

Nœuds toriques et séries de Stieltjes

P.- V. Koseleff

UPMC-Paris 6 Salsa INRIA

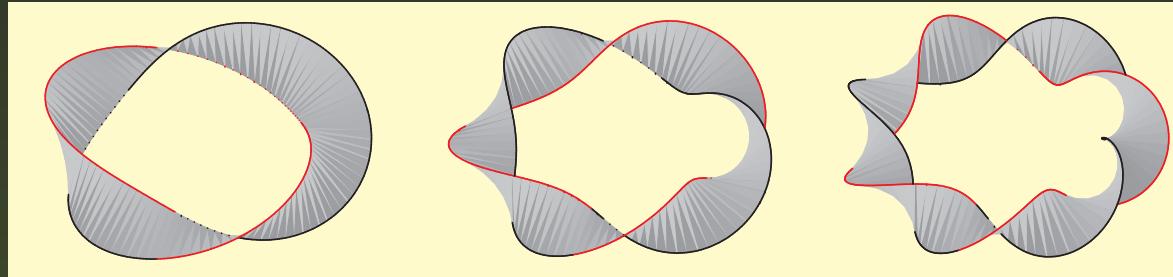
Travail commun avec **D. Pecker**

Nœuds toriques

- Nœud torique : $K_{2,n}$ bord d'une bande de Moebius.

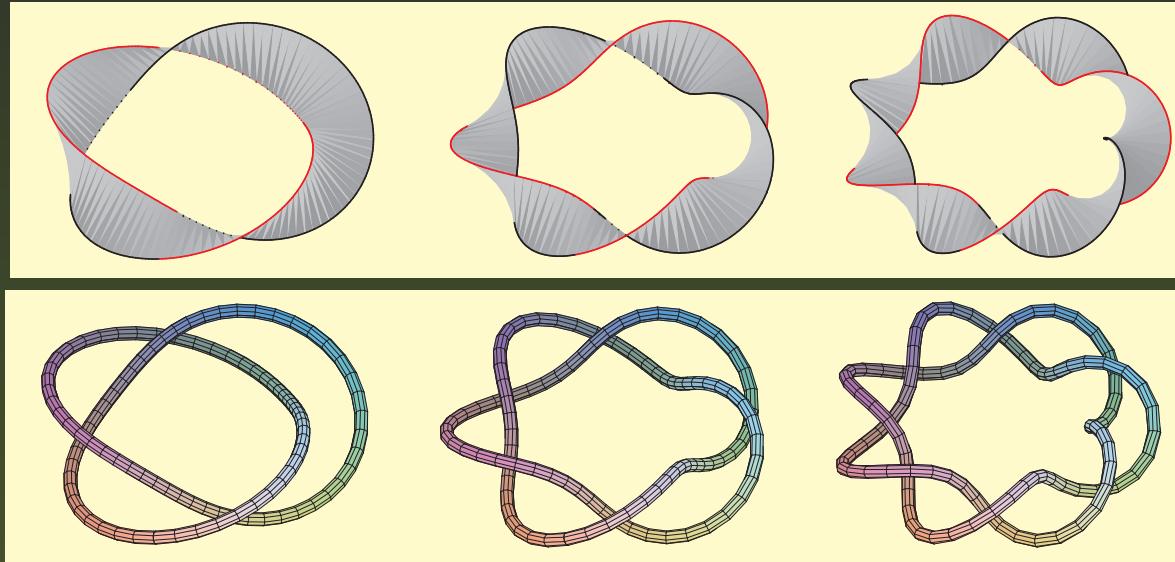
Nœuds toriques

- Nœud torique : $K_{2,n}$ bord d'une bande de Moebius.



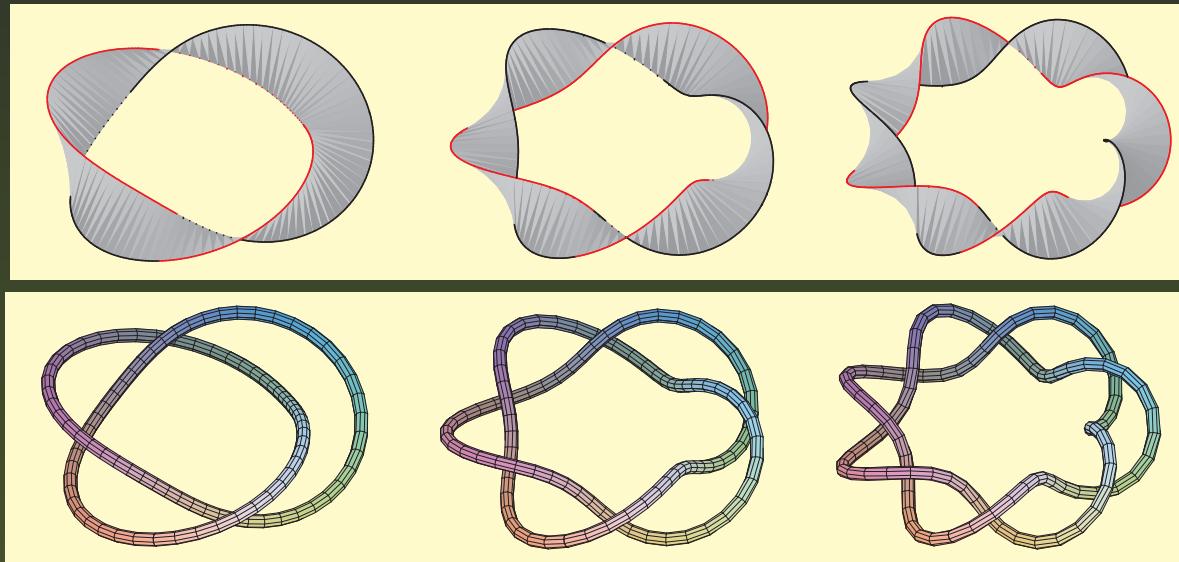
Nœuds toriques

■ Nœud torique : $K_{2,n}$ bord d'une bande de Moebius.



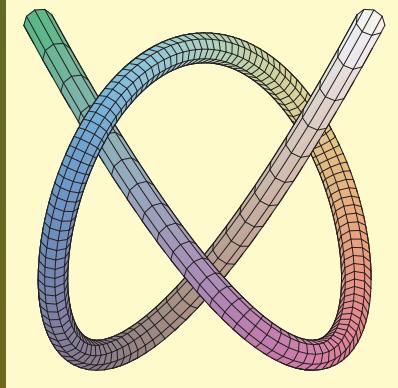
Nœuds toriques

- Nœud torique : $K_{2,n}$ bord d'une bande de Moebius.



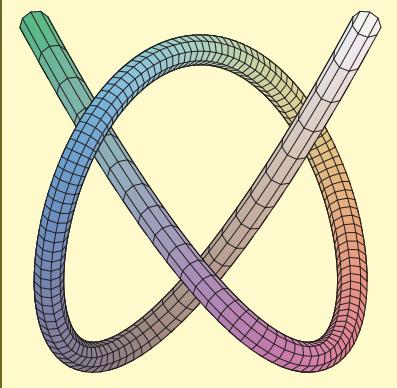
- Nœud torique polynomial réalisé par une courbe polynomiale de degrés (n_1, n_2, n_3) .

Nœuds toriques polynomiaux



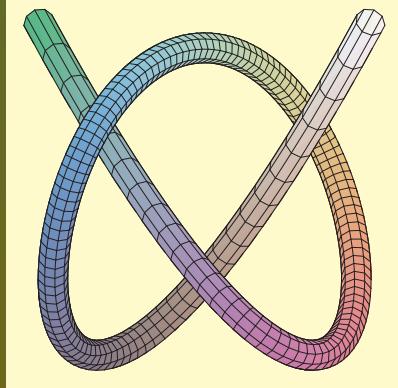
■ Nœud de trèfle : courbe de degré $(3, 4, 5)$.

Nœuds toriques polynomiaux



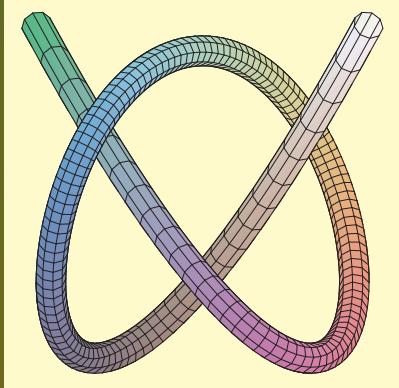
- Nœud de trèfle : courbe de degré $(3, 4, 5)$.
- Tout nœud non compact peut être obtenu par une courbe polynomiale (Vassiliev, 1990)

Nœuds toriques polynomiaux



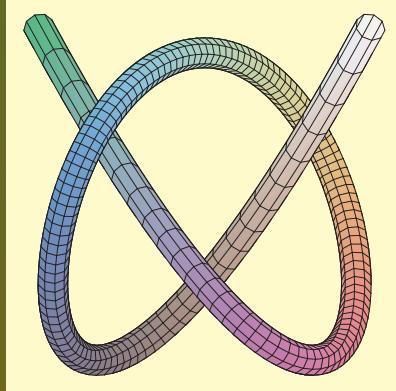
- Nœud de trèfle : courbe de degré $(3, 4, 5)$.
- Tout nœud non compact peut être obtenu par une courbe polynomiale (Vassiliev, 1990)
- Représentations simples du nœud de trèfle (Shastri, 1992)

Nœuds toriques polynomiaux



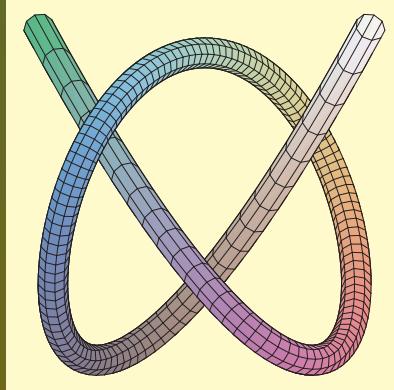
- Nœud de trèfle : courbe de degré (3,4,5).
- Tout nœud non compact peut être obtenu par une courbe polynomiale (Vassiliev, 1990)
- Représentations simples du nœud de trèfle (Shastri, 1992)
- Nœuds toriques K_n peuvent être réalisés par une courbe de degré $(3, 2n - 2, 2n - 1)$ (Ranjan, Shukla, 1996)

Nœuds toriques polynomiaux



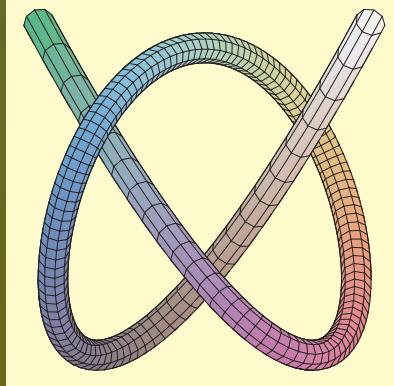
- Nœud de trèfle : courbe de degré (3,4,5).
- Tout nœud non compact peut être obtenu par une courbe polynomiale (Vassiliev, 1990)
- Représentations simples du nœud de trèfle (Shastri, 1992)
- Nœuds toriques K_n peuvent être réalisés par une courbe de degré $(3, 2n - 2, 2n - 1)$ (Ranjan, Shukla, 1996)
- Est-ce possible de réaliser un nœud torique K_n avec une courbe de degrés $(3, n + 1, m)$? (Mishra, 2000)

Nœuds toriques polynomiaux



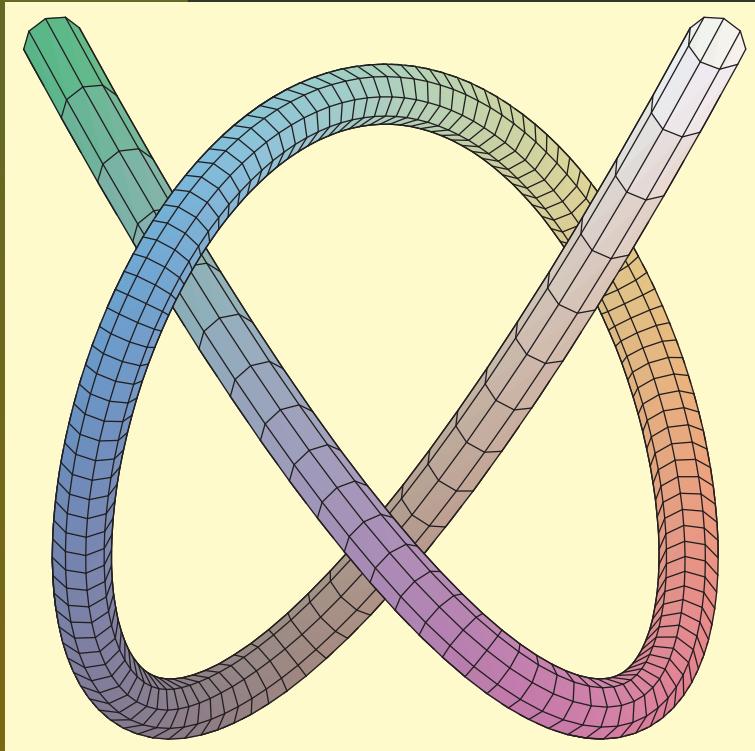
- Nœud de trèfle : courbe de degré $(3, 4, 5)$.
- Tout nœud non compact peut être obtenu par une courbe polynomiale (Vassiliev, 1990)
- Représentations simples du nœud de trèfle (Shastri, 1992)
- Nœuds toriques K_n peuvent être réalisés par une courbe de degré $(3, 2n - 2, 2n - 1)$ (Ranjan, Shukla, 1996)
- Est-ce possible de réaliser un nœud torique K_n avec une courbe de degrés $(3, n + 1, m)$? (Mishra, 2000)
- **Résultat (KP08).** — Si $n > 3$, c'est impossible.

