# Automates finis et séries de Laurent algébriques

**Alina FIRICEL**

Institut Camille Jordan, Université Lyon 1

INRIA, 21 mars 2011

# Problème

Soit $\mathbb{K}$ un corps fini.

- **But** : « Approcher » une série de Laurent $f \in \mathbb{K}((T))$, algébrique, par des fractions rationnelles $P_n/Q_n \in \mathbb{K}(T)$ :

$$|Q_n|^{\rho} \ll \left| f - \frac{P_n}{Q_n} \right| \ll |Q_n|^{\delta}.$$

- **Idée** : Troncation du développement en série de Laurent de $f$ à certains endroits « bien choisis » en utilisant une approche qui combine la théorie des nombres, la théorie des automates finis et la combinatoire des mots.

- **Motivation** : Absence du théorème de Roth $\rightsquigarrow$ difficile d'obtenir des informations sur les mesures d'irrationalité des séries de Laurent algébriques.

## Séries de Laurent à coefficients dans un corps fini

- Dans cet exposé, $p$ désigne un nombre premier et $q$ une puissance de $p$.

- Rappelons l'analogie entre les deux séries d'inclusions suivantes :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & & \mathbb{F}_q[T] \\ \cap & & \cap \\ \mathbb{Q} & \approx & \mathbb{F}_q(T) \\ \cap & & \cap \\ \mathbb{R} & & \mathbb{F}_q((T^{-1})). \end{array}$$

- On définit une valeur absolue ultramétrique par

$$|f| = q^{-n_0} \quad \text{si} \quad f = \sum_{n \geq -n_0} a_n T^{-n} \neq 0,\ a_{-n_0} \neq 0, \quad \text{et} \quad |0| = 0\,.$$

Le corps $\mathbb{F}_q((T^{-1}))$ est le complété de $\mathbb{F}_q(T)$ pour cette valeur absolue.

# Séries de Laurent algébriques

**Définition.** Une série de Laurent $f \in \mathbb{F}_q((T^{-1}))$ est algébrique sur $\mathbb{F}_q(T)$ s'il existe $P \in \mathbb{F}_q(T)[X]$, non nul, tel que $P(f) = 0$. Sinon, elle est dite transcendante sur $\mathbb{F}_q(T)$.

**Exemple de Mahler.** La série

$$f_M(T) = \sum_{n \geq 0} T^{-p^n} \in \mathbb{F}_p[[T^{-1}]]$$

est racine du polynôme

$$TX^p - TX + 1 = 0\,.$$

En effet, si

$$f_M(T) = \frac{1}{T} + \frac{1}{T^p} + \frac{1}{T^{p^2}} + \cdots\,,$$

alors

$$f_M^p(T) = \frac{1}{T^p} + \frac{1}{T^{p^2}} + \frac{1}{T^{p^3}} + \cdots = f_M(T) - \frac{1}{T},$$

ce qui implique

$$Tf_M^p(T) - Tf_M(T) + 1 = 0.$$

**Remarque.** Les $p$ racines de l'equation sont $a + f_M(T)$, pour $a \in \mathbb{F}_p$.

# Séries de Laurent algébriques

**Exemple de Thue–Morse.** Soit $f_{\mathbf{t}}(T) := \sum t_n T^{-n} \in \mathbb{F}_2((T^{-1}))$, où $\mathbf{t} := (t_n)_{n\geq 0}$ est la suite :

$$t_n = \begin{cases} 1 \text{ si } (n)_2 \text{ contient un nombre impair de } 1 \\ 0 \text{ sinon .} \end{cases}$$

**Remarque.** $t_{2n} = t_n \mod 2$ et $t_{2n+1} = (t_n + 1) \mod 2$

Ainsi

$$f_{\mathbf{t}}(T) = \sum t_{2n} T^{-2n} + \sum t_{2n+1} T^{-2n-1} = \sum t_n T^{-2n} + T^{-1} \sum (t_n + 1) T^{-2n}$$

et alors

$$f_{\mathbf{t}}(T) = f_{\mathbf{t}}(T^2) + \frac{1}{T} f_{\mathbf{t}}(T^2) + \frac{T}{T^2 - 1}.$$

