Expression explicite de la fonction génératrice du nombre de chemins pour la marche de Gessel

Irina Kurkova Kilian Raschel

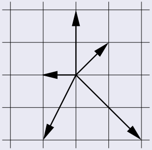
Université Pierre et Marie Curie

INRIA Rocquencourt - Séminaire Algorithms
1 février 2010

1. Introduction et résultats
2. Problème de Riemann-Carleman
3. Uniformisation et conformal gluing
4. Conclusion

Compter le nombre de chemins dans le plan

Soit $\mathcal{S}$ un ensemble de sauts,

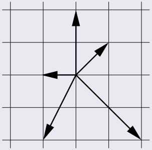


soit $q(i, j, k)$ le nombre de chemins du plan avec ses incréments dans $\mathcal{S}$ partant de $(0, 0)$ et arrivant en (i, j) en temps k et soit

$$Q(x, y, z) = \sum_{i,j,k} q(i, j, k) x^i y^j z^k .$$

Compter le nombre de chemins dans le plan

Soit $\mathcal{S}$ un ensemble de sauts,



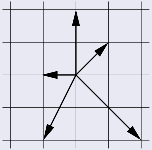
soit $q(i, j, k)$ le nombre de chemins du plan avec ses incréments dans $\mathcal{S}$ partant de $(0, 0)$ et arrivant en (i, j) en temps k et soit

$$Q(x, y, z) = \sum_{i,j,k} q(i, j, k) x^i y^j z^k.$$

- Déterminer $Q(x, y, z)$.

Compter le nombre de chemins dans le plan

Soit $\mathcal{S}$ un ensemble de sauts,



soit $q(i, j, k)$ le nombre de chemins du plan avec ses incréments dans $\mathcal{S}$ partant de $(0, 0)$ et arrivant en (i, j) en temps k et soit

$$Q(x, y, z) = \sum_{i,j,k} q(i, j, k) x^i y^j z^k.$$

- Déterminer $Q(x, y, z)$.
- Nature de $Q(x, y, z)$: rationnelle, algébrique, holonome ?

Nombre de chemins dans le *plan*

$Q(x, y, z)$ est rationnelle.

Nombre de chemins dans le *plan*

$Q(x, y, z)$ est rationnelle.

Nombre de chemins dans le *demi-plan*

$Q(x, y, z)$ est algébrique.

Nombre de chemins dans le *plan*

$Q(x, y, z)$ est rationnelle.

Nombre de chemins dans le *demi-plan*

$Q(x, y, z)$ est algébrique.

Nombre de chemins dans le *quart de plan*

$Q(x, y, z)$ est holonome ?

Nombre de chemins dans le *plan*

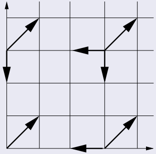
$Q(x, y, z)$ est rationnelle.

Nombre de chemins dans le *demi-plan*

$Q(x, y, z)$ est algébrique.

Nombre de chemins dans le *quart de plan*

$Q(x, y, z)$ est holonome ?



Marche de Kreweras
algébrique

Nombre de chemins dans le *plan*

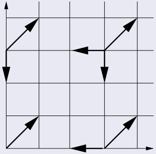
$Q(x, y, z)$ est rationnelle.

Nombre de chemins dans le *demi-plan*

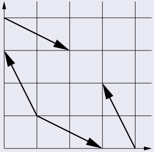
$Q(x, y, z)$ est algébrique.

Nombre de chemins dans le *quart de plan*

$Q(x, y, z)$ est holonome ?



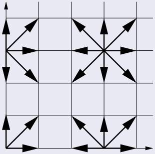
Marche de Kreweras
algébrique



Marche du cavalier
non holonome

Marches avec petits sauts dans le quart de plan

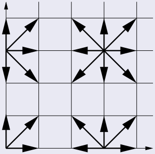
$\mathcal{S} \subset \{-1, 0, 1^2\} \setminus \{(0,0)\}$



A priori, il y a 2^8 problèmes.

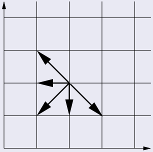
Marches avec petits sauts dans le quart de plan

$\mathcal{S} \subset \{-1, 0, 1^2\} \setminus \{(0,0)\}$



A priori, il y a 2^8 problèmes.

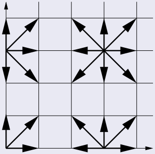
Certains de ces 2^8 problèmes sont :



triviaux,

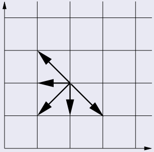
Marches avec petits sauts dans le quart de plan

$\mathcal{S} \subset \{-1, 0, 1^2\} \setminus \{(0,0)\}$

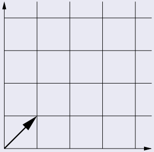


A priori, il y a 2^8 problèmes.

Certains de ces 2^8 problèmes sont :



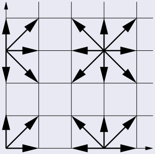
triviaux,



simples,

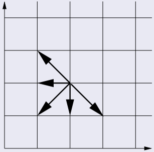
Marches avec petits sauts dans le quart de plan

$\mathcal{S} \subset \{-1, 0, 1^2\} \setminus \{(0,0)\}$

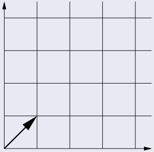


A priori, il y a 2^8 problèmes.

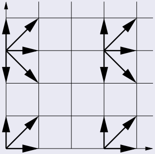
Certains de ces 2^8 problèmes sont :



triviaux,



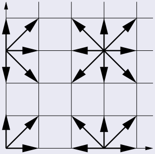
simples,



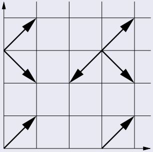
propres au demi-plan,

Marches avec petits sauts dans le quart de plan

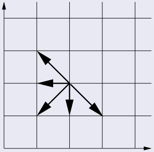
$\mathcal{S} \subset \{-1, 0, 1^2\} \setminus \{(0,0)\}$



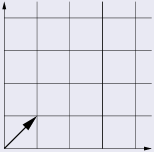
A priori, il y a 2^8 problèmes.



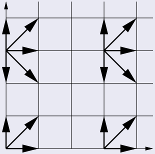
Certains de ces 2^8 problèmes sont :



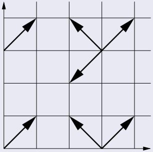
triviaux,



simples,



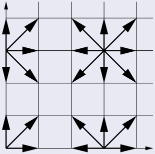
propres au demi-plan,



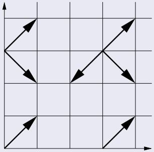
symétriques.

Marches avec petits sauts dans le quart de plan

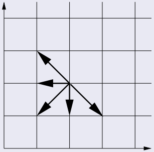
$\mathcal{S} \subset \{-1, 0, 1^2\} \setminus \{(0,0)\}$



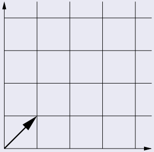
A priori, il y a 2^8 problèmes.



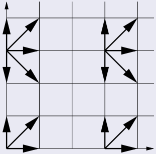
Certains de ces 2^8 problèmes sont :



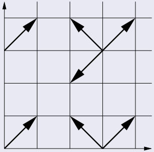
triviaux,



simples,



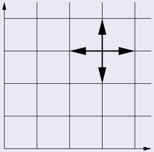
propres au demi-plan,



symétriques.

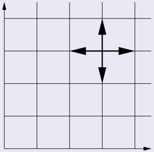
Finalement, il reste 79 problèmes !