Nœuds toriques polynomiaux

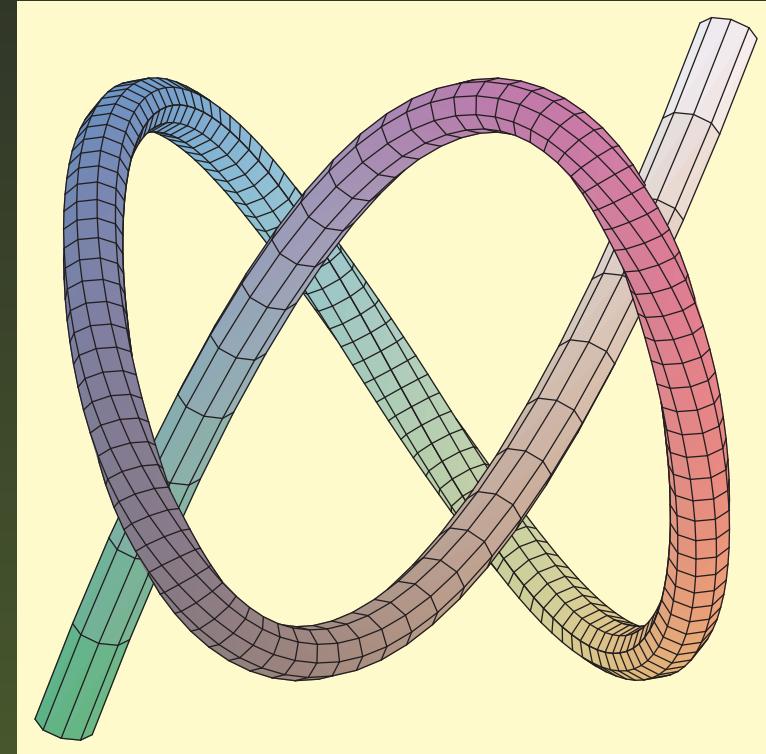
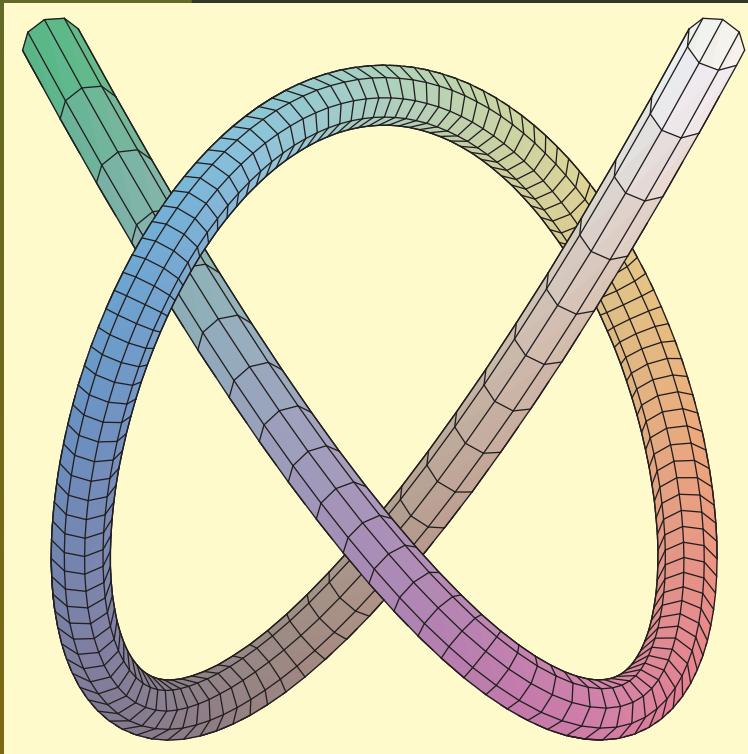


- Nœud de trèfle : courbe de degré $(3, 4, 5)$.
- Tout nœud non compact peut être obtenu par une courbe polynomiale (Vassiliev, 1990)
- Représentations simples du nœud de trèfle (Shastri, 1992)
- Nœuds toriques K_n peuvent être réalisés par une courbe de degré $(3, 2n - 2, 2n - 1)$ (Ranjan, Shukla, 1996)
- Est-ce possible de réaliser un nœud torique K_n avec une courbe de degrés $(3, n + 1, m)$? (Mishra, 2000)
- **Résultat (KP08).** — Si $n > 3$, c'est impossible.
- **Question.** — Quel est le degré minimal lexicographique ?

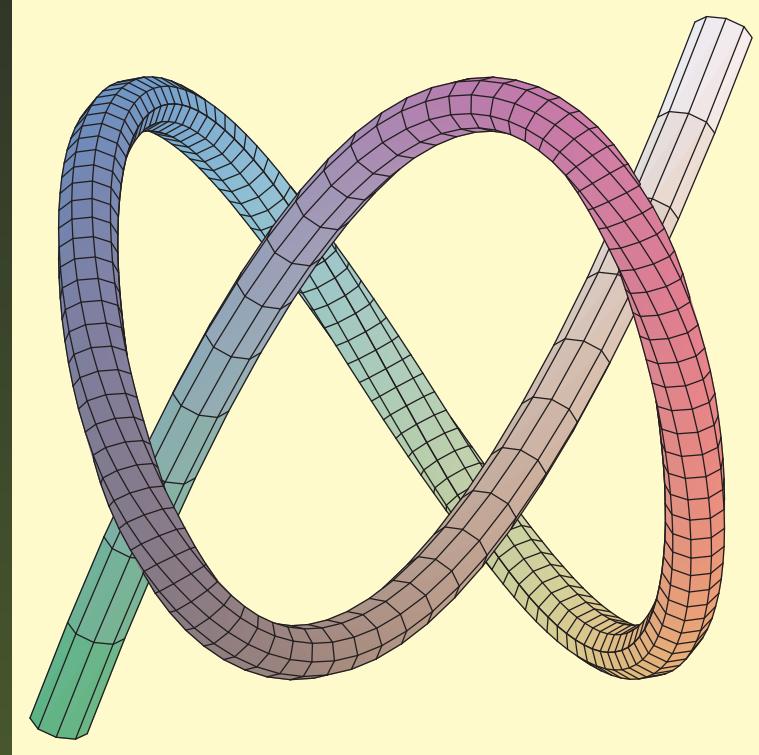
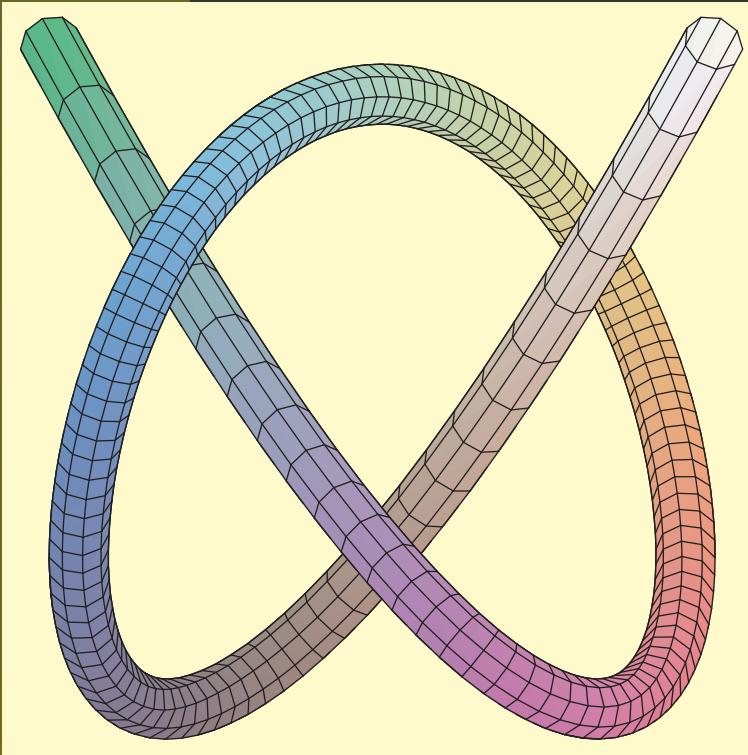
K_3



K_3

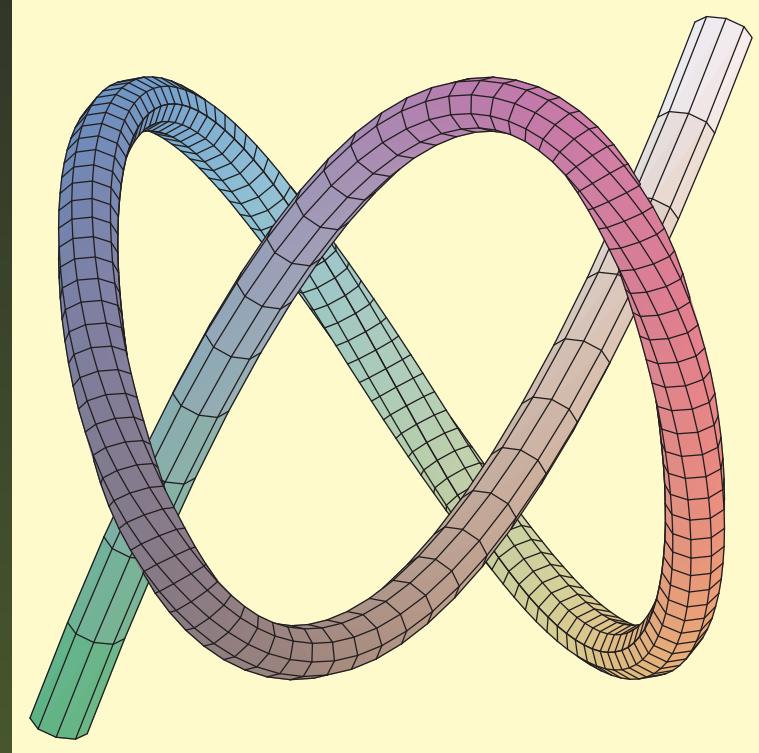
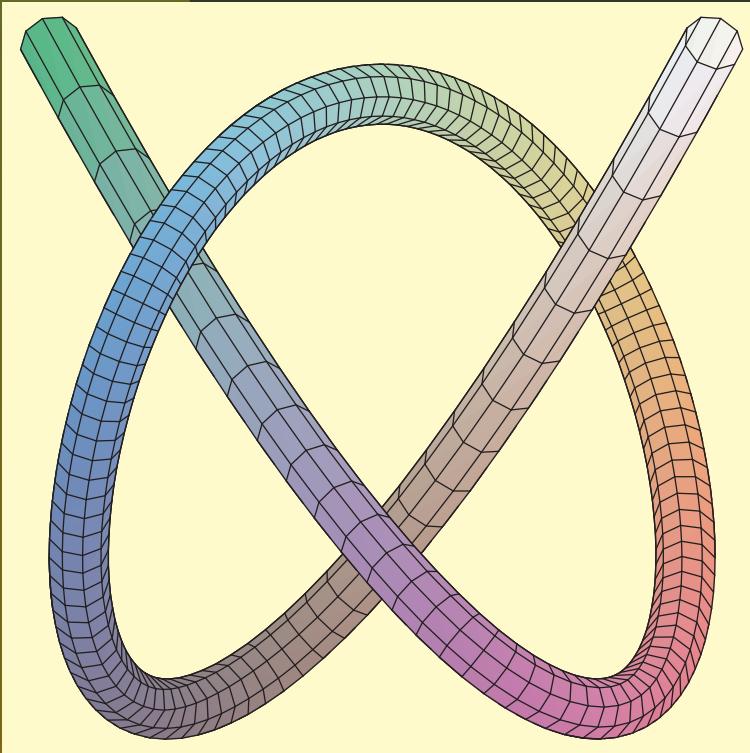