Ainsi la série $f_{\mathbf{t}}$ satisfait l'équation algébrique suivante :

$$(T+1)^3 X^2 + T(T+1)^2 X + T^2 = 0.$$

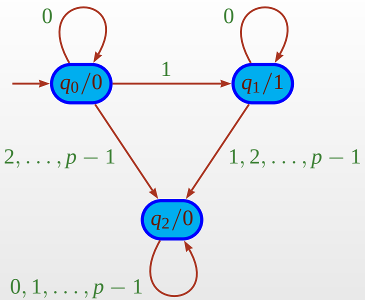
# Suites automatiques

**Définition.** Une suite $\mathbf{a} = (a_n)_n$ est $k$-automatique s'il existe un automate fini qui produit $a_n$ comme sortie quand l'entrée est le développement en base $k$ de $n$.

**Exemple de Mahler.** La suite $\mathbf{a} := (a_n)_{n\geq 0}$ définie par

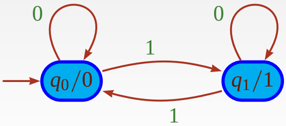
$$a_n = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ est une puissance de } p\,; \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

est $p$-automatique car elle peut être engendrée par l'automate suivant



# Suites automatiques et $k$-noyaux

**Exemple de Thue– Morse.** Cette suite est 2-automatique car elle peut être engendrée par l'automate suivant




Si l'entrée est $W := 11001$, on obtient 1 et donc $t_{25} = 1$.

**Rappel.** Pour tout $n \geq 0$ on a : $t_{2n} = t_n \mod 2$ et $t_{2n+1} = (t_n + 1) \mod 2$.

**Définition.** Pour tout entier $k \geq 1$, le $k$-noyau de $\mathbf{a} := (a_n)_{n\geq 0}$ est l'ensemble défini par :

$$\mathcal{N}_k(\mathbf{a}) = \left\{ (a_{k^i n+j})_{n\geq 0} \mid i \geq 0 \text{ et } 0 \leq j < k^i \right\} .$$

**Théorème (Eilenberg, 1974).** Une suite est $k$-automatique si et seulement si son $k$-noyau est un ensemble fini.

**Exemple.** On a $\mathcal{N}_2(\mathbf{t}) = \left\{ (t_n)_{n\geq 0}, (t_{2n+1})_{n\geq 0} \right\}$.

# Suites automatiques et morphismes de monoïdes libres

**Morphisme.** Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ deux alphabets finis. Un morphisme est une application $\sigma : \mathcal{A}^* \mapsto \mathcal{B}^*$ telle que $\sigma(UV) = \sigma(U)\sigma(V)$ pour tous les mots $U, V \in \mathcal{A}^*$.

Un morphisme est dit $k$-uniforme si chaque lettre a pour l'image un mot de longueur $k$. Si l'image d'une lettre est une lettre, alors le morphisme est appelé codage.

**Théorème (Cobham, 1972).** Une suite $\mathbf{a}$ est $k$-automatique si et seulement si il existe une lettre $a$, un morphisme $k$-uniforme $\sigma$ et un codage $\varphi$ tels que $\mathbf{a} = \varphi(\sigma^\infty(a))$.

**Exemple.** La suite de Thue–Morse peut être caractérisée comme suit :

$$\mathbf{t} := (t_n)_{n\geq 0} = 01101001100101101001 \cdots = \sigma^\infty(0),$$

où $\sigma$ est défini par $\sigma(0) = 01, \sigma(1) = 10$.

**Théorème (Christol, 1979).** Soit $f$ une série de Laurent à coefficients dans $\mathbb{F}_q$. Alors $f$ est algébrique sur $\mathbb{F}_q(T)$ si et seulement si la suite de ses coefficients est $p$-automatique.

**Remarque.** Pour tout $m \geq 1$, une suite $\mathbf{a} = (a_n)_{n\geq 0}$ est $k$-automatique si et seulement si elle est $k^m$-automatique.