Le groupe de la marche : exemple



La fonction génératrice des sauts $x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}$

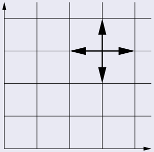
Le groupe de la marche : exemple



La fonction génératrice des sauts $x + \dfrac{1}{x} + y + \dfrac{1}{y}$ est laissée invariante par

$$\psi(x, y) = \left(x, \frac{1}{y}\right), \qquad \phi(x, y) = \left(\frac{1}{x}, y\right),$$

Le groupe de la marche : exemple



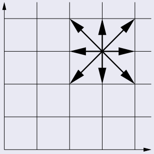
La fonction génératrice des sauts $x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}$ est laissée invariante par

$$\psi(x,y) = \left(x, \frac{1}{y}\right), \qquad \phi(x,y) = \left(\frac{1}{x}, y\right),$$

et donc par tout élément du groupe

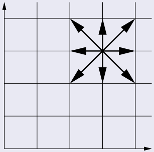
$$\langle \psi, \phi \rangle = \left\{ (x,y), \left(x, \frac{1}{y}\right), \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right), \left(\frac{1}{x}, y\right) \right\}.$$

Le groupe de la marche : cas général



La fonction $\displaystyle\sum_{(i,j)\in\mathcal{S}} x^i y^j = \sum_{i=-1}^{1} B_i(y)x^i = \sum_{j=-1}^{1} A_j(x)y^j$

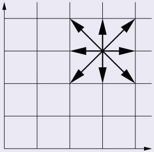
Le groupe de la marche : cas général



La fonction $\sum_{(i,j)\in\mathcal{S}} x^i y^j = \sum_{i=-1}^{1} B_i(y)x^i = \sum_{j=-1}^{1} A_j(x)y^j$ est invariante par

$$\psi(x,y) = \left(x, \frac{A_{-1}(x)}{A_1(x)}\frac{1}{y}\right), \qquad \phi(x,y) = \left(\frac{B_{-1}(y)}{B_1(y)}\frac{1}{x}, y\right),$$

Le groupe de la marche : cas général



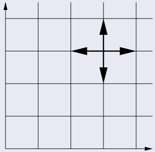
La fonction $\sum_{(i,j)\in\mathcal{S}} x^i y^j = \sum_{i=-1}^{1} B_i(y)x^i = \sum_{j=-1}^{1} A_j(x)y^j$ est invariante par

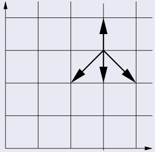
$$\psi(x,y) = \left(x, \frac{A_{-1}(x)}{A_1(x)}\frac{1}{y}\right), \qquad \phi(x,y) = \left(\frac{B_{-1}(y)}{B_1(y)}\frac{1}{x}, y\right),$$

et donc par tout élément du groupe

$$\langle \psi, \phi \rangle.$$

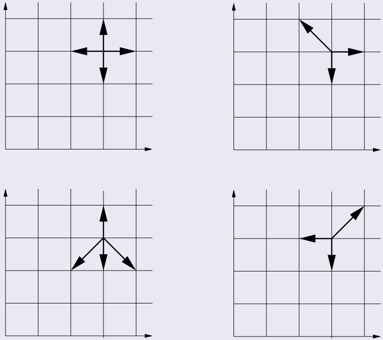
Quelques exemples de groupe





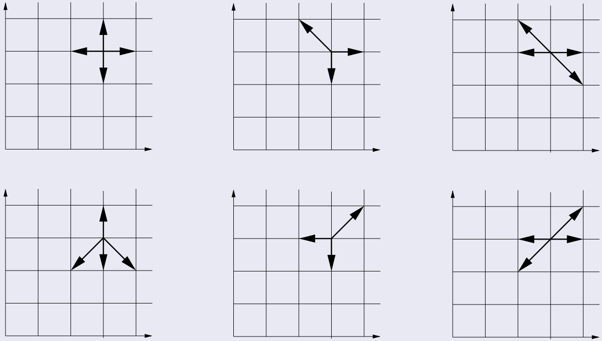
Ordre 4,

Quelques exemples de groupe



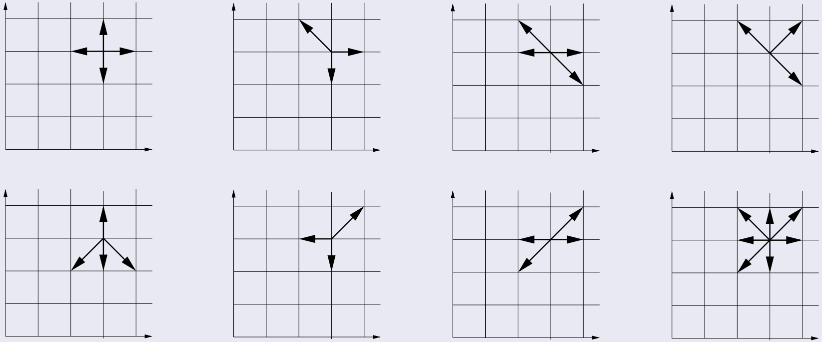
Ordre 4, ordre 6,

Quelques exemples de groupe



Ordre 4, ordre 6, ordre 8,

Quelques exemples de groupe



Ordre 4, ordre 6, ordre 8, ordre ∞.

79 problèmes : groupes finis et infinis

79 problèmes

79 problèmes : groupes finis et infinis

23 ont une groupe fini

79 problèmes

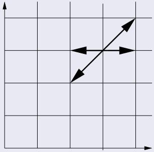
56 ont un groupe infini

79 problèmes : groupes finis et infinis

79 problèmes

23 ont une groupe fini

22 étaient résolus



1 non résolu

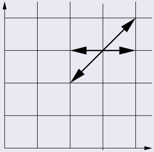
56 ont un groupe infini

79 problèmes : groupes finis et infinis

79 problèmes

23 ont une groupe fini

22 étaient résolus



1 non résolu

56 ont un groupe infini

2 étaient résolus

54 non résolus

L'équation fonctionnelle

Fonction génératrice des sauts :

$$\sum_{(i,j)\in\mathcal{S}} x^i y^j = \sum_{i=-1}^{1} B_i(y)x^i = \sum_{j=-1}^{1} A_j(x)y^j.$$

Equation fonctionnelle :

$$\left[\sum_{(i,j)\in\mathcal{S}} x^i y^j - 1/z\right] xyzQ(x,y,z) =$$
$$zxA_{-1}(x)Q(x,0,z) + zyB_{-1}(y)Q(0,y,z) - \epsilon zQ(0,0,z) - xy,$$

avec

$$\epsilon = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (-1,-1)\in\mathcal{S}, \\ 0 & \text{si} \quad (-1,-1)\notin\mathcal{S}. \end{cases}$$

L'équation fonctionnelle

Fonction génératrice des sauts :

$$\sum_{(i,j)\in\mathcal{S}} x^i y^j = \sum_{i=-1}^{1} B_i(y)x^i = \sum_{j=-1}^{1} A_j(x)y^j.$$

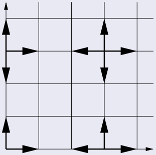
Equation fonctionnelle :

$$\left[\sum_{(i,j)\in\mathcal{S}} x^i y^j - 1/z\right] xyzQ(x,y,z) =$$
$$zxA_{-1}(x)Q(x,0,z) + zyB_{-1}(y)Q(0,y,z) - \epsilon zQ(0,0,z) - xy,$$

avec

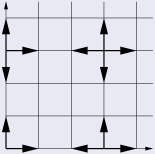
$$\epsilon = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (-1,-1)\in\mathcal{S}, \\ 0 & \text{si} \quad (-1,-1)\notin\mathcal{S}. \end{cases}$$

Un exemple de résolution pour un groupe fini



La fonction $\sum_{(i,j)\in\mathcal{S}} x^i y^j = x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}$ est laissée stable par les 4 éléments (x,y), $(\frac{1}{x},y)$, $(\frac{1}{x},\frac{1}{y})$, $(x,\frac{1}{y})$.
C'est aussi le cas de $K(x,y,z) = \sum_{(i,j)\in\mathcal{S}} x^i y^j - 1/z$.

Un exemple de résolution pour un groupe fini



La fonction $\sum_{(i,j)\in\mathcal{S}} x^i y^j = x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}$ est laissée stable par les 4 éléments (x,y), $(\frac{1}{x},y)$, $(\frac{1}{x},\frac{1}{y})$, $(x,\frac{1}{y})$. C'est aussi le cas de $K(x,y,z) = \sum_{(i,j)\in\mathcal{S}} x^i y^j - 1/z$.

$$K(x,y,z)xyzQ(x,y,z) = \quad zxQ(x,0,z) + zyQ(0,y,z) - xy$$

$$-K(x,y,z)\tfrac{1}{x}yzQ(\tfrac{1}{x},y,z) = -z\tfrac{1}{x}Q(\tfrac{1}{x},0,z) - zyQ(0,y,z) + \tfrac{1}{x}y$$

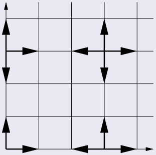
$$K(x,y,z)\tfrac{1}{x}\tfrac{1}{y}zQ(\tfrac{1}{x},\tfrac{1}{y},z) = \quad z\tfrac{1}{x}Q(\tfrac{1}{x},0,z) + z\tfrac{1}{y}Q(0,\tfrac{1}{y},z) - \tfrac{1}{x}\tfrac{1}{y}$$

$$-K(x,y,z)x\tfrac{1}{y}zQ(x,\tfrac{1}{y},z) = -zxQ(x,0,z) - z\tfrac{1}{y}Q(0,\tfrac{1}{y},z) + x\tfrac{1}{y}$$