K_3



$$x = t^3 - 3t, \quad y = t^4 - 4t^2 + 2, \quad z = t^5 - 5t^3 + 5t$$

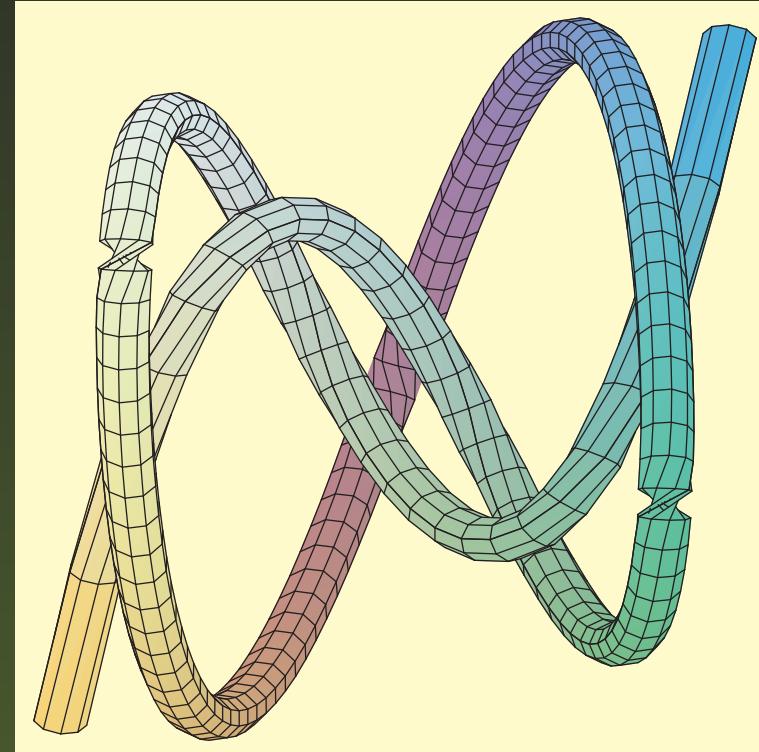
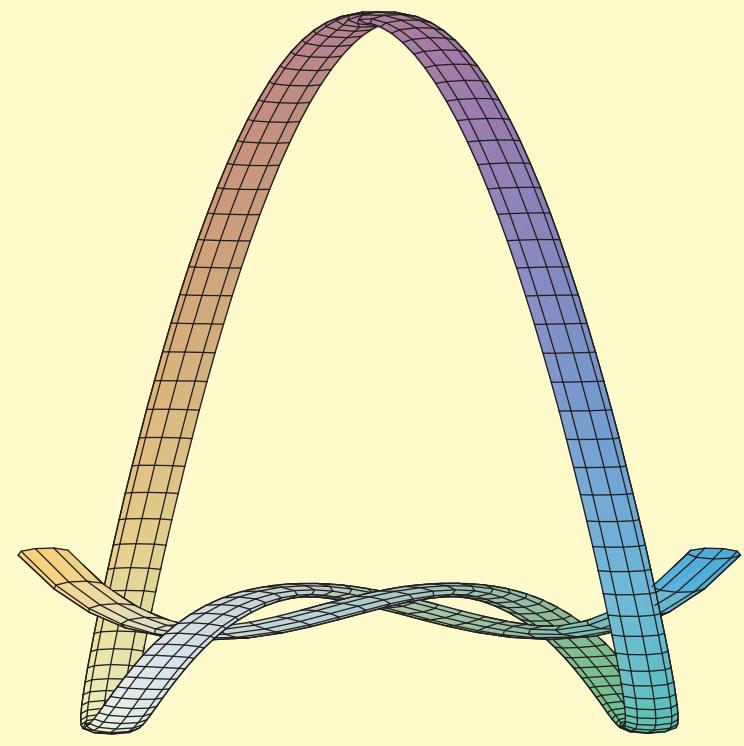
K_3



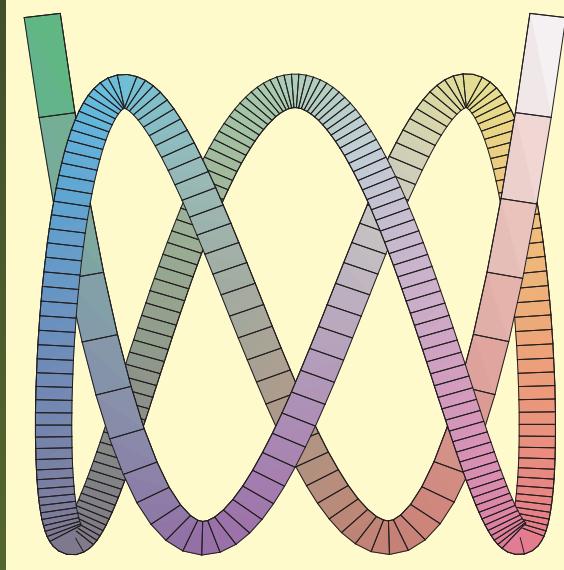
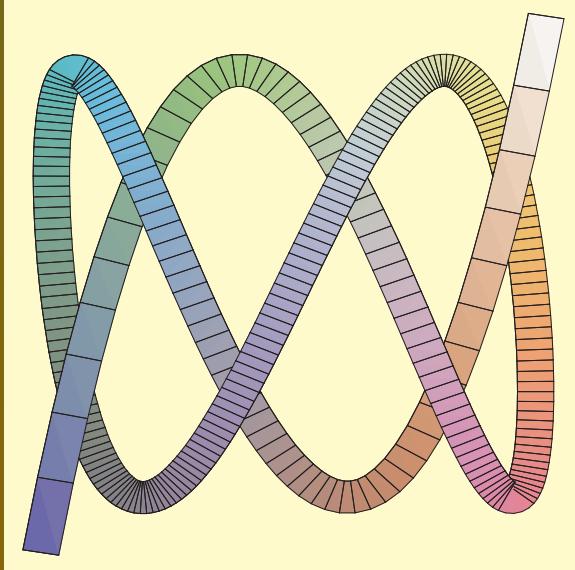
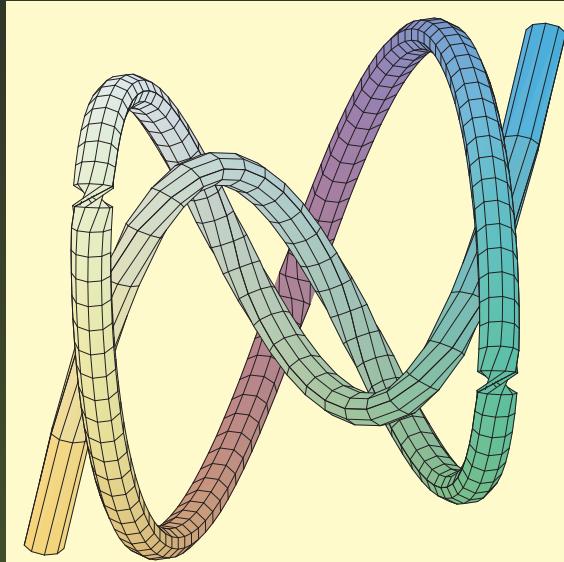
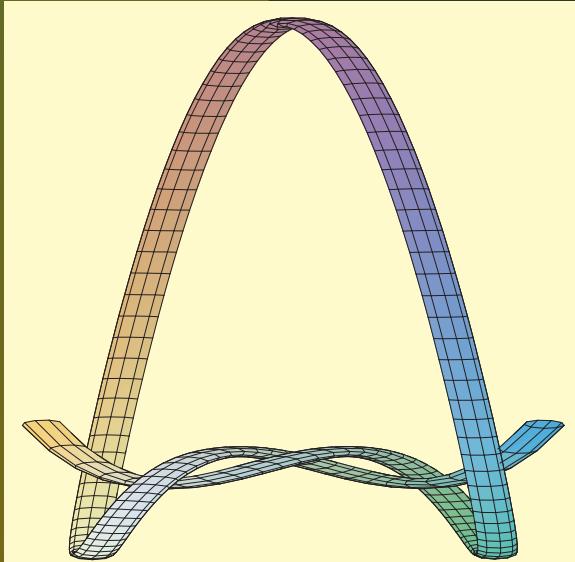
$$x = t^3 - 3t, \quad y = t^4 - 4t^2 + 2, \quad z = t^5 - 5t^3 + 5t$$

$$x = \cos(3\theta), \quad y = \cos(4\theta), \quad z = \cos(5\theta)$$

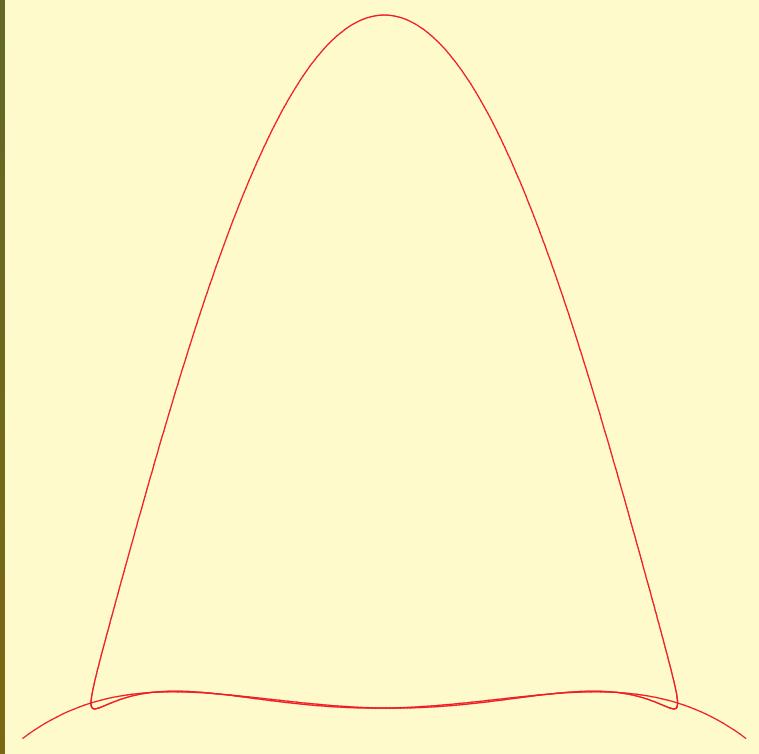
$K_5 : (3, 7, 8)$



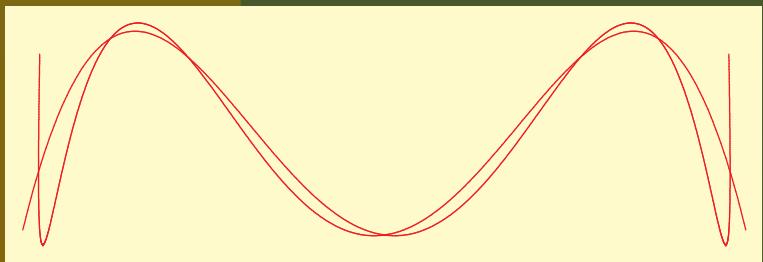
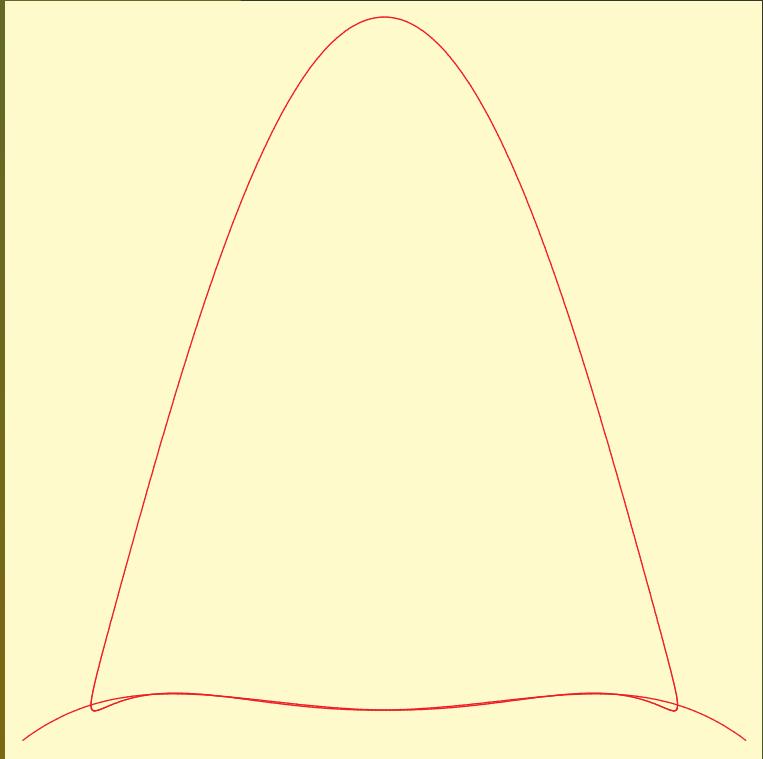
$K_5 : (3, 7, 8)$