**Théorème (Cobham, 1969).** Soit $\mathbf{a} = (a_n)_{n\geq 0}$ une suite à valeurs dans un alphabet fini. Soient $k$ et $l$ deux entiers multiplicativement indépendants (c'est-à-dire $\log k / \log l$ est irrationnel). Alors $\mathbf{a}$ est $k$ et $l$-automatique si et seulement si $\mathbf{a}$ est ultimement périodique.

# Approximation rationnelle des séries de Laurent algébriques

# Approximation rationnelle des séries de Laurent algébriques

**Question.** *Dans quelle mesure peut-on approcher les nombres irrationnels par des nombres rationnels ?*

- Pour $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ on définit l'exposant d'irrationalité (ou mesure d'irrationalité) $\mu(\xi)$ comme le supremum des nombres réels $\tau$ pour lesquels l'inégalité

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{|q|^\tau}$$

possède une infinité de solutions rationnelles $p/q$.

- On a une définition analogue pour les séries de Laurent à coefficients dans un corps fini : on remplace les nombres rationnels par les fractions rationnelles.

# Résultats généraux

- **Inégalité de Liouville (1849).** Si $\xi \in \mathbb{R}$ algébrique irrationnel de degré $d$, alors $\mu(\xi) \in [2, d]$.

  Dans le corps $\mathbb{F}_q((T^{-1})) \rightsquigarrow$ **Mahler (1949)**.

- **Théorème de Thue (1909).** Si $\xi \in \mathbb{R}$ algébrique irrationnel de degré $d$, alors $\mu(\xi) \in [2, \frac{d}{2} + 1]$.

  Dans le corps $\mathbb{F}_q((T^{-1})) \rightsquigarrow$ **Voloch (1988)**, **de Mathan–Lasjaunias (1996)** (seulement pour certaines séries algébriques).

- **Théorème de Roth (1955).** Soient $\xi$ un nombre algébrique irrationnel et $\varepsilon > 0$. Alors l'inégalité

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$$

  ne possède qu'un nombre fini de solutions rationnelles $p/q$ et donc $\mu(\xi) = 2$ .

- **Schmidt (1999), Thakur (1999).** Pour tout $s \in [2, \infty[ \cap \mathbb{Q}$, il existe $f(T)$ algébrique sur $\mathbb{F}_q(T)$ telle que $\mu(f) = s$.

## Une mesure d'irrationalité générale

**Théorème (F., 2010).** Soit $f = \sum_{n\geq 0} a_n T^{-n} \in \mathbb{F}_q((T^{-1}))$ algébrique sur $\mathbb{F}_q(T)$. Alors on a

$$\mu(f) \leq p^{s+1} e \,,$$

où $s$ est le cardinal du $p$-noyau de la suite $\mathbf{a} = (a_n)_{n\geq 0}$ et $e$ le nombre d'états de l'automate minimal engendrant $\mathbf{a}$ (dans le sens direct).

**Remarque.** En pratique, on peut améliorer cette borne et on peut éliminer la dépendance en $p$-noyau. Dans les meilleurs cas, on peut obtenir la valeur exacte de l'exposant.

# Un lemme d'approximation

**Lemme.** Soit $f$ une série de Laurent à coefficients dans $\mathbb{F}_q$. Soient $\delta$, $\rho$ et $\theta$ des nombres réels tels que $0 < \delta \leq \rho$ et $\theta \geq 1$. On suppose qu'il existe une suite $(P_n/Q_n)_{n\geq 1}$ de fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{F}_q$ telles que :

(i) $\frac{1}{|Q_n|^{1+\rho}} \ll \left| f - \frac{P_n}{Q_n} \right| \ll \frac{1}{|Q_n|^{1+\delta}}$,

(ii) $|Q_n| < |Q_{n+1}| \ll |Q_n|^{\theta}$.