On obtient :

$$\sum_{\theta\in\langle\psi,\phi\rangle} (-1)^\theta \theta[xyzQ(x,y,z)] = \frac{-xy + \frac{1}{x}y - \frac{1}{x}\frac{1}{y} + x\frac{1}{y}}{K(x,y,z)}$$

Un exemple de résolution pour un groupe fini



La fonction $\sum_{(i,j)\in\mathcal{S}} x^i y^j = x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}$ est laissée stable par les 4 éléments (x, y), $(\frac{1}{x}, y)$, $(\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$, $(x, \frac{1}{y})$. C'est aussi le cas de $K(x,y,z) = \sum_{(i,j)\in\mathcal{S}} x^i y^j - 1/z$.

$$K(x,y,z)xyzQ(x,y,z) = zxQ(x,0,z) + zyQ(0,y,z) - xy$$

$$-K(x,y,z)\tfrac{1}{x}yzQ(\tfrac{1}{x},y,z) = -z\tfrac{1}{x}Q(\tfrac{1}{x},0,z) - zyQ(0,y,z) + \tfrac{1}{x}y$$

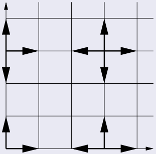
$$K(x,y,z)\tfrac{1}{x}\tfrac{1}{y}zQ(\tfrac{1}{x},\tfrac{1}{y},z) = z\tfrac{1}{x}Q(\tfrac{1}{x},0,z) + z\tfrac{1}{y}Q(0,\tfrac{1}{y},z) - \tfrac{1}{x}\tfrac{1}{y}$$

$$-K(x,y,z)x\tfrac{1}{y}zQ(x,\tfrac{1}{y},z) = -zxQ(x,0,z) - z\tfrac{1}{y}Q(0,\tfrac{1}{y},z) + x\tfrac{1}{y}$$

On obtient :

$$\sum_{\theta\in\langle\psi,\phi\rangle} (-1)^\theta \theta\left[xyzQ(x,y,z)\right] = \frac{-xy + \frac{1}{x}y - \frac{1}{x}\frac{1}{y} + x\frac{1}{y}}{K(x,y,z)}$$

Un exemple de résolution pour un groupe fini



La fonction $\sum_{(i,j)\in\mathcal{S}} x^i y^j = x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}$ est laissée stable par les 4 éléments (x,y), $(\frac{1}{x},y)$, $(\frac{1}{x},\frac{1}{y})$, $(x,\frac{1}{y})$. C'est aussi le cas de $K(x,y,z) = \sum_{(i,j)\in\mathcal{S}} x^i y^j - 1/z$.

$$K(x,y,z)xyzQ(x,y,z) = zxQ(x,0,z) + zyQ(0,y,z) - xy$$

$$-K(x,y,z)\tfrac{1}{x}yzQ(\tfrac{1}{x},y,z) = -z\tfrac{1}{x}Q(\tfrac{1}{x},0,z) - zyQ(0,y,z) + \tfrac{1}{x}y$$

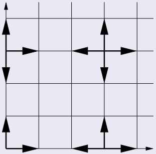
$$K(x,y,z)\tfrac{1}{x}\tfrac{1}{y}zQ(\tfrac{1}{x},\tfrac{1}{y},z) = z\tfrac{1}{x}Q(\tfrac{1}{x},0,z) + z\tfrac{1}{y}Q(0,\tfrac{1}{y},z) - \tfrac{1}{x}\tfrac{1}{y}$$

$$-K(x,y,z)x\tfrac{1}{y}zQ(x,\tfrac{1}{y},z) = -zxQ(x,0,z) - z\tfrac{1}{y}Q(0,\tfrac{1}{y},z) + x\tfrac{1}{y}$$

On obtient :

$$\sum_{\theta\in\langle\psi,\phi\rangle} (-1)^\theta \theta[xyzQ(x,y,z)] = \frac{-xy + \frac{1}{x}y - \frac{1}{x}\frac{1}{y} + x\frac{1}{y}}{K(x,y,z)}$$

Un exemple de résolution pour un groupe fini



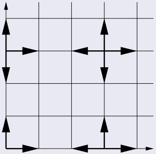
La fonction $\sum_{(i,j)\in\mathcal{S}} x^i y^j = x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}$ est laissée stable par les 4 éléments (x,y), $(\frac{1}{x},y)$, $(\frac{1}{x},\frac{1}{y})$, $(x,\frac{1}{y})$. C'est aussi le cas de $K(x,y,z) = \sum_{(i,j)\in\mathcal{S}} x^i y^j - 1/z$.

$$\begin{aligned}
K(x,y,z)xyzQ(x,y,z) &= zxQ(x,0,z) + zyQ(0,y,z) - xy\\
-K(x,y,z)\tfrac{1}{x}yzQ(\tfrac{1}{x},y,z) &= -z\tfrac{1}{x}Q(\tfrac{1}{x},0,z) - zyQ(0,y,z) + \tfrac{1}{x}y\\
K(x,y,z)\tfrac{1}{x}\tfrac{1}{y}zQ(\tfrac{1}{x},\tfrac{1}{y},z) &= z\tfrac{1}{x}Q(\tfrac{1}{x},0,z) + z\tfrac{1}{y}Q(0,\tfrac{1}{y},z) - \tfrac{1}{x}\tfrac{1}{y}\\
-K(x,y,z)x\tfrac{1}{y}zQ(x,\tfrac{1}{y},z) &= -zxQ(x,0,z) - z\tfrac{1}{y}Q(0,\tfrac{1}{y},z) + x\tfrac{1}{y}
\end{aligned}$$

On obtient :

$$\sum_{\theta\in\langle\psi,\phi\rangle} (-1)^{\theta}\theta[xyzQ(x,y,z)] = \frac{-xy + \frac{1}{x}y - \frac{1}{x}\frac{1}{y} + x\frac{1}{y}}{K(x,y,z)}$$

Un exemple de résolution pour un groupe fini



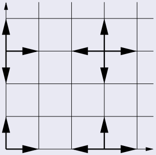
La fonction $\sum_{(i,j)\in\mathcal{S}} x^i y^j = x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}$ est laissée stable par les 4 éléments $(x,y), (\frac{1}{x},y), (\frac{1}{x},\frac{1}{y}), (x,\frac{1}{y})$. C'est aussi le cas de $K(x,y,z) = \sum_{(i,j)\in\mathcal{S}} x^i y^j - 1/z$.

$$\begin{aligned}
K(x,y,z)xyzQ(x,y,z) &= \quad zxQ(x,0,z) + zyQ(0,y,z) - xy \\
-K(x,y,z)\tfrac{1}{x}yzQ(\tfrac{1}{x},y,z) &= -z\tfrac{1}{x}Q(\tfrac{1}{x},0,z) - zyQ(0,y,z) + \tfrac{1}{x}y \\
K(x,y,z)\tfrac{1}{x}\tfrac{1}{y}zQ(\tfrac{1}{x},\tfrac{1}{y},z) &= \quad z\tfrac{1}{x}Q(\tfrac{1}{x},0,z) + z\tfrac{1}{y}Q(0,\tfrac{1}{y},z) - \tfrac{1}{x}\tfrac{1}{y} \\
-K(x,y,z)x\tfrac{1}{y}zQ(x,\tfrac{1}{y},z) &= -zxQ(x,0,z) - z\tfrac{1}{y}Q(0,\tfrac{1}{y},z) + x\tfrac{1}{y}
\end{aligned}$$

On obtient :

$$\sum_{\theta\in\langle\psi,\phi\rangle} (-1)^\theta \theta\left[xyzQ(x,y,z)\right] = \frac{-xy + \frac{1}{x}y - \frac{1}{x}\frac{1}{y} + x\frac{1}{y}}{K(x,y,z)}$$

Un exemple de résolution pour un groupe fini



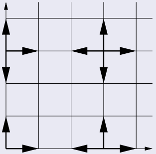
La fonction $\sum_{(i,j)\in\mathcal{S}} x^i y^j = x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}$ est laissée stable par les 4 éléments $(x,y), (\frac{1}{x}, y), (\frac{1}{x}, \frac{1}{y}), (x, \frac{1}{y})$.
C'est aussi le cas de $K(x,y,z) = \sum_{(i,j)\in\mathcal{S}} x^i y^j - 1/z$.