$K_7 : (3, 10, 11)$

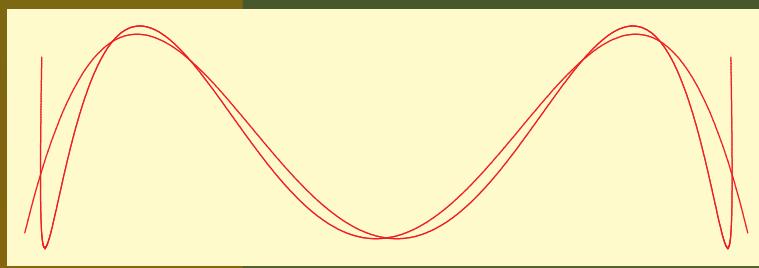
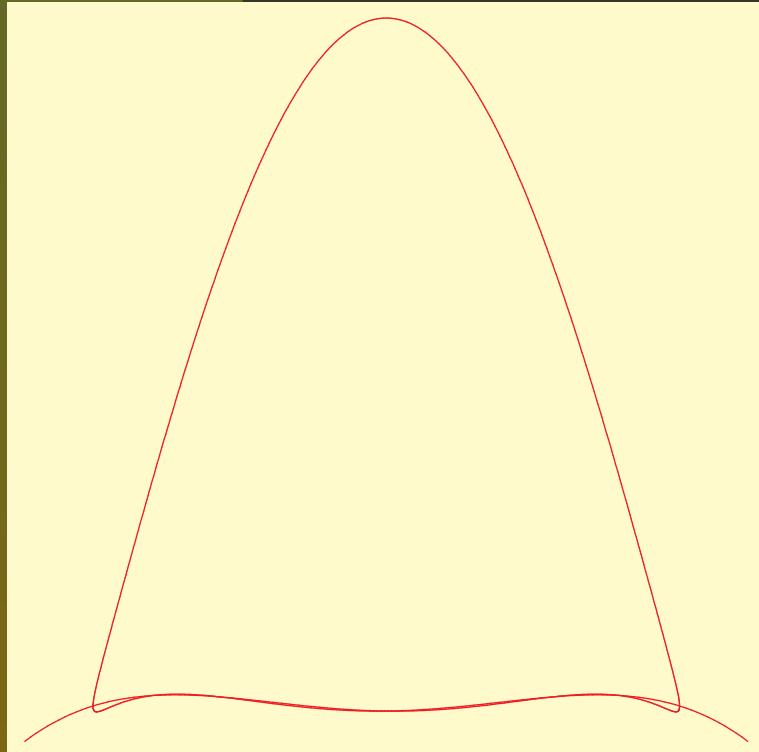


$K_7 : (3, 10, 11)$

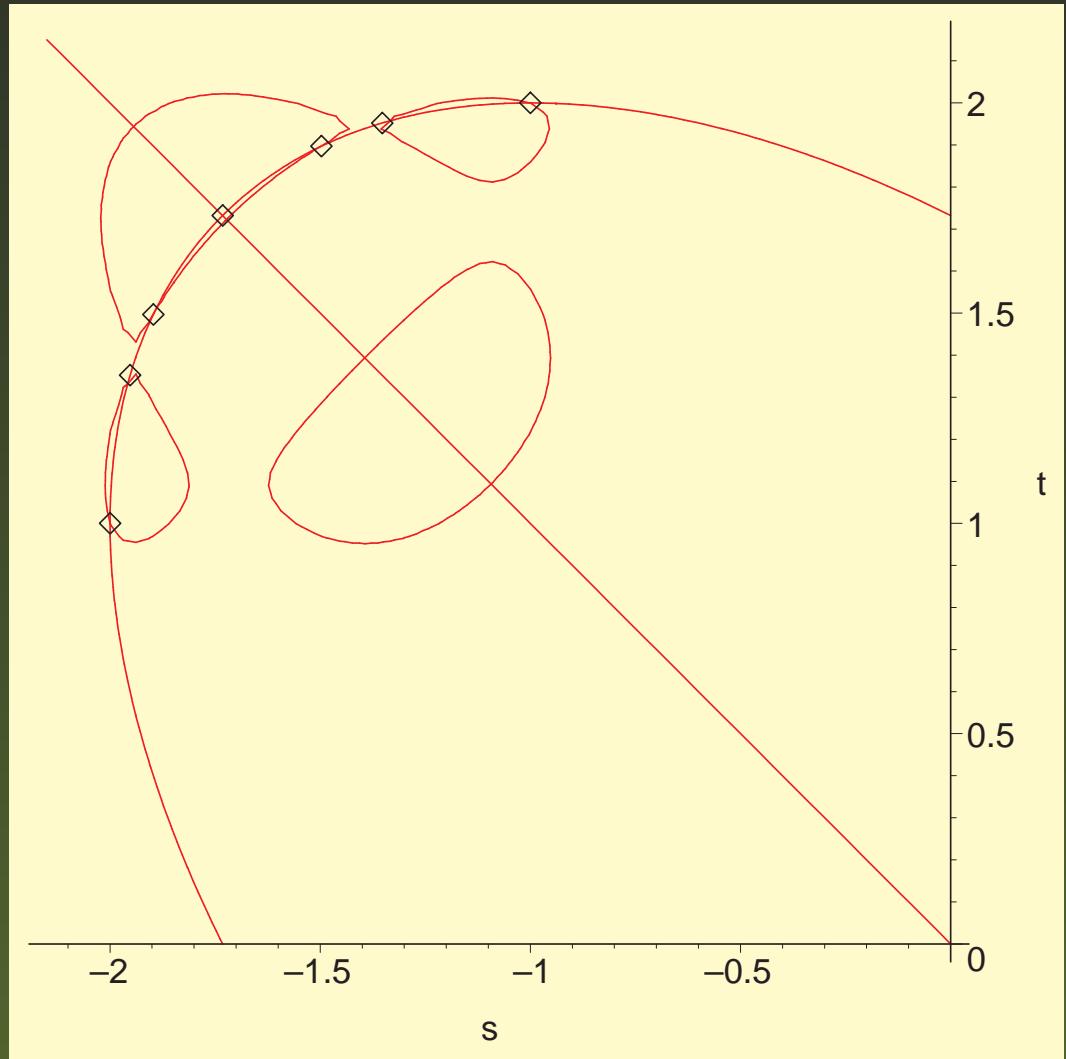


Zoom

$K_7 : (3, 10, 11)$

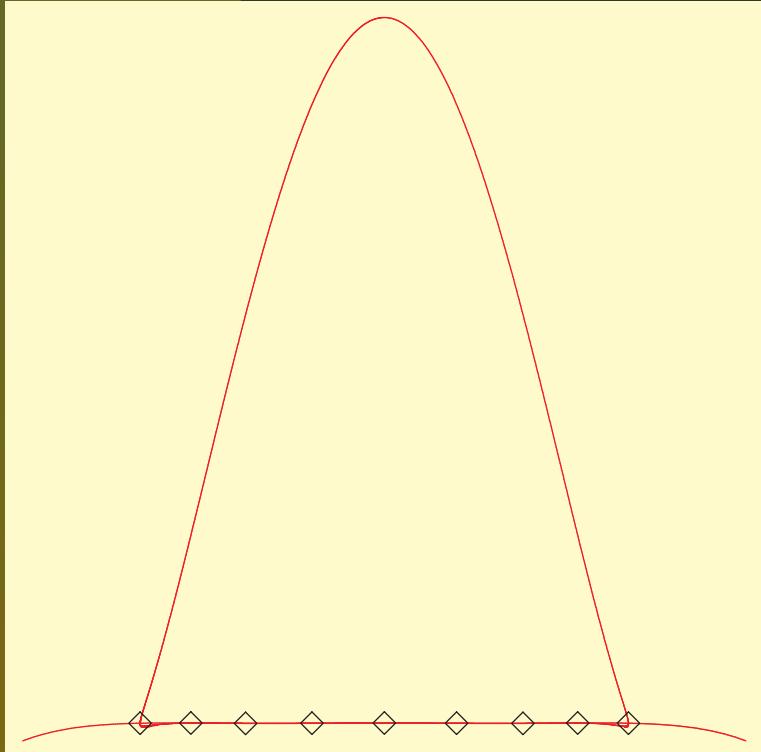


Zoom



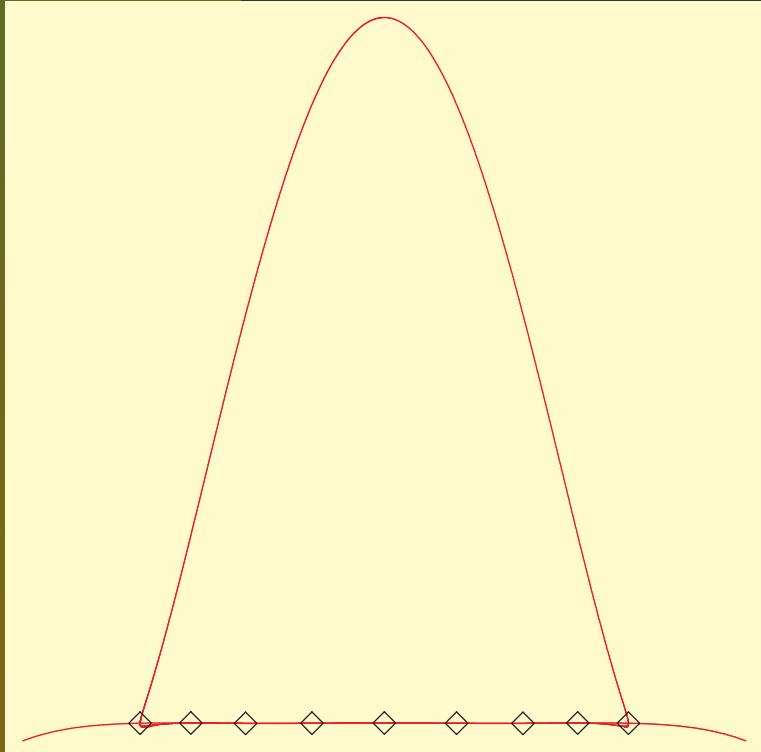
Configuration des paramètres

$K_9 : (3, 13, 14)$

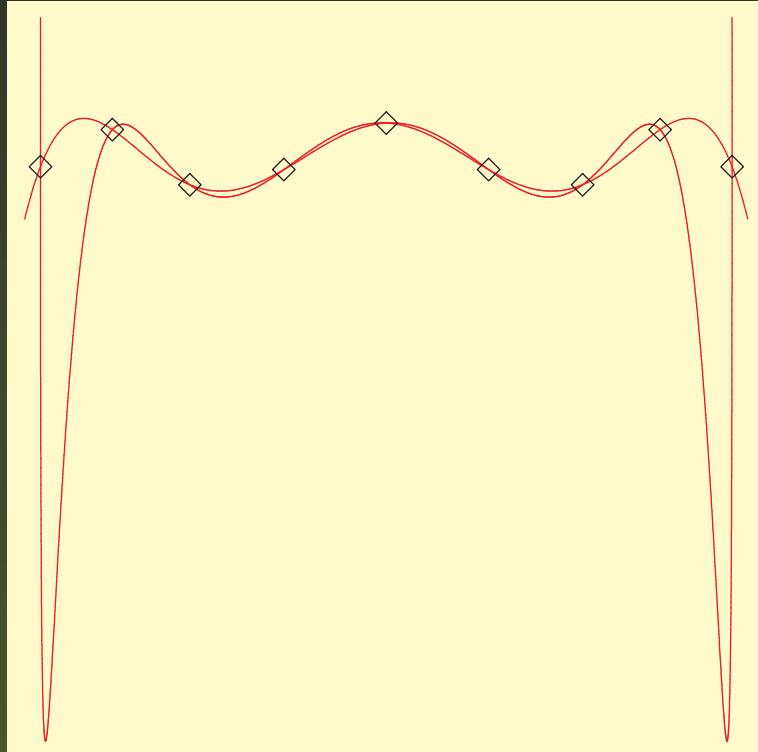


Vue de dessous

$K_9 : (3, 13, 14)$



Vue de dessous



zoom

Résultats

- $K_3 : (3, 4, 5)$.
- $K_5 : (3, 7, 8)$.
- $K_7 : (3, 10, 11)$.
- $K_9 : (3, 13, 14)$.

Résultats

- $K_3 : (3, 4, 5)$.
 - $K_5 : (3, 7, 8)$.
 - $K_7 : (3, 10, 11)$.
 - $K_9 : (3, 13, 14)$.
- **Résultat.** — Construction une famille de polynômes de degré $(3, 3n + 1, 3n + 2)$ pour le nœud K_{2n+1} .

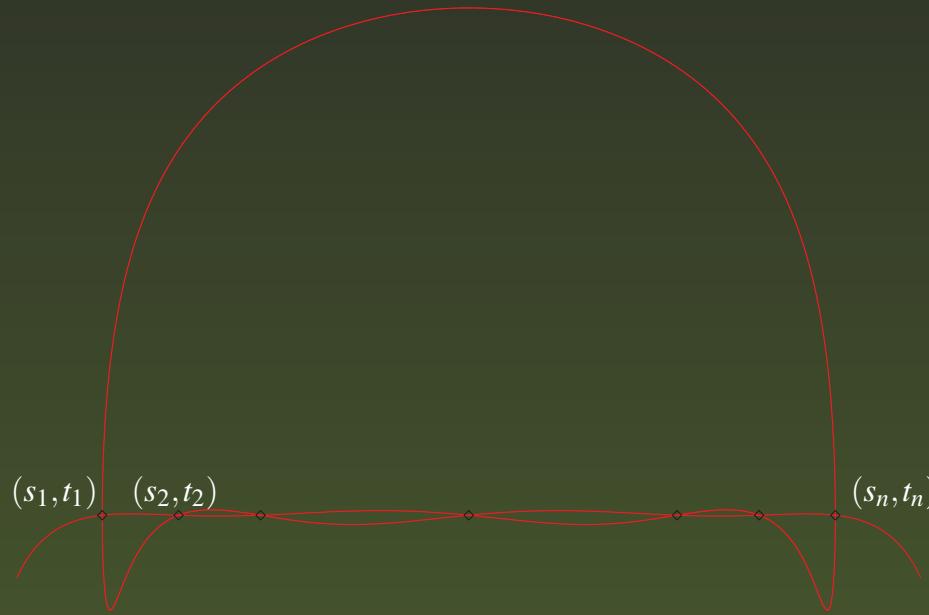
Résultats

- $K_3 : (3, 4, 5)$.
- $K_5 : (3, 7, 8)$.
- $K_7 : (3, 10, 11)$.
- $K_9 : (3, 13, 14)$.