Alors l'exposant d'irrationalité de $f$, $\mu(f)$, vérifie :

$$1 + \delta \leq \mu(f) \leq \frac{\theta(1+\rho)}{\delta}\,.$$

**Remarque.** De plus, si on suppose pour tout $n$ assez grand que $(P_n, Q_n) = 1$, alors

$$1 + \delta \leq \mu(f) \leq \max(1+\rho, 1 + \frac{\theta}{\delta})\,.$$

Dans ce dernier cas, si $\delta = \rho \geq \sqrt{\theta}$, on obtient la valeur exacte de l'exposant.

# Construction de bonnes approximations rationnelles

Soit $f(T) = \sum_{n\geq 0} a_n T^{-n} \in \mathbb{F}_q((T^{-1}))$ algébrique sur $\mathbb{F}_q(T)$.

**Christol + Cobham** $\rightsquigarrow$ Il existe un morphisme $p$-uniforme $\sigma : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}$ et un codage $\varphi : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{F}_q$ tels que

$$\mathbf{a} := a_0 a_1 a_2 \cdots = \varphi(\sigma^\infty(a_0)).$$

- **Principe des tiroirs** $\rightsquigarrow$ Il existe $w \in \mathbb{Q}$, $w > 1$, et deux mots finis $U$ et $V$ tels que $UV^w$ soit préfixe de $\mathbf{a} := a_0 a_1 a_2 \cdots$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n := \varphi(\sigma^n(U))$ et $V_n := \varphi(\sigma^n(V))$.

# Construction de bonnes approximations rationnelles

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite des coefficients de $f$ commence par $U_n \underbrace{V_n V_n \cdots V_n}_{w \text{ fois}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P_n/Q_n$ la fraction rationnelle dont le développement en série de Laurent est la suite (ultimement périodique) $U_n \underbrace{V_n V_n V_n \cdots}_{\text{une infinité de fois}}$.

- On obtient alors :

$$\left| f - \frac{P_n}{Q_n} \right| \leq \frac{1}{|Q_n|^{1+\delta}}, \text{ où } \delta = \frac{|U_n V_n^w|}{|U_n V_n|}.$$

- Si les deux suites ont en commun que les premiers $U_n V_n^w$ chiffres $\rightsquigarrow$ égalité.
- Le lemme d'approximation $\rightsquigarrow$ encadrement de l'exposant d'irrationalité.

**Remarque.** Cette approche a été déjà utilisée, dans le contexte des nombres réels automatiques, par Adamczewski et Cassaigne (2006), Adamczewski et Rivoal (2009), Adamczewski et Bugeaud (2010).

# L'étude de coprimalité

Soient $k := |U|$ et $\ell := |V|$. On peut montrer que les dénominateurs

$$Q_n(T) = T^{kp^n-1}(T^{\ell p^n} - 1) = T^{kp^n-1}(T^\ell - 1)^{p^n} .$$

**Remarque.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $(P_n, Q_n) = 1$ (sur $\mathbb{F}_q(T)$) si et seulement si

(i) $P_n(0) \neq 0$ (condition qui peut être vérifiée facilement),

(ii) pour tout $a \in \overline{\mathbb{F}}_p$, tel que $a^\ell = 1$, $P_n(a) \neq 0$.

On peut aussi montrer que $P_n(T) = P_{U_n}(T)(T^{\ell p^n} - 1) + P_{V_n}(T)$.

**Notation.** Si $U = a_0 a_1 \cdots a_{s-1}$ alors $P_U(T) := a_0 T^{s-1} + a_1 T^{s-2} + \cdots + a_{s-1}$.

**Remarque.** Pour $a \in \overline{\mathbb{F}}_p$, tel que $a^\ell = 1$,

$$P_n(a) = P_{V_n}(a) = P_{\varphi(\sigma^n(V))}(a).$$

# Le calcul des numérateurs

Soit $\sigma : \mathcal{A}_3 \mapsto \mathcal{A}_3^*$ le morphisme 3-uniforme défini par :

$$\left\{\begin{array}{lcc} \sigma(0) & = & 010 \\ \sigma(1) & = & 210 \\ \sigma(2) & = & 001. \end{array}\right.$$

Les polynômes associés :

$$\left\{\begin{array}{lcc} P_{\sigma(0)}(T) & = & T \\ P_{\sigma(1)}(T) & = & 2T^2+T \\ P_{\sigma(2)}(T) & = & 1. \end{array}\right.$$