$$\begin{aligned}
K(x,y,z)xyzQ(x,y,z) &= \quad zxQ(x,0,z) + zyQ(0,y,z) - xy \\
-K(x,y,z)\tfrac{1}{x}yzQ(\tfrac{1}{x},y,z) &= -z\tfrac{1}{x}Q(\tfrac{1}{x},0,z) - zyQ(0,y,z) + \tfrac{1}{x}y \\
K(x,y,z)\tfrac{1}{x}\tfrac{1}{y}zQ(\tfrac{1}{x},\tfrac{1}{y},z) &= \quad z\tfrac{1}{x}Q(\tfrac{1}{x},0,z) + z\tfrac{1}{y}Q(0,\tfrac{1}{y},z) - \tfrac{1}{x}\tfrac{1}{y} \\
-K(x,y,z)x\tfrac{1}{y}zQ(x,\tfrac{1}{y},z) &= -zxQ(x,0,z) - z\tfrac{1}{y}Q(0,\tfrac{1}{y},z) + x\tfrac{1}{y}
\end{aligned}$$

On obtient :

$$[x^>][y^>] \sum_{\theta\in\langle\psi,\phi\rangle} (-1)^\theta \theta\left[xyzQ(x,y,z)\right] = [x^>][y^>] \frac{-xy + \frac{1}{x}y - \frac{1}{x}\frac{1}{y} + x\frac{1}{y}}{K(x,y,z)}$$

Un exemple de résolution pour un groupe fini



La fonction $\sum_{(i,j)\in\mathcal{S}} x^i y^j = x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}$ est laissée stable par les 4 éléments (x,y), $(\frac{1}{x},y)$, $(\frac{1}{x},\frac{1}{y})$, $(x,\frac{1}{y})$. C'est aussi le cas de $K(x,y,z) = \sum_{(i,j)\in\mathcal{S}} x^i y^j - 1/z$.

$$\begin{aligned}
K(x,y,z)xyzQ(x,y,z) &= \quad zxQ(x,0,z) + zyQ(0,y,z) - xy \\
-K(x,y,z)\tfrac{1}{x}yzQ(\tfrac{1}{x},y,z) &= -z\tfrac{1}{x}Q(\tfrac{1}{x},0,z) - zyQ(0,y,z) + \tfrac{1}{x}y \\
K(x,y,z)\tfrac{1}{x}\tfrac{1}{y}zQ(\tfrac{1}{x},\tfrac{1}{y},z) &= \quad z\tfrac{1}{x}Q(\tfrac{1}{x},0,z) + z\tfrac{1}{y}Q(0,\tfrac{1}{y},z) - \tfrac{1}{x}\tfrac{1}{y} \\
-K(x,y,z)x\tfrac{1}{y}zQ(x,\tfrac{1}{y},z) &= -zxQ(x,0,z) - z\tfrac{1}{y}Q(0,\tfrac{1}{y},z) + x\tfrac{1}{y}
\end{aligned}$$

On obtient :

$$xyzQ(x,y,z) \quad = [x^>][y^>]\frac{-xy + \frac{1}{x}y - \frac{1}{x}\frac{1}{y} + x\frac{1}{y}}{K(x,y,z)}$$

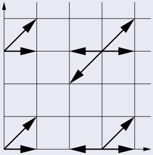
Condition suffisante pour qu'une série soit holonome

Si $F(x, y, z)$ en tant que série en z a ses coefficients dans $\mathbb{C}(x)[y, \frac{1}{y}]$, alors $[y^{>}]F(x, y, z)$ est algébrique sur $\mathbb{C}(x, y, z)$.
Si en plus $[y^{>}]F(x, y, z)$ en tant que série en z a ses coefficients dans $\mathbb{C}[x, \frac{1}{x}, y]$ alors $[x^{>}][y^{>}]F(x, y, z)$ est holonome.

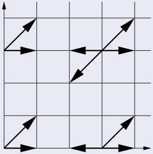
79 problèmes : groupes finis et infinis

- 79 problèmes
  - 23 ont une groupe fini
    - 19 résolus par "orbit sums"
    - 3 résolus par "half-orbit sums"
    - 1 non résolu : Gessel
  - 56 ont un groupe infini
    - 2 étaient résolus
    - 54 non résolus

Marche de Gessel



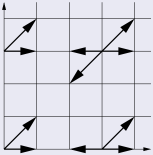
Marche de Gessel



2001 : conjecture d'I. Gessel

$$q(0,0,2k) = 16^k \frac{(5/6)_k (1/2)_k}{(2)_k (5/3)_k}, \qquad (a)_k = a(a+1)\cdots(a+k-1).$$

Marche de Gessel



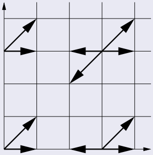
2001 : conjecture d'I. Gessel

$$q(0,0,2k) = 16^k \frac{(5/6)_k (1/2)_k}{(2)_k (5/3)_k}, \qquad (a)_k = a(a+1)\cdots(a+k-1).$$

2009 : preuve de la conjecture

M. Kauers, C. Koutschan, D. Zeilberger.

Marche de Gessel



2001 : conjecture d'I. Gessel

$$q(0,0,2k) = 16^k \frac{(5/6)_k (1/2)_k}{(2)_k (5/3)_k}, \qquad (a)_k = a(a+1)\cdots(a+k-1).$$

2009 : preuve de la conjecture

M. Kauers, C. Koutschan, D. Zeilberger.

2009 : $Q(x,y,z)$ est algébrique

A. Bostan, M. Kauers.

Résultats (1/2)

$$zQ(x,0,z) - zQ(0,0,z) = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{\mathcal{M}_z} tY_0(t,z)\left[\frac{\partial_t w(t,z)}{w(t,z)-w(x,z)} - \frac{\partial_t w(t,z)}{w(t,z)-w(0,z)}\right]\mathrm{d}t.$$

$$z(y+1)Q(0,y,z) - zQ(0,0,z) = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{\widetilde{\mathcal{M}}_z} X_0(t,z)t\left[\frac{\partial_t \widetilde{w}(t,z)}{\widetilde{w}(t,z)-\widetilde{w}(y,z)} - \frac{\partial_t \widetilde{w}(t,z)}{\widetilde{w}(t,z)-\widetilde{w}(0,z)}\right]\mathrm{d}t.$$

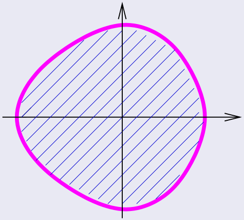
$$zQ(0,0,z)=\frac{-1}{2\pi\imath}\int_{\widetilde{\mathcal{M}}_z} X_0(t,z)t\left[\frac{\partial_t \widetilde{w}(t,z)}{\widetilde{w}(t,z)-\widetilde{w}(-1,z)} - \frac{\partial_t \widetilde{w}(t,z)}{\widetilde{w}(t,z)-\widetilde{w}(0,z)}\right]\mathrm{d}t.$$

X_0 et Y_0 sont des racines du noyau $K(x,y,z) = \sum_{(i,j)\in\mathcal{S}} x^i y^j - 1/z$:

$$K(X_0(y,z),y,z) = K(x,Y_0(x,z),z) = 0.$$

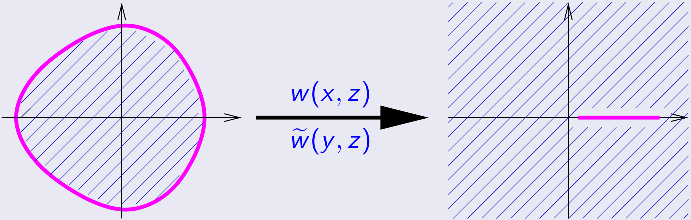
Résultats (2/2)

Les courbes $\mathcal{M}_z$ et $\widetilde{\mathcal{M}}_z$ sont symétriques par rapport à l'axe horizontal.



Résultats (2/2)

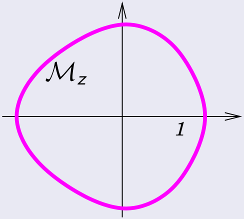
Les courbes $\mathcal{M}_z$ et $\widetilde{\mathcal{M}}_z$ sont symétriques par rapport à l'axe horizontal.



w et $\widetilde{w}$ sont (explicites et) algébriques.

Problème frontière avec condition au bord de type Riemann-Carleman

Il existe une courbe $\mathcal{M}_z$, symétrique par rapport à l'axe horizontal,



et telle que

$$\forall t \in \mathcal{M}_z : \qquad zQ\big(t, 0, z\big) - zQ\big(\overline{t}, 0, z\big) = tX_0^{-1}\big(t, z\big) - \overline{t}X_0^{-1}\big(\overline{t}, z\big),$$

X_0 étant une des racines du noyau $K(x, y, z) = \sum_{(i,j)\in\mathcal{S}} x^i y^j - 1/z$.