- **Résultat.** — Construction une famille de polynômes de degré $(3, 3n+1, 3n+2)$ pour le nœud K_{2n+1} .

- **Question.** — Ces degrés sont-ils minimaux ?

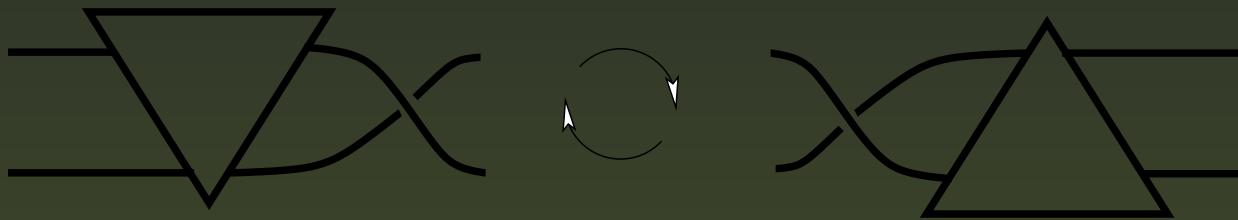
Diagramme minimal



$$\mathcal{C}(t) = (x(t), y(t)), \quad \mathcal{C}(s_i) = \mathcal{C}(t_i), \quad s_1 < \dots < s_n < t_1 < \dots < t_n.$$

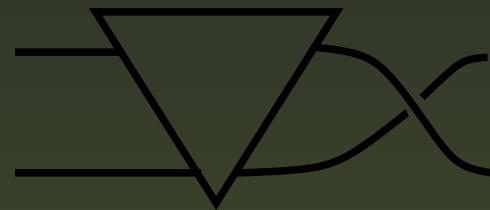
- **Théorème (Murasugi, 1987).** — Un diagramme minimal d'un nœud alterné est alterné.
- **Théorème [Conjecture de Tait (1890)].** — Deux diagrammes alternés du même nœud sont reliés par des “flypes” (1991).

Flypes

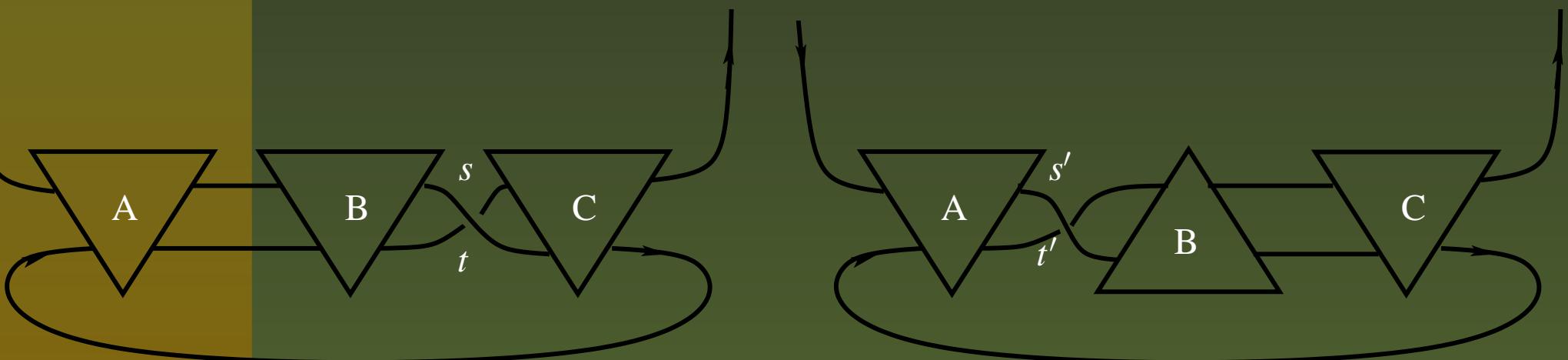


un flype

Flypes



un flype



Flype sur B

Diagramme minimal

- $\mathcal{C}(s_i) = \mathcal{C}(t_i)$, $s_1 < \dots < s_n < t_1 < \dots < t_n$.

Diagramme minimal

- $\mathcal{C}(s_i) = \mathcal{C}(t_i)$, $s_1 < \dots < s_n < t_1 < \dots < t_n$.
- Si $\deg x(t) = 2$ alors $s_i + t_i$ constants.

Diagramme minimal

- $\mathcal{C}(s_i) = \mathcal{C}(t_i)$, $s_1 < \dots < s_n < t_1 < \dots < t_n$.
- Si $\deg x(t) = 2$ alors $s_i + t_i$ constants.
- $\deg x(t) = 3$. On peut prendre $x(t) = t^3 - 3t = T_3(t)$.

Diagramme minimal

- $\mathcal{C}(s_i) = \mathcal{C}(t_i)$, $s_1 < \dots < s_n < t_1 < \dots < t_n$.
- Si $\deg x(t) = 2$ alors $s_i + t_i$ constants.
- $\deg x(t) = 3$. On peut prendre $x(t) = t^3 - 3t = T_3(t)$.
$$\frac{T_3(t) - T_3(s)}{t - s} = 0 \iff \left[\frac{t+s}{2} \right]^2 + \left[\frac{t-s}{2\sqrt{3}} \right]^2 = 1.$$
$$\iff st = (s+t)^2 - 3.$$

Diagramme minimal

- $\mathcal{C}(s_i) = \mathcal{C}(t_i)$, $s_1 < \dots < s_n < t_1 < \dots < t_n$.
- Si $\deg x(t) = 2$ alors $s_i + t_i$ constants.
- $\deg x(t) = 3$. On peut prendre $x(t) = t^3 - 3t = T_3(t)$.
$$\frac{T_3(t) - T_3(s)}{t - s} = 0 \iff \left[\frac{t+s}{2} \right]^2 + \left[\frac{t-s}{2\sqrt{3}} \right]^2 = 1.$$
$$\iff st = (s+t)^2 - 3.$$
- $t = 2\cos(\alpha - \pi/3)$, $s = 2\cos(\alpha + \pi/3)$, $s+t = 2\cos\alpha = u$.

Diagramme minimal

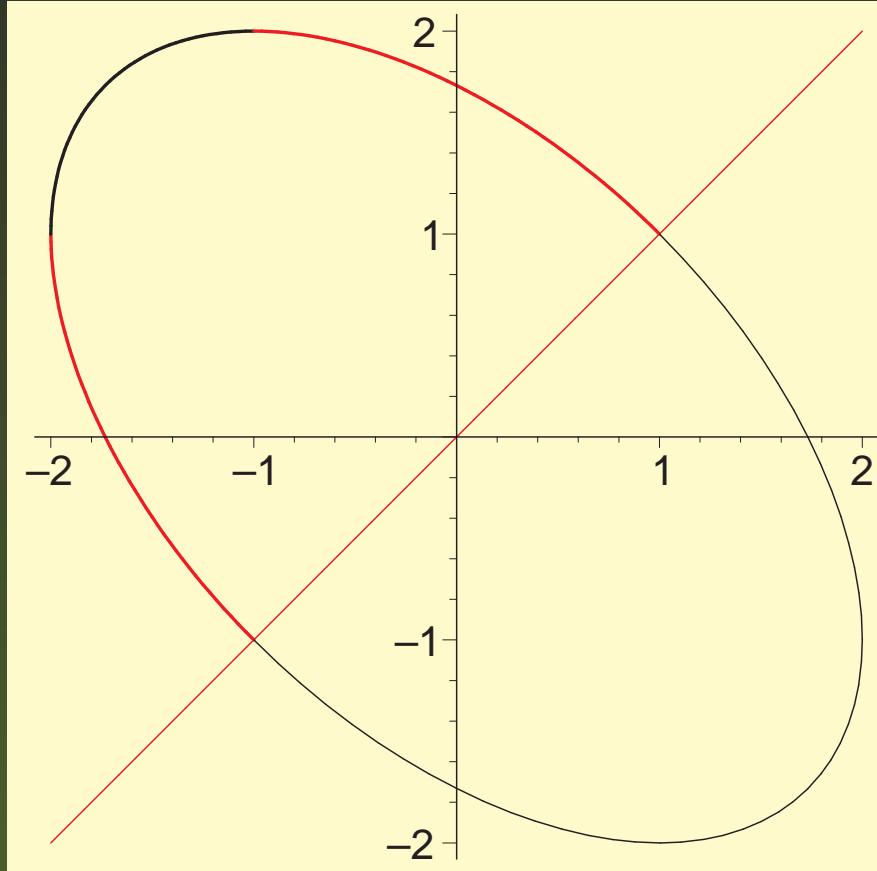
- $\mathcal{C}(s_i) = \mathcal{C}(t_i)$, $s_1 < \dots < s_n < t_1 < \dots < t_n$.
- Si $\deg x(t) = 2$ alors $s_i + t_i$ constants.
- $\deg x(t) = 3$. On peut prendre $x(t) = t^3 - 3t = T_3(t)$.
$$\frac{T_3(t) - T_3(s)}{t - s} = 0 \iff \left[\frac{t+s}{2} \right]^2 + \left[\frac{t-s}{2\sqrt{3}} \right]^2 = 1.$$
$$\iff st = (s+t)^2 - 3.$$
- $t = 2\cos(\alpha - \pi/3)$, $s = 2\cos(\alpha + \pi/3)$, $s+t = 2\cos\alpha = u$.
- $t > s \iff \sin\alpha > 0$

Diagramme minimal

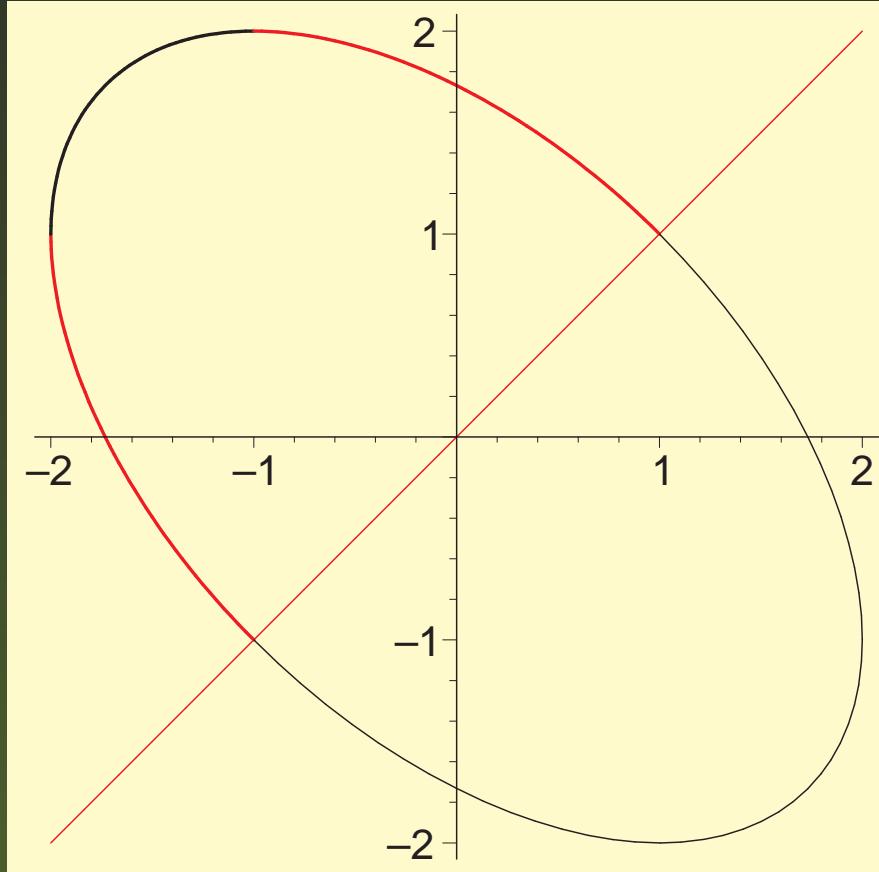
- $\mathcal{C}(s_i) = \mathcal{C}(t_i)$, $s_1 < \dots < s_n < t_1 < \dots < t_n$.
- Si $\deg x(t) = 2$ alors $s_i + t_i$ constants.
- $\deg x(t) = 3$. On peut prendre $x(t) = t^3 - 3t = T_3(t)$.
$$\frac{T_3(t) - T_3(s)}{t - s} = 0 \iff \left[\frac{t+s}{2} \right]^2 + \left[\frac{t-s}{2\sqrt{3}} \right]^2 = 1.$$
$$\iff st = (s+t)^2 - 3.$$
- $t = 2\cos(\alpha - \pi/3)$, $s = 2\cos(\alpha + \pi/3)$, $s+t = 2\cos\alpha = u$.
- $t > s \iff \sin\alpha > 0$
- Intersection d'une ellipse avec une courbe de degré $m-1$:

$$\frac{y(t) - y(s)}{t - s} = R(s+t) = 0.$$

Borne

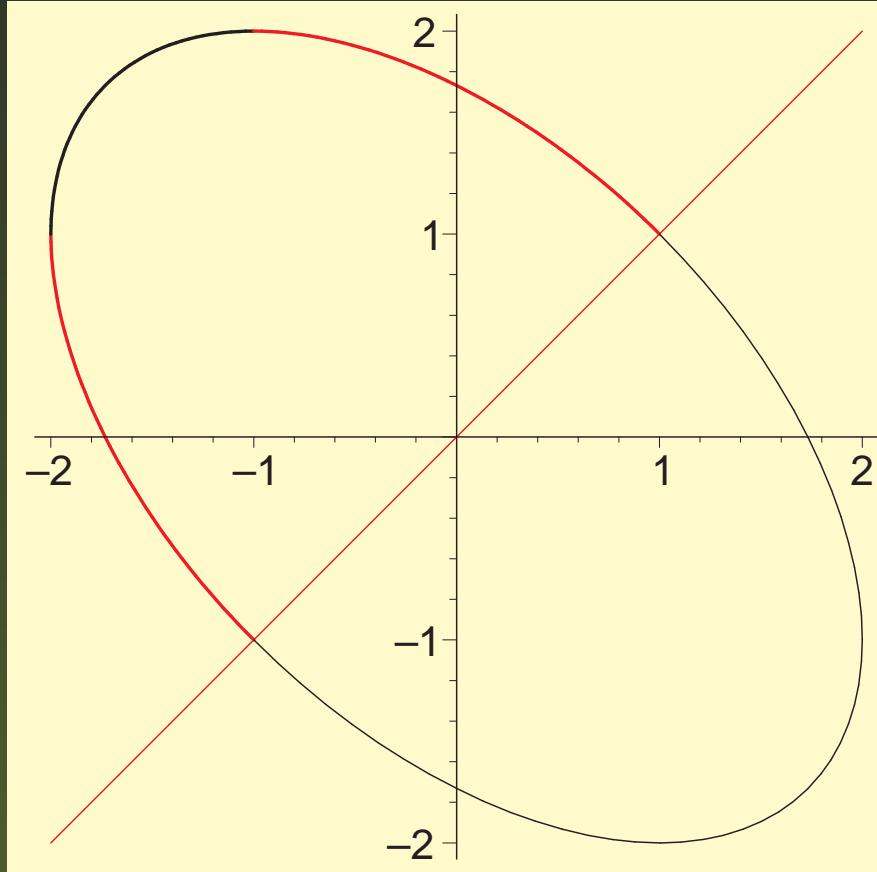


Borne



■ **Borne de Bézout** : $n \leq \frac{1}{2}(\deg x - 1)(\deg y - 1) = m - 1$.

Borne



- **Borne de Bézout** : $n \leq \frac{1}{2}(\deg x - 1)(\deg y - 1) = m - 1$.
- **Résultat (KP08).** — Si $n > 3, m > n + 1$.

Construction

- Base des polynômes de Chebyshev: $t = 2 \cos \theta$

$$T_n(t) = 2 \cos(n\theta), V_n(t) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta}.$$

Construction

- Base des polynômes de Chebyshev: $t = 2 \cos \theta$

$$T_n(t) = 2 \cos(n\theta), V_n(t) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta}.$$

- **Lemme.** — Si $T_3(t) = T_3(s)$ alors

$$\frac{T_k(t) - T_k(s)}{t - s} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{k\pi}{3} V_{k-1}(s+t)$$

Construction

- Base des polynômes de Chebyshev: $t = 2 \cos \theta$

$$T_n(t) = 2 \cos(n\theta), V_n(t) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta}.$$

- **Lemme.** — Si $T_3(t) = T_3(s)$ alors

$$\frac{T_k(t) - T_k(s)}{t - s} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{k\pi}{3} V_{k-1}(s+t)$$

- $x(t) = T_3(t), y(t) = T_m(t) + a_{m-1}T_{m-1}(t) + \cdots + a_1T_1(t) + a_0.$

$$\frac{y(t) - y(s)}{t - s} = R(u) = \varepsilon_m V_{m-1}(u) + \sum_{k=0}^{m-2} \varepsilon_{k+1} a_{k+1} V_k(u).$$

$\varepsilon_k = 0$ si $3 \mid k, \pm 1$ sinon.

Construction

- Base des polynômes de Chebyshev: $t = 2 \cos \theta$

$$T_n(t) = 2 \cos(n\theta), V_n(t) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta}.$$

- **Lemme.** — Si $T_3(t) = T_3(s)$ alors

$$\frac{T_k(t) - T_k(s)}{t - s} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{k\pi}{3} V_{k-1}(s+t)$$

- $x(t) = T_3(t)$, $y(t) = T_m(t) + a_{m-1}T_{m-1}(t) + \cdots + a_1T_1(t) + a_0$.

$$\frac{y(t) - y(s)}{t - s} = R(u) = \varepsilon_m V_{m-1}(u) + \sum_{k=0}^{m-2} \varepsilon_{k+1} a_{k+1} V_k(u).$$

$\varepsilon_k = 0$ si $3 \mid k$, ± 1 sinon.

- Rechercher des polynômes dans $\text{vect}(V_i, i \neq 2 \bmod 3)$ ayant n zéros dans $[-2, 2]$ placés d'une certaine façon.

Minoration du degré

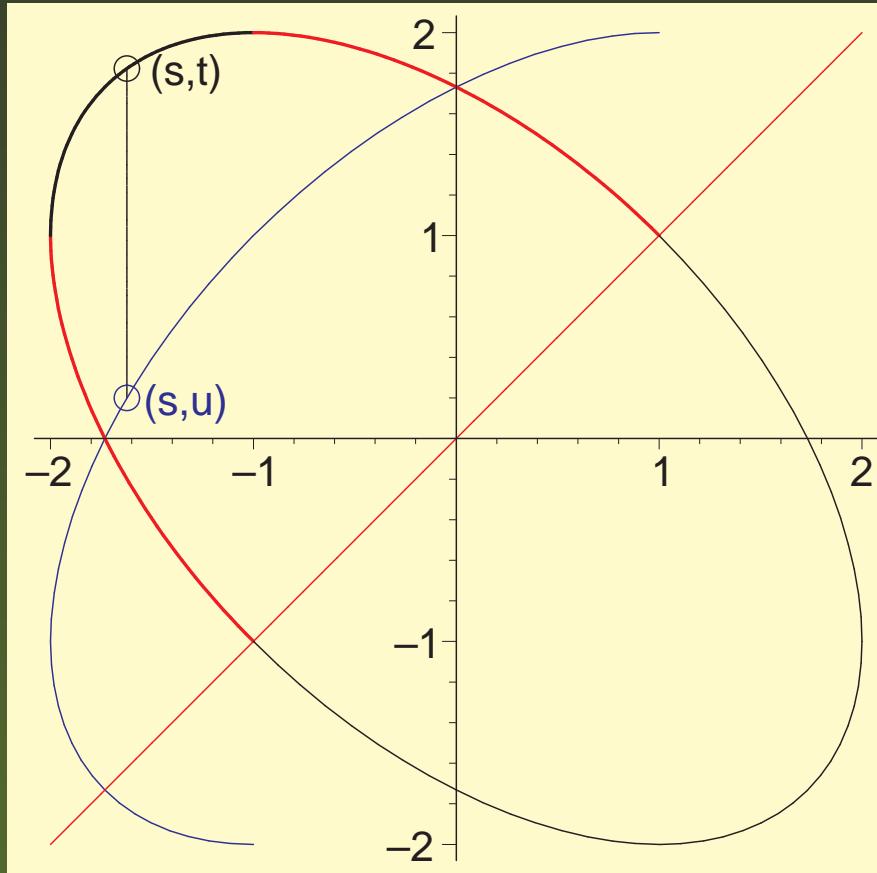
■ Lemme B. — Si $T_3(t_i) = T_3(s_i)$ et $u_i = t_i + s_i$ alors

$$\sum_{i=1}^n u_i^2 \leq n+4, \quad \sum_{i=1}^n u_i^4 \leq n+22.$$

Minoration du degré

■ Lemme B. — Si $T_3(t_i) = T_3(s_i)$ et $u_i = t_i + s_i$ alors

$$\sum_{i=1}^n u_i^2 \leq n+4, \quad \sum_{i=1}^n u_i^4 \leq n+22.$$



Impossibilité du degré : $m = n + 1$

■ $R(u) = \varepsilon_m V_{m-1}(u) + \sum_{k=0}^{m-2} \varepsilon_{k+1} a_{k+1} V_k(u).$ $\varepsilon_k = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{k\pi}{3}$

Impossibilité du degré : $m = n + 1$

- $R(u) = \varepsilon_m V_{m-1}(u) + \sum_{k=0}^{m-2} \varepsilon_{k+1} a_{k+1} V_k(u).$ $\varepsilon_k = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{k\pi}{3}$
- On cherche n racines réelles vérifiant $\sum_{i=1}^n u_i^2 \leq n + 4,$ $\sum_{i=1}^n u_i^4 \leq n + 22.$

Impossibilité du degré : $m = n + 1$

- $R(u) = \varepsilon_m V_{m-1}(u) + \sum_{k=0}^{m-2} \varepsilon_{k+1} a_{k+1} V_k(u).$ $\varepsilon_k = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{k\pi}{3}$
- On cherche n racines réelles vérifiant $\sum_{i=1}^n u_i^2 \leq n + 4,$ $\sum_{i=1}^n u_i^4 \leq n + 22.$
- Cas $n \equiv 2 \pmod{3}.$ $\varepsilon_{n+1} = 0$ et $\deg R(u) < n.$ Contradiction.

Impossibilité du degré : $m = n + 1$

- $R(u) = \varepsilon_m V_{m-1}(u) + \sum_{k=0}^{m-2} \varepsilon_{k+1} a_{k+1} V_k(u).$ $\varepsilon_k = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{k\pi}{3}$
- On cherche n racines réelles vérifiant $\sum_{i=1}^n u_i^2 \leq n + 4,$ $\sum_{i=1}^n u_i^4 \leq n + 22.$
- Cas $n \equiv 2 \pmod{3}.$ $\varepsilon_{n+1} = 0$ et $\deg R(u) < n.$ Contradiction.
- Cas $n \equiv 1 \pmod{3}.$ $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n = 1, \varepsilon_{n-1} = 0.$

$$R(u) = u^n + a_n u^{n-1} - (n-1) u^{n-2} + \dots$$

Impossibilité du degré : $m = n + 1$

- $R(u) = \varepsilon_m V_{m-1}(u) + \sum_{k=0}^{m-2} \varepsilon_{k+1} a_{k+1} V_k(u).$ $\varepsilon_k = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{k\pi}{3}$
- On cherche n racines réelles vérifiant $\sum_{i=1}^n u_i^2 \leq n + 4,$ $\sum_{i=1}^n u_i^4 \leq n + 22.$
- Cas $n \equiv 2 \pmod{3}.$ $\varepsilon_{n+1} = 0$ et $\deg R(u) < n.$ Contradiction.
- Cas $n \equiv 1 \pmod{3}.$ $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n = 1, \varepsilon_{n-1} = 0.$
$$R(u) = u^n + a_n u^{n-1} - (n-1) u^{n-2} + \cdots \quad \sum_{i=1}^n u_i^2 = a_n^2 + 2(n-1) \geq 2(n-1).$$
Contradiction si $n > 6.$

Impossibilité du degré : $m = n + 1$

- $R(u) = \varepsilon_m V_{m-1}(u) + \sum_{k=0}^{m-2} \varepsilon_{k+1} a_{k+1} V_k(u).$ $\varepsilon_k = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{k\pi}{3}$
- On cherche n racines réelles vérifiant $\sum_{i=1}^n u_i^2 \leq n + 4,$ $\sum_{i=1}^n u_i^4 \leq n + 22.$
- Cas $n \equiv 2 \pmod{3}.$ $\varepsilon_{n+1} = 0$ et $\deg R(u) < n.$ Contradiction.
- Cas $n \equiv 1 \pmod{3}.$ $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n = 1, \varepsilon_{n-1} = 0.$
$$R(u) = u^n + a_n u^{n-1} - (n-1) u^{n-2} + \cdots. \quad \sum_{i=1}^n u_i^2 = a_n^2 + 2(n-1) \geq 2(n-1).$$
Contradiction si $n > 6.$
- Cas $n \equiv 0 \pmod{3}.$ $\varepsilon_{n+1} = -1, \varepsilon_n = 0, \varepsilon_{n-1} = 1.$
$$-R(u) = u^n - (a_{n-1} + n-1) u^{n-2} + \lambda u^{n-3} + (n-3) a_{n-1} + \frac{(n-2)(n-3)}{2} u^{n-4} + \cdots$$

Impossibilité du degré : $m = n + 1$

- $R(u) = \varepsilon_m V_{m-1}(u) + \sum_{k=0}^{m-2} \varepsilon_{k+1} a_{k+1} V_k(u).$ $\varepsilon_k = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{k\pi}{3}$
- On cherche n racines réelles vérifiant $\sum_{i=1}^n u_i^2 \leq n + 4,$ $\sum_{i=1}^n u_i^4 \leq n + 22.$
- Cas $n \equiv 2 \pmod{3}.$ $\varepsilon_{n+1} = 0$ et $\deg R(u) < n.$ Contradiction.
- Cas $n \equiv 1 \pmod{3}.$ $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n = 1, \varepsilon_{n-1} = 0.$
$$R(u) = u^n + a_n u^{n-1} - (n-1) u^{n-2} + \cdots. \quad \sum_{i=1}^n u_i^2 = a_n^2 + 2(n-1) \geq 2(n-1).$$
Contradiction si $n > 6.$
- Cas $n \equiv 0 \pmod{3}.$ $\varepsilon_{n+1} = -1, \varepsilon_n = 0, \varepsilon_{n-1} = 1.$
$$-R(u) = u^n - (a_{n-1} + n-1) u^{n-2} + \lambda u^{n-3} + (n-3) a_{n-1} + \frac{(n-2)(n-3)}{2} u^{n-4} + \cdots$$
$$\sum_{i=1}^n u_i^4 = 2(a_{n-1} + 2)^2 + 6n - 18 \geq 6n - 18.$$
 Contradiction si $n > 3.$

Construction

- **Résultat.** — On peut construire explicitement des polynômes de degré $3n + 1$ ayant exactement $2n + 1$ zéros dans $[-1, 1]$. Et aucun autre dans $[-2, 2]$.
- On restreint aux polynômes impairs, combinaisons de V_{6k+1} et V_{6k+3} .