On associe au morphisme $\sigma$ la matrice :

$$M_\sigma(T) = \begin{pmatrix} T^2+1 & T & 0 \\ 1 & T & T^2 \\ T^2+T & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\begin{pmatrix} P_{\sigma(0)}(T) \\ P_{\sigma(1)}(T) \\ P_{\sigma(2)}(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^2+1 & T & 0 \\ 1 & T & T^2 \\ T^2+T & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

# Matrices associées aux morphismes

En général, on a :

$$\begin{pmatrix} P_{\varphi(\sigma(0))}(T) \\ P_{\varphi(\sigma(1))}(T) \\ \vdots \\ P_{\varphi(\sigma(m-1))}(T) \end{pmatrix} = M_\sigma(T) \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \varphi(1) \\ \vdots \\ \varphi(m-1) \end{pmatrix}.$$

**Remarque.** Pour determiner $P_{V_n}(T) = P_{\varphi(\sigma^n(V))}(T)$, on va s'interesser à $M_{\sigma^n}(T)$.

# Matrices associées aux morphismes

**Proposition.** Soit $\sigma$ un $p$-morphisme défini sur $\mathcal{A}_m$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$M_{\sigma^n}(T) = M_\sigma(T^{p^{n-1}})M_\sigma(T^{p^{n-2}}) \cdots M_\sigma(T)$$

où $M_\sigma(T)$ est la matrice associée à $\sigma$.

**Remarque.** Si $a \in \mathbb{F}_p$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$M_{\sigma^n}(a) = M_\sigma(a)^n.$$

**Proposition.** Si $V$ est un mot fini sur l'alphabet $\mathcal{A}_m$ et $a \in \overline{\mathbb{F}}_p$, alors la suite $(P_{\varphi(\sigma^n(V))}(a))_{n\geq 0}$ est ultimement périodique.

# Résumé

• On a une formule explicite pour les numérateurs $P_n(a)$, à l'aide de la matrice associée au morphisme.

• La suite $(P_n(a))_{n\geq 0}$ est ultimement périodique. De plus, la période et la pré-période de la suite $(P_n(a))_{n\geq 0}$ peuvent être bornées de manière explicite.

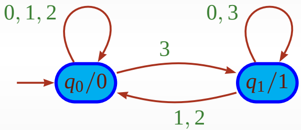
• Pour tester si $P_n$ et $Q_n$ sont premiers entre eux pour tout $n$ assez grand, il suffit de tester, pour les $a$ (racines $\ell$-ièmes de l'unité), si $P_n(a)$ est différent de 0 pour un nombre fini d'entiers $n$.

# Exemple

- Soit $P$ le polynôme irréductible, à coefficients dans $\mathbb{F}_2(T)$, défini par :

$$P(X) = X^4 + X + \frac{T}{T^4+1} \cdot$$

- Soit $f = \sum_{n\geq 0} a_n T^{-n}$ l'unique racine dans le corps $\mathbb{F}_2((T^{-1}))$. La suite des coefficients $\mathbf{a} = (a_n)_{n\geq 0}$ est engendrée par le 4-automate suivant :




- De plus, on peut montrer que $\mathbf{a} = \sigma^\infty(0)$, où $\sigma$ est le morphisme défini par :

$$\sigma(0) = 0001$$
$$\sigma(1) = 1001.$$

**Proposition.** On a $\mu(f) = 3$.

Le théorème de **Liouville-Mahler** implique seulement que $\mu(f) \leq 4$.