Comment obtenir ce problème de Riemann-Carleman ? (1/2)

L'équation fonctionnelle :

$$K(x,y,z)Q(x,y,z) = zQ(x,0,z) + z(y+1)Q(0,y,z) - zQ(0,0,z) - xy.$$

Comment obtenir ce problème de Riemann-Carleman ? (1/2)

L'équation fonctionnelle :

$$K(x,y,z)Q(x,y,z) = zQ(x,0,z) + z(y+1)Q(0,y,z) - zQ(0,0,z) - xy.$$

Racines du noyau :

$$K(x,y,z) = xyz\left(\sum_{(i,j)\in\mathcal{S}} x^i y^j - 1/z\right) = 0 \Longleftrightarrow x = X_0(y,z) \text{ ou } X_1(y,z).$$

Comment obtenir ce problème de Riemann-Carleman ? (1/2)

L'équation fonctionnelle :

$$K(x,y,z)Q(x,y,z) = zQ(x,0,z) + z(y+1)Q(0,y,z) - zQ(0,0,z) - xy.$$

Racines du noyau :

$$K(x,y,z) = xyz\left(\sum_{(i,j)\in\mathcal{S}} x^i y^j - 1/z\right) = 0 \iff x = X_0(y,z) \text{ ou } X_1(y,z).$$

Une nouvelle équation fonctionnelle :

$$0 = zQ(X_i(y,z),0,z) + z(y+1)Q(0,y,z) - zQ(0,0,z) - X_i(y,z)y.$$

Comment obtenir ce problème de Riemann-Carleman ? (1/2)

L'équation fonctionnelle :

$$K(x,y,z)Q(x,y,z) = zQ(x,0,z) + z(y+1)Q(0,y,z) - zQ(0,0,z) - xy.$$

Racines du noyau :

$$K(x,y,z) = xyz\left(\sum_{(i,j)\in\mathcal{S}} x^i y^j - 1/z\right) = 0 \Longleftrightarrow x = X_0(y,z) \text{ ou } X_1(y,z).$$

Une nouvelle équation fonctionnelle :

$$0 = zQ(X_i(y,z),0,z) + z(y+1)Q(0,y,z) - zQ(0,0,z) - X_i(y,z)y.$$

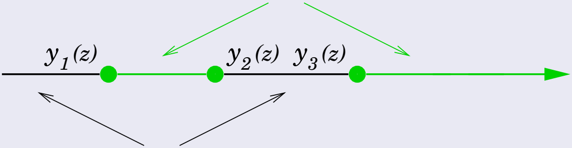
On obtient :

$$zQ(X_0(y,z),0,z) - zQ(X_1(y,z),0,z) = X_0(y,z)y - X_1(y,z)y.$$

Comment obtenir ce problème de Riemann-Carleman ? (2/2)

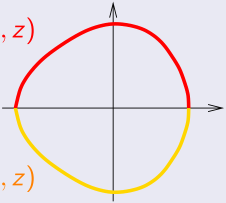
$$zQ(X_0(y,z),0,z) - zQ(X_1(y,z),0,z) = X_0(y,z)y - X_1(y,z)y.$$

$X_0(y,z)$ et $X_1(y,z)$ sont complexes conjuguées



$X_0(y,z)$ et $X_1(y,z)$ sont réelles

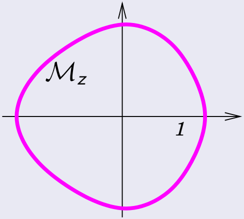
$X_0([y_1(z),y_2(z)],z)$



$X_1([y_1(z),y_2(z)],z)$

Problème frontière avec condition au bord de type Riemann-Carleman

Il existe une courbe $\mathcal{M}_z$, symétrique par rapport à l'axe horizontal,



et telle que

$$\forall t \in \mathcal{M}_z : \qquad zQ\big(t, 0, z\big) - zQ\big(\overline{t}, 0, z\big) = tX_0^{-1}\big(t, z\big) - \overline{t}X_0^{-1}\big(\overline{t}, z\big),$$

X_0 étant une des racines du noyau $K(x, y, z) = \sum_{(i,j)\in\mathcal{S}} x^i y^j - 1/z$.

Résolution du problème de Riemann-Carleman

$$zQ(x,0,z) - zQ(0,0,z) = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{\mathcal{M}_z} tX_0^{-1}(t,z)\left[\frac{\partial_t w(t,z)}{w(t,z)-w(x,z)} - \frac{\partial_t w(t,z)}{w(t,z)-w(0,z)}\right]\mathrm{d}t.$$

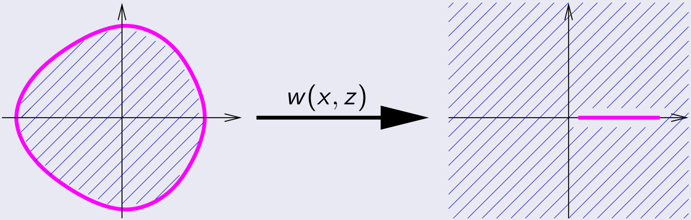
où w_z est une fonction de conformal gluing pour $\mathcal{M}_z$.

Résolution du problème de Riemann-Carleman

$$zQ(x,0,z) - zQ(0,0,z) = \frac{1}{2\pi \imath}\int_{\mathcal{M}_z} tX_0^{-1}(t,z)\left[\frac{\partial_t w(t,z)}{w(t,z)-w(x,z)} - \frac{\partial_t w(t,z)}{w(t,z)-w(0,z)}\right]\mathrm{d}t.$$

où w_z est une fonction de conformal gluing pour $\mathcal{M}_z$.

Fonction de conformal gluing



Uniformisation *(pour toute marche)*

x est première coordonnée de $\mathcal{K}_z$, où :

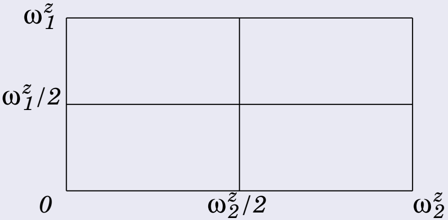
$\mathcal{K}_z = \left\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : K(x,y,z) = \sum_{(i,j)\in\mathcal{S}} x^i y^j - 1/z = 0\right\}$.

Uniformisation *(pour toute marche)*

x est première coordonnée de $\mathcal{K}_z$, où :

$\mathcal{K}_z = \left\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : K(x,y,z) = \sum_{(i,j)\in\mathcal{S}} x^i y^j - 1/z = 0\right\}$.

- $\mathcal{K}_z \cong \mathbb{C}/(\omega_1^z\mathbb{Z} + \omega_2^z\mathbb{Z})$.
- $\mathcal{K}_z = \left\{(x(\omega,z), y(\omega,z)) : \omega \in \mathbb{C}/(\omega_1^z\mathbb{Z} + \omega_2^z\mathbb{Z})\right\}$.
  Fonctions elliptiques de Weierstrass : $\wp(\omega;\omega_1^z,\omega_2^z)$, $\wp'(\omega;\omega_1^z,\omega_2^z)$.
- Les courbes $\mathcal{M}_z = \mathcal{M}_z^+ \cup \mathcal{M}_z^-$ et $\widetilde{\mathcal{M}}_z = \widetilde{\mathcal{M}}_z^+ \cup \widetilde{\mathcal{M}}_z^-$ sont simples.
- Expression explicite des fonctions de conformal gluing.



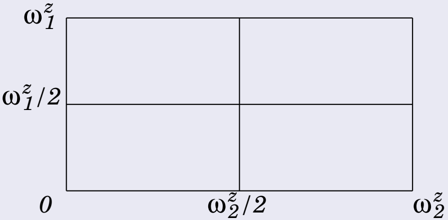
$\mathcal{K}_z = \left\{(u,v) \in \mathbb{C}^2 : v^2 = 4u^3 - g_2^z u - g_3^z\right\}$.

Uniformisation *(pour toute marche)*

x est première coordonnée de $\mathcal{K}_z$, où :

$\mathcal{K}_z = \left\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : K(x,y,z) = \sum_{(i,j)\in\mathcal{S}} x^i y^j - 1/z = 0\right\}.$

- $\mathcal{K}_z \cong \mathbb{C}/(\omega_1^z\mathbb{Z} + \omega_2^z\mathbb{Z})$.
- $\mathcal{K}_z = \left\{(x(\omega,z), y(\omega,z)) : \omega \in \mathbb{C}/(\omega_1^z\mathbb{Z} + \omega_2^z\mathbb{Z})\right\}$.
  Fonctions elliptiques de Weierstrass : $\wp(\omega;\omega_1^z,\omega_2^z)$, $\wp'(\omega;\omega_1^z,\omega_2^z)$.
- Les courbes $\mathcal{M}_z = \mathcal{M}_z^+ \cup \mathcal{M}_z^-$ et $\widetilde{\mathcal{M}}_z = \widetilde{\mathcal{M}}_z^+ \cup \widetilde{\mathcal{M}}_z^-$ sont simples.
- Expression explicite des fonctions de conformal gluing.



