?

   [C'est vrai si tous les modules sont semi-simples ce qui doit être le cas d'après le théorème ... de semi-simplicité]

3. Est-ce que *l'équation différentielle minimale* de la diagonale d'une fraction rationnelle est l'une des équations données par la géométrie ? ? ?

   [Le module différentiel $M + M^*$ est toujours auto-adjoint ! ! !]