# Construction des approximations rationnelles

- La suite **a** commence par $\underbrace{0001\,0001\,0001}_{\text{motifs répétitifs}}\,1001\cdots$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite des coefficients de $f$ commence par

$$f := \sigma^n(0001)\,\sigma^n(0001)\,\sigma^n(0001)\,1\cdots\,.$$

- La série $f$ est « proche » de la série rationnelle dont le développement est

$$\frac{P_n}{Q_n} := \sigma^n(0001)\sigma^n(0001)\,\sigma^n(0001)\,\sigma^n(0001)\,\cdots = (\sigma^n(0001))^\infty.$$

- Plus précisément,

$$\left| f - \frac{P_n}{Q_n} \right| = \frac{1}{|Q_n|^3}.$$

- Ainsi, le lemme d'approximation implique :

$$3 \leq \mu(f) \leq 6.$$

Si de plus $(P_n, Q_n) = 1$ alors

$$\mu(f) = 3.$$

## Coprimalité des polynômes

- De plus, $Q_n(T) = T^{4^n} - 1 = (T-1)^{4^n}$ et $P_n(T) = P_{\sigma^n(0)}(T)$.
- Ainsi $(P_n, Q_n) = 1$ si et seulement si $P_n(1) \neq 0$, pour tout $n$ assez grand.
- La matrice associée à $\sigma$ est $M_\sigma(T) = \begin{pmatrix} T^3+T^2+T & 1 \\ T^2+T & T^3+1 \end{pmatrix}$.
- Si $T = 1$, on obtient :

$$M_\sigma(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## Coprimalité des polynômes

- Puisque $M_{\sigma^n}(1) = M_\sigma(1)^n$, on obtient alors :

$$M_{\sigma^n}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

  ce qui permet de montrer :

$$\begin{pmatrix} P_{\sigma^n(0)}(T) \\ P_{\sigma^n(1)}(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Par conséquent, $P_n(1) = P_{\sigma^n}(1) = 1 \neq 0$, pour tout $n$. Donc $(P_n, Q_n) = 1$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p(T)$.

# Perspectives

Utiliser cette approche afin d’obtenir des résultats plus précis pour des familles particulières de séries de Laurent algébriques.

- Quelles propriétés doivent satisfaire le morphisme ou l’automate afin d’obtenir des approximations rationnelles irreductibles ?
- Quelles propriétés doivent satisfaire le morphisme ou l’automate afin d’obtenir la valeur exacte de l’exposant ?

# Perspectives

Étendre cette approche à certaines séries de Laurent transcendantes.

**Exemple - l'analogue de $\pi$**

Il existe une fonction $\zeta$ définie dans le module de Carlitz, pour tout $s > 0$ :

$$\zeta(s) = \sum_{\substack{P \in \mathbb{F}_q[T] \\ P \text{ unitaire}}} \frac{1}{P^s}.$$

Si $q-1|s$ alors $\zeta(s) = \Pi_q^s r_s$ où $r_s \in \mathbb{F}_q(T)$ et $\Pi_q$ est défini par

$$\Pi_q = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{T^{q^j} - 1}\right)^{-1}$$

$\Pi_q$ est transcendant sur $\mathbb{F}_q(T)$
(plusieurs preuves, en particulier, preuve « automatique » (Allouche, Berthé)).

# Perspectives

Soit $\mathbf{a} = (a_n)_{n\geq 0}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{F}_q$ et $f(T) = \sum_{n\geq n_0} a_n T^{-n}$ .

- La fonction de complexité de $\mathbf{a}$ est définie par :

$$p(\mathbf{a}, m) = \text{Card}\left\{(a_j, a_{j+1}, \ldots, a_{j+m-1}) \mid j \geq 0\right\} .$$

- On définit alors la fonction de complexité $f$ par $p(f, m) = p(\mathbf{a}, m)$.

**Théorème (F., 2009).** Si $q = 2$, alors $p(\frac{1}{\Pi_2}, m) = \Theta(m^2)$. Si $q \geq 3$, alors $p(\frac{1}{\Pi_q}, m) = \Theta(m)$.

**Remarques.**

Cela donne, en particulier, une autre preuve de transcendance de $\Pi_2$ sur $\mathbb{F}_2(T)$.

Résultat plûtot surprenant ! On s'attend que $p(\pi, b, m) = b^m$ pour tout $b \geq 2$ et $m \geq 1$ (conjecture de normalité).

Basse complexité $\rightsquigarrow$ Motifs répétitfs $\rightsquigarrow$ Bornes pour l'exposant d'irrationalité de $\Pi_q$.