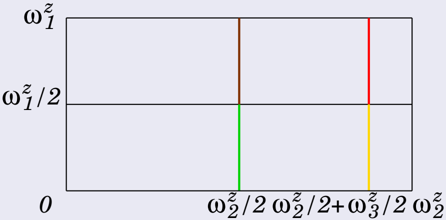
$\mathcal{K}_z = \left\{(u,v) \in \mathbb{C}^2 : v^2 = 4u^3 - g_2^z u - g_3^z\right\}.$

Uniformisation *(pour toute marche)*

x est première coordonnée de $\mathcal{K}_z$, où :

$\mathcal{K}_z = \left\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : K(x, y, z) = \sum_{(i,j)\in\mathcal{S}} x^i y^j - 1/z = 0\right\}$.

- $\mathcal{K}_z \cong \mathbb{C}/(\omega_1^z\mathbb{Z} + \omega_2^z\mathbb{Z})$.
- $\mathcal{K}_z = \left\{(x(\omega, z), y(\omega, z)) : \omega \in \mathbb{C}/(\omega_1^z\mathbb{Z} + \omega_2^z\mathbb{Z})\right\}$.
  Fonctions elliptiques de Weierstrass : $\wp(\omega; \omega_1^z, \omega_2^z)$, $\wp'(\omega; \omega_1^z, \omega_2^z)$.
- Les courbes $\mathcal{M}_z = \mathcal{M}_z^+ \cup \mathcal{M}_z^-$ et $\widetilde{\mathcal{M}}_z = \widetilde{\mathcal{M}}_z^+ \cup \widetilde{\mathcal{M}}_z^-$ sont simples.
- Expression explicite des fonctions de conformal gluing w et $\widetilde{w}$.



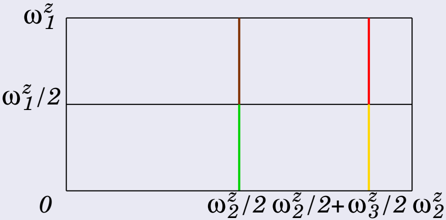
$\mathcal{K}_z = \left\{(u, v) \in \mathbb{C}^2 : v^2 = 4u^3 - g_2^z u - g_3^z\right\}$.

Uniformisation *(pour toute marche)*

x est première coordonnée de $\mathcal{K}_z$, où :

$$\mathcal{K}_z = \left\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : K(x,y,z) = \sum_{(i,j)\in\mathcal{S}} x^i y^j - 1/z = 0\right\}.$$

- $\mathcal{K}_z \cong \mathbb{C}/(\omega_1^z\mathbb{Z} + \omega_2^z\mathbb{Z})$.
- $\mathcal{K}_z = \left\{(x(\omega,z), y(\omega,z)) : \omega \in \mathbb{C}/(\omega_1^z\mathbb{Z} + \omega_2^z\mathbb{Z})\right\}$.
  Fonctions elliptiques de Weierstrass : $\wp(\omega;\omega_1^z,\omega_2^z)$, $\wp'(\omega;\omega_1^z,\omega_2^z)$.
- Les courbes $\mathcal{M}_z = \mathcal{M}_z^+ \cup \mathcal{M}_z^-$ et $\widetilde{\mathcal{M}}_z = \widetilde{\mathcal{M}}_z^+ \cup \widetilde{\mathcal{M}}_z^-$ sont simples.
- Expression explicite des fonctions de conformal gluing w et $\widetilde{w}$.



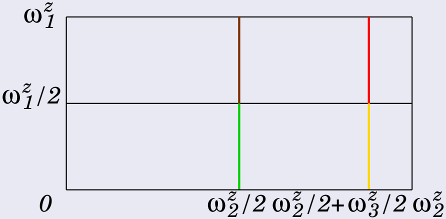
$$\mathcal{K}_z = \left\{(u,v) \in \mathbb{C}^2 : v^2 = 4u^3 - g_2^z u - g_3^z\right\}.$$

Uniformisation *(pour toute marche)*

x est première coordonnée de $\mathcal{K}_z$, où :

$\mathcal{K}_z = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : K(x,y,z) = \sum_{(i,j)\in\mathcal{S}} x^i y^j - 1/z = 0\}$.

- $\mathcal{K}_z \cong \mathbb{C}/(\omega_1^z\mathbb{Z} + \omega_2^z\mathbb{Z})$.
- $\mathcal{K}_z = \{(x(\omega,z), y(\omega,z)) : \omega \in \mathbb{C}/(\omega_1^z\mathbb{Z} + \omega_2^z\mathbb{Z})\}$.
  Fonctions elliptiques de Weierstrass : $\wp(\omega;\omega_1^z,\omega_2^z)$, $\wp'(\omega;\omega_1^z,\omega_2^z)$.
- Les courbes $\mathcal{M}_z = \mathcal{M}_z^+ \cup \mathcal{M}_z^-$ et $\widetilde{\mathcal{M}}_z = \widetilde{\mathcal{M}}_z^+ \cup \widetilde{\mathcal{M}}_z^-$ sont simples.
- Expression explicite des fonctions de conformal gluing w et $\widetilde{w}$.



$\mathcal{K}_z = \{(u,v) \in \mathbb{C}^2 : v^2 = 4u^3 - g_2^z u - g_3^z\}$.

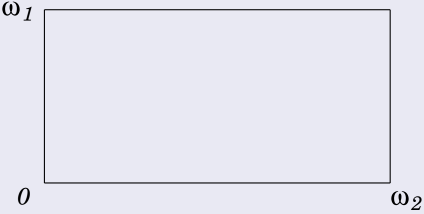
Surface de Riemann de la racine carrée d'un polynôme de degré 3

Soient $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$ et $\mathcal{L} = \{(u, v) \in \mathbb{C}^2 : v^2 = 4u^3 - g_2 u - g_3\}$.

Surface de Riemann de la racine carrée d'un polynôme de degré 3

Soient $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$ et $\mathcal{L} = \{(u, v) \in \mathbb{C}^2 : v^2 = 4u^3 - g_2 u - g_3\}$.

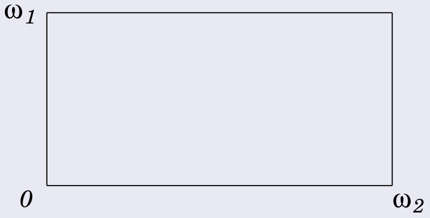
- $\mathcal{L} \cong \mathbb{C}/(\omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z})$.
- $\mathcal{L} = \left\{\left(\wp(\omega;\omega_1,\omega_2), \wp'(\omega;\omega_1,\omega_2)\right) : \omega \in \mathbb{C}/(\omega_1\mathbb{Z}+\omega_2\mathbb{Z})\right\}$.
- Si $e_3 < e_2 < e_1$ sont les racines de $4u^3 - g_2 u - g_3$ alors



Surface de Riemann de la racine carrée d'un polynôme de degré 3

Soient $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$ et $\mathcal{L} = \{(u, v) \in \mathbb{C}^2 : v^2 = 4u^3 - g_2 u - g_3\}$.

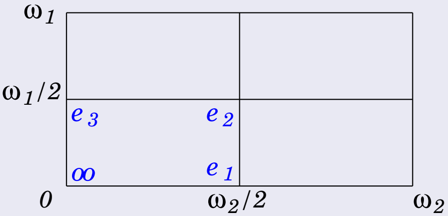
- $\mathcal{L} \cong \mathbb{C}/(\omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z})$.
- $\mathcal{L} = \big\{\big(\wp(\omega;\omega_1,\omega_2), \wp'(\omega;\omega_1,\omega_2)\big) : \omega \in \mathbb{C}/(\omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z})\big\}$.
- Si $e_3 < e_2 < e_1$ sont les racines de $4u^3 - g_2 u - g_3$ alors



Surface de Riemann de la racine carrée d'un polynôme de degré 3

Soient $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$ et $\mathcal{L} = \{(u,v) \in \mathbb{C}^2 : v^2 = 4u^3 - g_2 u - g_3\}$.