Construction

- **Résultat.** — On peut construire explicitement des polynômes de degré $3n + 1$ ayant exactement $2n + 1$ zéros dans $[-1, 1]$. Et aucun autre dans $[-2, 2]$.
- On restreint aux polynômes impairs, combinaisons de V_{6k+1} et V_{6k+3} .
- $t = 2\cos\theta$

$$T_n(t) = 2\cos(n\theta), \quad V_n(t) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}.$$

Construction

- **Résultat.** — On peut construire explicitement des polynômes de degré $3n + 1$ ayant exactement $2n + 1$ zéros dans $[-1, 1]$. Et aucun autre dans $[-2, 2]$.
- On restreint aux polynômes impairs, combinaisons de V_{6k+1} et V_{6k+3} .
- $t = 2\cos\theta$

$$T_n(t) = 2\cos(n\theta), \quad V_n(t) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}.$$

$$V_0 = 1, \quad V_1 = t, \quad V_{n+1} = tV_n - V_{n-1}.$$

Construction

- **Résultat.** — On peut construire explicitement des polynômes de degré $3n + 1$ ayant exactement $2n + 1$ zéros dans $[-1, 1]$. Et aucun autre dans $[-2, 2]$.
- On restreint aux polynômes impairs, combinaisons de V_{6k+1} et V_{6k+3} .
- $t = 2 \cos \theta$

$$T_n(t) = 2 \cos(n\theta), \quad V_n(t) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta}.$$

$$V_0 = 1, \quad V_1 = t, \quad V_{n+1} = tV_n - V_{n-1}.$$

$$T_0 = 2, \quad T_1 = t, \quad T_{n+1} = tT_n - T_{n-1}.$$

Construction

■ **Théorème (KP08).** — Il existe une suite de polynômes C_n de E tels que

$$\text{vect } (V_1, V_3, \dots, V_{6n+2\pm 1}) = \text{vect } (C_0, \dots, C_n), C_n = t^{2n+1} F_n, F_n(0) = 1.$$

De plus $F_n(t) > 0$ lorsque $t \in [-2, 2]$.

Construction

■ **Théorème (KP08).** — Il existe une suite de polynômes C_n de E tels que

$$\text{vect } (V_1, V_3, \dots, V_{6n+2\pm 1}) = \text{vect } (C_0, \dots, C_n), C_n = t^{2n+1} F_n, F_n(0) = 1.$$

De plus $F_n(t) > 0$ lorsque $t \in [-2, 2]$.

$$\begin{aligned} C_0 &= t, \\ C_1 &= t^3, \\ C_2 &= t^5(t^2 - 6), \\ C_3 &= t^7(t^2 - 9/2), \\ C_4 &= t^9(t^4 - 12t^2 + 33), \\ C_5 &= t^{11}\left(t^4 - \frac{102}{11}t^2 + \frac{234}{11}\right). \end{aligned}$$

■ Cette suite est unique

Base de l'espace

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 10 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -20 & 21 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -56 & 126 & -120 & 55 & -12 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 84 & -252 & 330 & -220 & 78 & -14 & 1 & 0 & 0 \\ -10 & 165 & -792 & 1716 & -2002 & 1365 & -560 & 136 & -18 & 1 \\ 11 & -220 & 1287 & -3432 & 5005 & -4368 & 2380 & -816 & 171 & -20 \end{bmatrix}$$

V_0, \dots, V_7

Base LU

$$\left[\begin{array}{cccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9/2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 33 & -12 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{234}{11} & -\frac{102}{11} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2295}{13} & \frac{2601}{26} & -18 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{513}{5} & \frac{5643}{85} & -\frac{1206}{85} \\ \end{array} \right]$$

C_0, \dots, C_7

Solution

- $C_n = t^{2n+1} F_n, F_n(0) = 1. F_n(t) > 0, \text{ si } t \in [-2, 2].$

Solution

- $C_n = t^{2n+1} F_n$, $F_n(0) = 1$. $F_n(t) > 0$, si $t \in [-2, 2]$.
- **Lemme.** — $0 < u_1 < \dots < u_n$. Il existe

$$A_n(\varepsilon) = t \prod_{i=1}^n (t^2 - \varepsilon^2 u_i^2) D_n(\varepsilon) = C_n + a_{n-1} C_{n-1} + \dots + a_0 C_0.$$

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} D_n(\varepsilon) = F_n$. Pour ε petit, $D_n(\varepsilon)(t) \neq 0$, si $t \in [-2, 2]$.

Solution

■ $C_n = t^{2n+1} F_n$, $F_n(0) = 1$. $F_n(t) > 0$, si $t \in [-2, 2]$.

■ **Lemme.** — $0 < u_1 < \dots < u_n$. Il existe

$$A_n(\varepsilon) = t \prod_{i=1}^n (t^2 - \varepsilon^2 u_i^2) D_n(\varepsilon) = C_n + a_{n-1} C_{n-1} + \dots + a_0 C_0.$$

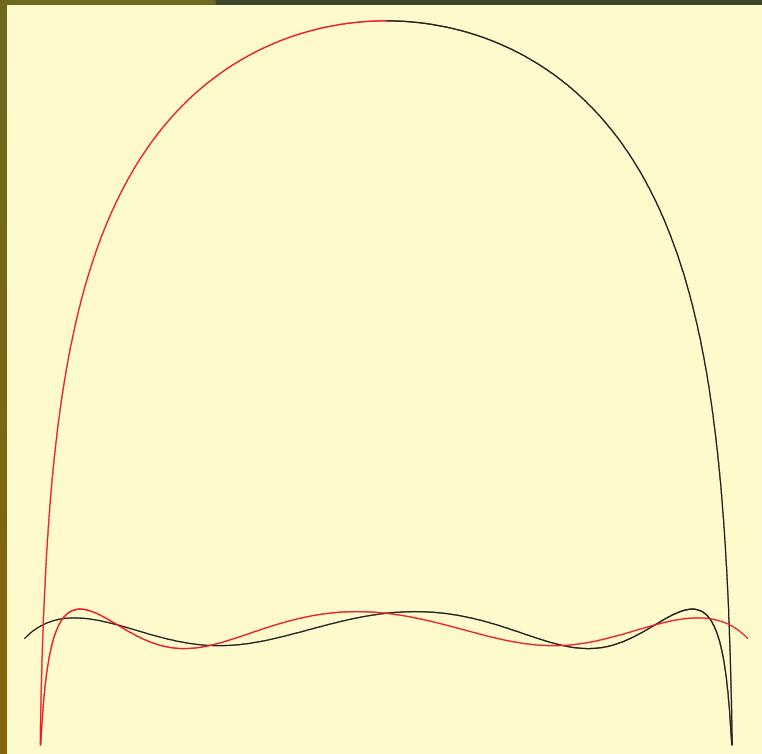
$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} D_n(\varepsilon) = F_n$. Pour ε petit, $D_n(\varepsilon)(t) \neq 0$, si $t \in [-2, 2]$.

■ **Résultat.** — $N = 2n + 1$. Il existe une courbe $\mathcal{C}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ de degré $(3, 3n+1, 3n+2)$ telle que $(x(t), y(t))$ a exactement N points doubles

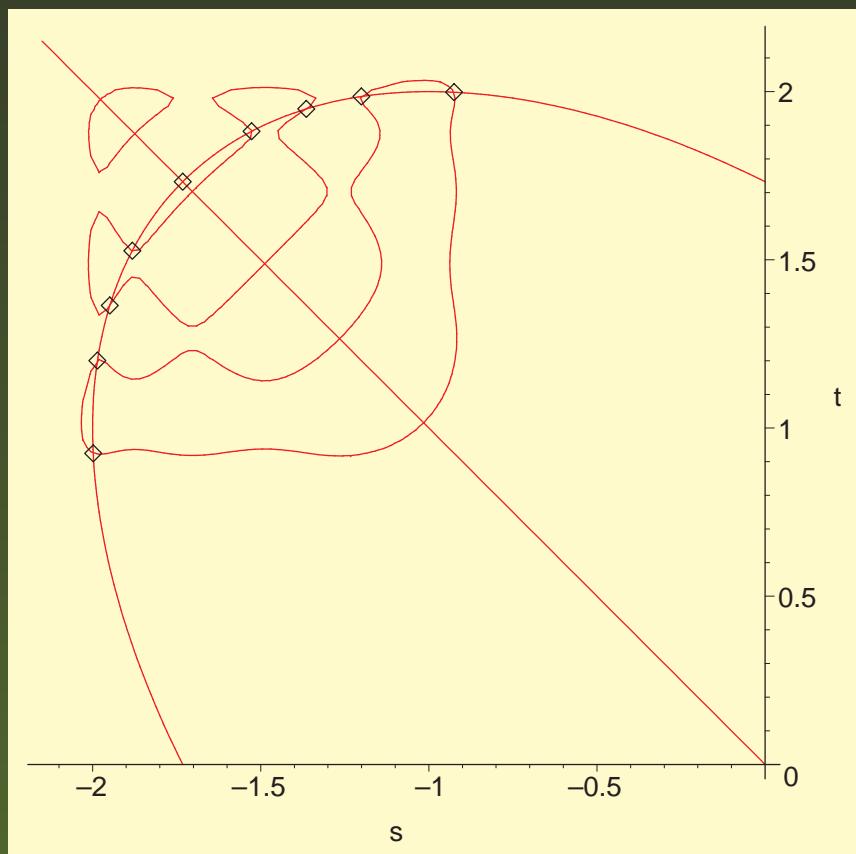
$$\left\{ \begin{array}{l} x(t_i) = x(s_i), \quad y(t_i) = y(s_i), \\ s_1 < \dots < s_N < t_1 < \dots < t_N \\ (-1)^i (z(t_i) - z(s_i)) > 0, \quad i = 1, \dots, N. \end{array} \right.$$

Exemple $n = 9$

$$y(t) = -\frac{27}{10}T_{14} + 10T_{12} - 23T_{10} + 42T_8 - 64T_6 + 85T_4 - 100T_2 + 112.$$



échelle logarithmique



Espace des paramètres

Construction

- La suite de polynômes C_n de E tels que

$$\text{vect } (V_1, V_3, \dots, V_{6n+2\pm 1}) = \text{vect } (C_0, \dots, C_n), C_n = t^{2n+1} F_n, F_n(0) = 1,$$

est unique. On a de plus $F_n(t) > 0$ lorsque $t \in [-2, 2]$.

Construction

- La suite de polynômes C_n de E tels que

$$\text{vect } (V_1, V_3, \dots, V_{6n+2\pm 1}) = \text{vect } (C_0, \dots, C_n), C_n = t^{2n+1} F_n, F_n(0) = 1,$$

est unique. On a de plus $F_n(t) > 0$ lorsque $t \in [-2, 2]$.

En fait F_n est scindé. $\deg F_{2k} = \deg F_{2k+1} = 2k$

Construction

- La suite de polynômes C_n de E tels que

$$\text{vect } (V_1, V_3, \dots, V_{6n+2\pm 1}) = \text{vect } (C_0, \dots, C_n), C_n = t^{2n+1} F_n, F_n(0) = 1,$$

est unique. On a de plus $F_n(t) > 0$ lorsque $t \in [-2, 2]$.