- $\mathcal{L} \cong \mathbb{C}/(\omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z})$.
- $\mathcal{L} = \big\{(\wp(\omega;\omega_1,\omega_2), \wp'(\omega;\omega_1,\omega_2)) : \omega \in \mathbb{C}/(\omega_1\mathbb{Z}+\omega_2\mathbb{Z})\big\}$.
- Si $e_3 < e_2 < e_1$ sont les racines de $4u^3 - g_2 u - g_3$ alors



Uniformisation *(pour toute marche)*

Si on note $\sum_{(i,j)\in\mathcal{S}} x^i y^j = \sum_{j=-1}^{1} A_j(x) y^j = \sum_{i=-1}^{1} B_i(y) x^i$, alors on a

$$\sum_{(i,j)\in\mathcal{S}} x^i y^j - 1/z = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[\ A_1(x)y + \ (A_0(x) - 1/z)\right]^2 = \ \left[(A_0(x) - 1/z)^2 - 4A_1(x)A_{-1}(x)\right]$$

Uniformisation *(pour toute marche)*

Si on note $\sum_{(i,j)\in\mathcal{S}} x^i y^j = \sum_{j=-1}^{1} A_j(x) y^j = \sum_{i=-1}^{1} B_i(y) x^i$, alors on a

$$\sum_{(i,j)\in\mathcal{S}} x^i y^j - 1/z = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[x A_1(x) y + x(A_0(x) - 1/z)\right]^2 = x^2 \left[(A_0(x) - 1/z)^2 - 4A_1(x)A_{-1}(x)\right]$$

Uniformisation *(pour toute marche)*

Si on note $\sum_{(i,j)\in\mathcal{S}} x^i y^j = \sum_{j=-1}^{1} A_j(x) y^j = \sum_{i=-1}^{1} B_i(y) x^i$, alors on a

$$\sum_{(i,j)\in\mathcal{S}} x^i y^j - 1/z = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{aligned}\left[xA_1(x)y + x(A_0(x) - 1/z)\right]^2 &= x^2\left[(A_0(x) - 1/z)^2 - 4A_1(x)A_{-1}(x)\right] \\ &= \prod_{i=1}^{4}(x - x_i(z))\end{aligned}$$

Uniformisation *(pour toute marche)*

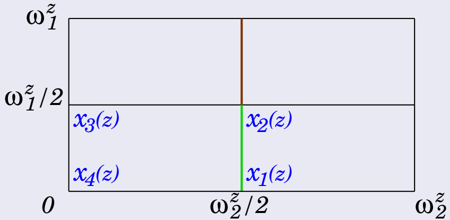
Si on note $\sum_{(i,j)\in\mathcal{S}} x^i y^j = \sum_{j=-1}^{1} A_j(x) y^j = \sum_{i=-1}^{1} B_i(y) x^i$, alors on a

$$\sum_{(i,j)\in\mathcal{S}} x^i y^j - 1/z = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[xA_1(x)y + x(A_0(x) - 1/z)\right]^2 = x^2\left[(A_0(x) - 1/z)^2 - 4A_1(x)A_{-1}(x)\right]$$

$$= \prod_{i=1}^{4}(x - x_i(z))$$



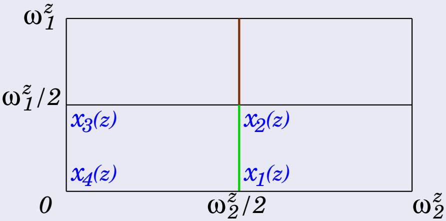
Uniformisation *(pour toute marche)*

Si on note $\sum_{(i,j)\in\mathcal{S}} x^i y^j = \sum_{j=-1}^{1} A_j(x) y^j = \sum_{i=-1}^{1} B_i(y) x^i$, alors on a

$$\sum_{(i,j)\in\mathcal{S}} x^i y^j - 1/z = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{aligned}\left[yB_1(y)x + y(B_0(y) - 1/z)\right]^2 &= y^2\left[(B_0(y) - 1/z)^2 - 4B_1(y)B_{-1}(y)\right]\\ &= -4\prod_{i=1}^{3}(y - y_i(z))\end{aligned}$$



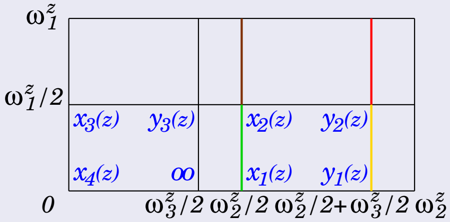
Uniformisation *(pour toute marche)*

Si on note $\sum_{(i,j)\in\mathcal{S}} x^i y^j = \sum_{j=-1}^{1} A_j(x) y^j = \sum_{i=-1}^{1} B_i(y) x^i$, alors on a

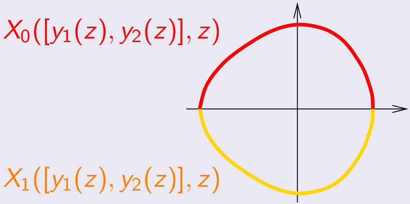
$$\sum_{(i,j)\in\mathcal{S}} x^i y^j - 1/z = 0$$

$$\Updownarrow$$

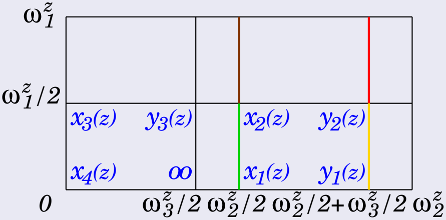
$$\begin{aligned}\left[yB_1(y)x + y(B_0(y) - 1/z)\right]^2 &= y^2\left[(B_0(y) - 1/z)^2 - 4B_1(y)B_{-1}(y)\right]\\ &= -4\prod_{i=1}^{3}(y - y_i(z))\end{aligned}$$



Fonction de conformal gluing *(pour toute marche)*

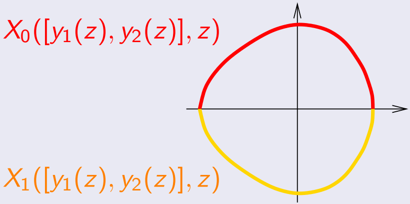


$$w(t, z) = w(\overline{t}, z)$$

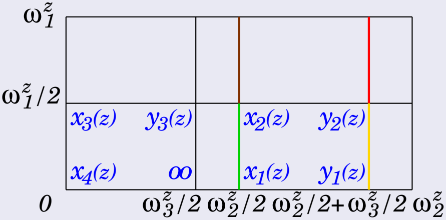


$$w(x(\omega, z), z)$$
$$\|$$

Fonction de conformal gluing *(pour toute marche)*



$$w(t, z) = w(\overline{t}, z)$$



$$w(x(\omega, z), z)$$
$$\|$$
$$\wp(\omega - (\omega_1^z + \omega_2^z)/2; \omega_1^z, \omega_3^z)$$

Algébricité de la fonction de conformal gluing *(pour Gessel)*

- $w(t,z) = \wp\big(x^{-1}(t,z) - (\omega_1^z + \omega_2^z)/2; \omega_1^z, \omega_3^z\big)$,

Algébricité de la fonction de conformal gluing *(pour Gessel)*

- $w(t,z) = \wp\big(x^{-1}(t,z) - (\omega_1^z + \omega_2^z)/2; \omega_1^z, \omega_3^z\big)$,
- $\omega_3^z = (3/4)\omega_2^z$,

Algébricité de la fonction de conformal gluing *(pour Gessel)*

- $w(t,z) = \wp\left(x^{-1}(t,z) - (\omega_1^z + \omega_2^z)/2; \omega_1^z, \omega_3^z\right)$,
- $\omega_3^z = (3/4)\omega_2^z$,
- Théorie des transformations des fonctions elliptiques.

Algébricité de la fonction de conformal gluing *(pour Gessel)*

- $w(t,z) = \wp\big(x^{-1}(t,z) - (\omega_1^z + \omega_2^z)/2; \omega_1^z, \omega_3^z\big)$,
- $\omega_3^z = (3/4)\omega_2^z$,
- Théorie des transformations des fonctions elliptiques.

Preuve de $\omega_3^z = (3/4)\omega_2^z$

Automorphismes $\mathbb{C}^2$ de Gessel : $\psi(x,y) = \left(x, \frac{1}{x^2}\frac{1}{y}\right), \phi(x,y) = \left(\frac{1}{x}\frac{1}{y}, y\right)$.

$$\#\langle \psi, \phi \rangle = 8 \iff \inf\{p \in \mathbb{N}^* : (\psi \circ \phi)^p = \mathrm{id}\} = 4.$$

Automorphismes $\mathbb{C}/(\omega_1^z\mathbb{Z} + \omega_2^z\mathbb{Z})$ de Gessel : $\Psi(\omega) = -\omega, \Phi(\omega) = -\omega + \omega_3^z$.

$$\inf\{p \in \mathbb{N}^* : (\Psi \circ \Phi)^p = \mathrm{id}\} = 4 \iff 4\omega_3^z \in \omega_1^z\mathbb{Z} + \omega_2^z\mathbb{Z}.$$

Donc $4\omega_3^z = 3\omega_2^z$ ou $4\omega_3^z = \omega_2^z$.

Algébricité de la fonction de conformal gluing *(pour Gessel)*

- $w(t,z) = \wp\left(x^{-1}(t,z) - (\omega_1^z + \omega_2^z)/2; \omega_1^z, \omega_3^z\right)$,
- $\omega_3^z = (3/4)\omega_2^z$,
- Théorie des transformations des fonctions elliptiques.

Preuve de $\omega_3^z = (3/4)\omega_2^z$

Automorphismes $\mathbb{C}^2$ de Gessel : $\psi(x,y) = \left(x, \frac{1}{x^2}\frac{1}{y}\right), \phi(x,y) = \left(\frac{1}{x}\frac{1}{y}, y\right)$.

$$\#\langle\psi,\phi\rangle = 8 \iff \inf\{p \in \mathbb{N}^* : (\psi \circ \phi)^p = \mathrm{id}\} = 4.$$

Automorphismes $\mathbb{C}/(\omega_1^z\mathbb{Z} + \omega_2^z\mathbb{Z})$ de Gessel : $\Psi(\omega) = -\omega$, $\Phi(\omega) = -\omega + \omega_3^z$.

$$\inf\{p \in \mathbb{N}^* : (\Psi \circ \Phi)^p = \mathrm{id}\} = 4 \iff 4\omega_3^z \in \omega_1^z\mathbb{Z} + \omega_2^z\mathbb{Z}.$$

Donc $4\omega_3^z = 3\omega_2^z$ ou $4\omega_3^z = \omega_2^z$.

Algébricité de la fonction de conformal gluing *(pour Gessel)*

- $w(t,z) = \wp\big(x^{-1}(t,z) - (\omega_1^z + \omega_2^z)/2; \omega_1^z, \omega_3^z\big)$,
- $\omega_3^z = (3/4)\omega_2^z$,
- Théorie des transformations des fonctions elliptiques.

Preuve de $\omega_3^z = (3/4)\omega_2^z$

Automorphismes $\mathbb{C}^2$ de Gessel : $\psi(x,y) = \left(x, \frac{1}{x^2}\frac{1}{y}\right), \phi(x,y) = \left(\frac{1}{x}\frac{1}{y}, y\right)$.

$$\#\langle \psi, \phi \rangle = 8 \iff \inf\{p \in \mathbb{N}^* : (\psi \circ \phi)^p = \mathrm{id}\} = 4.$$

Automorphismes $\mathbb{C}/(\omega_1^z\mathbb{Z} + \omega_2^z\mathbb{Z})$ de Gessel : $\Psi(\omega) = -\omega$, $\Phi(\omega) = -\omega + \omega_3^z$.

$$\inf\{p \in \mathbb{N}^* : (\Psi \circ \Phi)^p = \mathrm{id}\} = 4 \iff 4\omega_3^z \in \omega_1^z\mathbb{Z} + \omega_2^z\mathbb{Z}.$$

Donc $4\omega_3^z = 3\omega_2^z$ ou $4\omega_3^z = \omega_2^z$.

Algébricité de la fonction de conformal gluing *(pour Gessel)*

- $w(t,z) = \wp(x^{-1}(t,z) - (\omega_1^z + \omega_2^z)/2; \omega_1^z, \omega_3^z)$,
- $\omega_3^z = (3/4)\omega_2^z$,
- Théorie des transformations des fonctions elliptiques.

Preuve de $\omega_3^z = (3/4)\omega_2^z$

Automorphismes $\mathbb{C}^2$ de Gessel : $\psi(x,y) = \left(x, \frac{1}{x^2}\frac{1}{y}\right), \phi(x,y) = \left(\frac{1}{x}\frac{1}{y}, y\right)$.

$$\#\langle\psi,\phi\rangle = 8 \iff \inf\{p \in \mathbb{N}^* : (\psi\circ\phi)^p = \mathrm{id}\} = 4.$$

Automorphismes $\mathbb{C}/(\omega_1^z\mathbb{Z}+\omega_2^z\mathbb{Z})$ de Gessel : $\Psi(\omega) = -\omega, \Phi(\omega) = -\omega + \omega_3^z$.

$$\inf\{p \in \mathbb{N}^* : (\Psi\circ\Phi)^p = \mathrm{id}\} = 4 \iff 4\omega_3^z \in \omega_1^z\mathbb{Z} + \omega_2^z\mathbb{Z}.$$

Donc $4\omega_3^z = 3\omega_2^z$ ou $4\omega_3^z = \omega_2^z$.

Algébricité de la fonction de conformal gluing *(pour Gessel)*

- $w(t,z) = \wp\big(x^{-1}(t,z) - (\omega_1^z + \omega_2^z)/2; \omega_1^z, \omega_3^z\big)$,
- $\omega_3^z = (3/4)\omega_2^z$,
- Théorie des transformations des fonctions elliptiques.

Preuve de $\omega_3^z = (3/4)\omega_2^z$

Automorphismes $\mathbb{C}^2$ de Gessel : $\psi(x,y) = \left(x, \frac{1}{x^2}\frac{1}{y}\right), \phi(x,y) = \left(\frac{1}{x}\frac{1}{y}, y\right)$.

$$\#\langle\psi,\phi\rangle = 8 \iff \inf\{p \in \mathbb{N}^* : (\psi \circ \phi)^p = \mathrm{id}\} = 4.$$

Automorphismes $\mathbb{C}/(\omega_1^z\mathbb{Z} + \omega_2^z\mathbb{Z})$ de Gessel : $\Psi(\omega) = -\omega, \Phi(\omega) = -\omega + \omega_3^z$.

$$\inf\{p \in \mathbb{N}^* : (\Psi \circ \Phi)^p = \mathrm{id}\} = 4 \iff 4\omega_3^z \in \omega_1^z\mathbb{Z} + \omega_2^z\mathbb{Z}.$$

Donc $4\omega_3^z = 3\omega_2^z$ ou $4\omega_3^z = \omega_2^z$.

Algébricité de la fonction de conformal gluing *(pour Gessel)*

- $w(t,z) = \wp\big(x^{-1}(t,z) - (\omega_1^z + \omega_2^z)/2; \omega_1^z, \omega_3^z\big)$,
- $\omega_3^z = (3/4)\omega_2^z$,
- Théorie des transformations des fonctions elliptiques.

Preuve de $\omega_3^z = (3/4)\omega_2^z$

Automorphismes $\mathbb{C}^2$ de Gessel : $\psi(x,y) = \left(x, \frac{1}{x^2}\frac{1}{y}\right), \phi(x,y) = \left(\frac{1}{x}\frac{1}{y}, y\right)$.

$$\#\langle\psi,\phi\rangle = 8 \iff \inf\{p \in \mathbb{N}^* : (\psi\circ\phi)^p = \mathrm{id}\} = 4.$$

Automorphismes $\mathbb{C}/(\omega_1^z\mathbb{Z} + \omega_2^z\mathbb{Z})$ de Gessel : $\Psi(\omega) = -\omega, \Phi(\omega) = -\omega + \omega_3^z$.

$$\inf\{p \in \mathbb{N}^* : (\Psi\circ\Phi)^p = \mathrm{id}\} = 4 \iff 4\omega_3^z \in \omega_1^z\mathbb{Z} + \omega_2^z\mathbb{Z}.$$

Donc $4\omega_3^z = 3\omega_2^z$.

Généralisations

△ Expression explicite pour tous les groupes.

Généralisations

- △ Expression explicite pour tous les groupes.
- △ Fonctions génératrices holonomes ? (groupe infini : $w, \widetilde{w}$ non holonomes)

Généralisations

- △ Expression explicite pour tous les groupes.
- △ Fonctions génératrices holonomes ? (groupe infini : $w, \widetilde{w}$ non holonomes)
- △ Chemins avec poids.

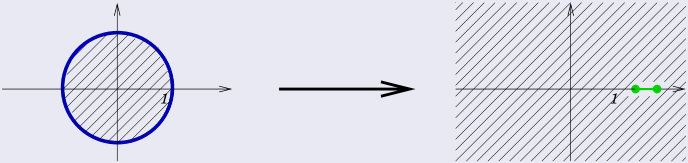
Généralisations

- △ Expression explicite pour tous les groupes.
- △ Fonctions génératrices holonomes ? (groupe infini : $w, \widetilde{w}$ non holonomes)
- △ Chemins avec poids.
- △ Sauts plus généraux.

Généralisations

- △ Expression explicite pour tous les groupes.
- △ Fonctions génératrices holonomes ? (groupe infini : $w, \widetilde{w}$ non holonomes)
- △ Chemins avec poids.
- △ Sauts plus généraux.
- △ Dimension supérieure.

Prolongement des fonctions génératrices (1/2)



Prolongement des fonctions génératrices (2/2)