En fait F_n est scindé. $\deg F_{2k} = \deg F_{2k+1} = 2k$

- $F_{2n+2} = (\alpha_n(T_6 + 2) + \beta_n)F_{2n} - \gamma_n(T_6 + 2)^2 F_{2n-2}$
 F_{2n} est une suite de Sturm. Comment démontrer que $\gamma_n > 0$?

T_2 fonction de $T_6 + 2$

- $E = \text{vect} (V_1, V_3, V_7, \dots, V_{6n+2\pm 1}, \dots) = t(\mathbb{R}[T_6] \oplus T_2\mathbb{R}[T_6])$

T_2 fonction de $T_6 + 2$

- $E = \text{vect} (V_1, V_3, V_7, \dots, V_{6n+2\pm 1}, \dots) = t (\mathbb{R}[T_6] \oplus T_2 \mathbb{R}[T_6])$
- $V_{6k+1} - V_{6k-3} = t \cdot T_{6k}, V_{6k+3} - V_{6k-5} = t \cdot T_2 \cdot T_{6k}.$
- $T_{6k}(t) = T_k(T_6).$

T_2 fonction de $T_6 + 2$

- $E = \text{vect} (V_1, V_3, V_7, \dots, V_{6n+2\pm 1}, \dots) = t (\mathbb{R}[T_6] \oplus T_2 \mathbb{R}[T_6])$
- $V_{6k+1} - V_{6k-3} = t \cdot T_{6k}, V_{6k+3} - V_{6k-5} = t \cdot T_2 \cdot T_{6k}.$
- $T_{6k}(t) = T_k(T_6).$
- On cherche $P_n(T_6) - T_2 Q_n(T_6) = 0 \bmod t^{2n}.$

T_2 fonction de $T_6 + 2$

- $E = \text{vect} (V_1, V_3, V_7, \dots, V_{6n+2\pm 1}, \dots) = t (\mathbb{R}[T_6] \oplus T_2 \mathbb{R}[T_6])$
- $V_{6k+1} - V_{6k-3} = t \cdot T_{6k}, V_{6k+3} - V_{6k-5} = t \cdot T_2 \cdot T_{6k}.$
- $T_{6k}(t) = T_k(T_6).$
- On cherche $P_n(T_6) - T_2 Q_n(T_6) = 0 \bmod t^{2n}.$
- $T_2 + 2 = t^2, T_6 + 2 = t^2(t^2 - 3)^2.$

T_2 fonction de $T_6 + 2$

- $E = \text{vect} (V_1, V_3, V_7, \dots, V_{6n+2\pm 1}, \dots) = t (\mathbb{R}[T_6] \oplus T_2 \mathbb{R}[T_6])$
- $V_{6k+1} - V_{6k-3} = t \cdot T_{6k}, V_{6k+3} - V_{6k-5} = t \cdot T_2 \cdot T_{6k}.$
- $T_{6k}(t) = T_k(T_6).$
- On cherche $P_n(T_6) - T_2 Q_n(T_6) = 0 \bmod t^{2n}.$
- $T_2 + 2 = t^2, T_6 + 2 = t^2(t^2 - 3)^2.$
- $4u = T_6 + 2, v = T_2 + 2, P_n(u) - v Q_n(u) = 0 \bmod u^{2n}.$

T_2 fonction de $T_6 + 2$

- $E = \text{vect} (V_1, V_3, V_7, \dots, V_{6n+2\pm 1}, \dots) = t (\mathbb{R}[T_6] \oplus T_2 \mathbb{R}[T_6])$
- $V_{6k+1} - V_{6k-3} = t \cdot T_{6k}$, $V_{6k+3} - V_{6k-5} = t \cdot T_2 \cdot T_{6k}$.
- $T_{6k}(t) = T_k(T_6)$.
- On cherche $P_n(T_6) - T_2 Q_n(T_6) = 0 \bmod t^{2n}$.
- $T_2 + 2 = t^2$, $T_6 + 2 = t^2(t^2 - 3)^2$.
- $4u = T_6 + 2$, $v = T_2 + 2$, $P_n(u) - v Q_n(u) = 0 \bmod u^{2n}$.
- $4u = v(v - 3)^2$. v est une fonction algébrique $\varphi(u)$ dont on cherche un approximant de Padé

$$\varphi(u) = \frac{P_n(u)}{Q_n(u)} \bmod u^{2n}$$

Approximant de Padé

- Théorème [Approximant de Padé]. — Soit $f(x) = \sum_{k \geq 1} f_k x^k$ une série de Stieltjes et $m \leq n$. Il y a une unique solution $(P_n, Q_m) \in \mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_m[x]$, telle que

$$Q_m(0) = 1, P_n - fQ_m = 0 \bmod x^{n+m+1}.$$

De plus $\deg P_n = n$ and $\deg Q_m = m$.

Approximant de Padé

- **Théorème [Approximant de Padé].** — Soit $f(x) = \sum_{k \geq 1} f_k x^k$ une série de Stieltjes et $m \leq n$. Il y a une unique solution $(P_n, Q_m) \in \mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_m[x]$, telle que

$$Q_m(0) = 1, P_n - f Q_m = 0 \bmod x^{n+m+1}.$$

De plus $\deg P_n = n$ and $\deg Q_m = m$.

- $f(z) = \sum_{n \geq 1} f_n z^n$ est une série de Stieltjes si pour tout $n \geq 1$ et $m \geq 0$, on a

$$\begin{vmatrix} f_n & f_{n+1} & \cdots & f_{n+m} \\ f_{n+1} & f_{n+2} & \cdots & f_{n+m+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ f_{n+m} & f_{n+m+1} & \cdots & f_{n+2m} \end{vmatrix} > 0.$$

Approximant de Padé

- On note $f^{[n/m]} = P_n/Q_m$ l'approximant de Padé d'ordre (n,m) de f .
- **Théorème.** — Si $f(x)$ est une série de Stieltjes de rayon de convergence R alors
 1. Q_m est scindé et ses racines sont $> R$.
 2. Si $f^{[n/m]}(x) = \sum_{k \geq 1} f_k^{[n/m]} x^k$, alors
 - (a) pour $1 \leq k \leq n+m$, $0 < f_k^{[n/m]} = f_k$.
 - (b) $0 \leq f_{n+m+1}^{[n/m]} < f_{n+m+1}$.
 - (c) pour $k \geq n+m+1$, $0 \leq f_k^{[n/m]} \leq f_k$.

Approximant de Padé

- On note $f^{[n/m]} = P_n/Q_m$ l'approximant de Padé d'ordre (n,m) de f .
- **Théorème.** — Si $f(x)$ est une série de Stieltjes de rayon de convergence R alors
 1. Q_m est scindé et ses racines sont $> R$.
 2. Si $f^{[n/m]}(x) = \sum_{k \geq 1} f_k^{[n/m]} x^k$, alors
 - (a) pour $1 \leq k \leq n+m$, $0 < f_k^{[n/m]} = f_k$.
 - (b) $0 \leq f_{n+m+1}^{[n/m]} < f_{n+m+1}$.
 - (c) pour $k \geq n+m+1$, $0 \leq f_k^{[n/m]} \leq f_k$.
- On a donc

$$f - f^{[n/m]} \text{ d'ordre } x^{n+m+1},$$

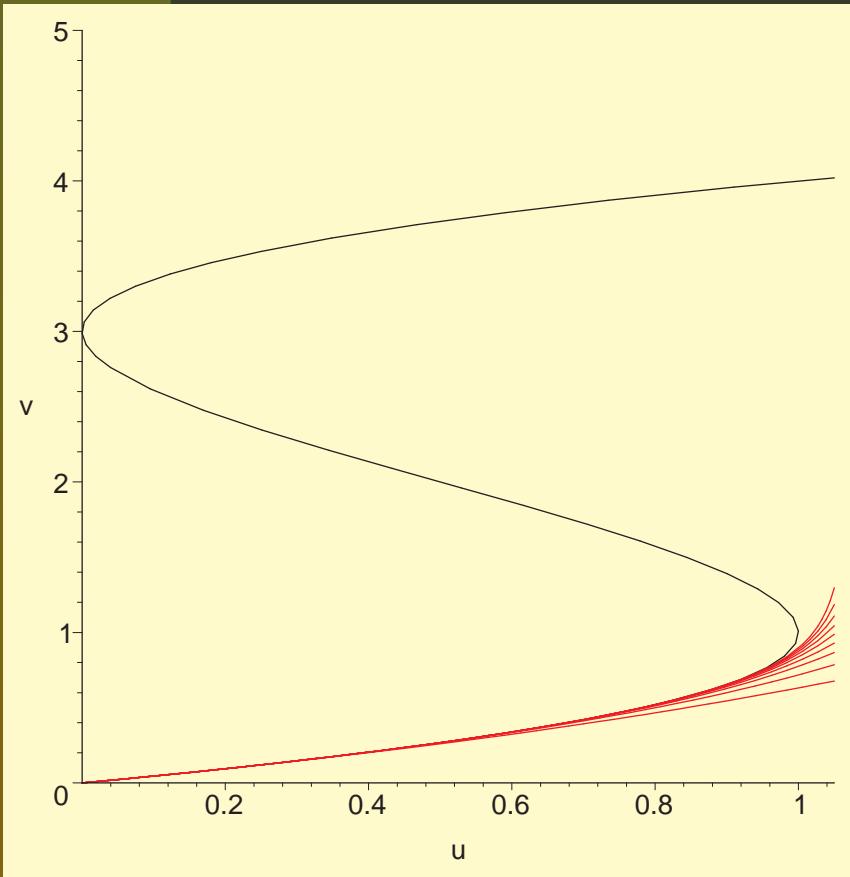
$$0 < f^{[n/m]}(x) < f(x), \quad x \in]0, R[.$$

Approximation de $\varphi(u)$

- $4u = \varphi(u)(\varphi(u) - 3)^2$.

Approximation de $\varphi(u)$

- $4u = \varphi(u)(\varphi(u) - 3)^2$.



φ et $\varphi^{[n,n]}$

$$u = \frac{1}{4}t^2(t^2 - 3)^2, v = t^2.$$

$$\varphi(u) > \varphi^{[n,m]}(u) = \frac{P_n(u)}{Q_m(u)}$$

$$Q_m(u) > 0 \text{ si } u \in [0, 1]$$

$$P_n(u) - \varphi(u)Q_m(u) < 0, \text{ si } t \in [-2, 2].$$

$\varphi(u)$ série de Stieltjes

- $4u = \varphi(u)(\varphi(u) - 3)^2.$

$\varphi(u)$ série de Stieltjes

- $4u = \varphi(u)(\varphi(u) - 3)^2.$
- φ solution de l'équation hypergéométrique

$$-4 + 2\varphi(u) + 9(1 - 2u) \frac{d}{du}\varphi(u) + 18(u - u^2) \frac{d^2}{du^2}\varphi(u) = 0.$$

$\varphi(u)$ série de Stieltjes

- $4u = \varphi(u)(\varphi(u) - 3)^2.$
- φ solution de l'équation hypergéométrique

$$-4 + 2\varphi(u) + 9(1 - 2u) \frac{d}{du}\varphi(u) + 18(u - u^2) \frac{d^2}{du^2}\varphi(u) = 0.$$

- $\varphi_0 = 0, \varphi_1 = \frac{4}{9}, \varphi_{n+1} = \frac{2}{9} \frac{(3n+1)(3n-1)}{(n+1)(2n+1)} \varphi_n.$
- $\varphi(u) = 4 \sin^2 \left(\frac{1}{3} \arcsin \sqrt{u} \right) = 2 - 2F(1/3, -1/3, 1/2; u)$

$\varphi(u)$ série de Stieltjes

- $4u = \varphi(u)(\varphi(u) - 3)^2.$
- φ solution de l'équation hypergéométrique

$$-4 + 2\varphi(u) + 9(1 - 2u) \frac{d}{du}\varphi(u) + 18(u - u^2) \frac{d^2}{du^2}\varphi(u) = 0.$$

- $\varphi_0 = 0, \varphi_1 = \frac{4}{9}, \varphi_{n+1} = \frac{2}{9} \frac{(3n+1)(3n-1)}{(n+1)(2n+1)} \varphi_n.$
- $\varphi(u) = 4 \sin^2 \left(\frac{1}{3} \arcsin \sqrt{u} \right) = 2 - 2F(1/3, -1/3, 1/2; u)$
- Est-ce une série de Stieltjes ? Calcul des déterminants de Hankel ?

$\varphi(u)$ série de Hausdorff

- $\Phi_{n+1} = \frac{2}{9} \frac{(3n+1)(3n-1)}{(n+1)(2n+1)} \Phi_n.$

$\varphi(u)$ série de Hausdorff

- $\Phi_{n+1} = \frac{2}{9} \frac{(3n+1)(3n-1)}{(n+1)(2n+1)} \Phi_n.$
- (f_n) est totalement monotone si

$$(-1)^k \Delta^k f_n > 0, \text{ où } \Delta f_n = f_{n+1} - f_n.$$

$\varphi(u)$ série de Hausdorff

- $\Phi_{n+1} = \frac{2}{9} \frac{(3n+1)(3n-1)}{(n+1)(2n+1)} \Phi_n.$
- (f_n) est totalement monotone si

$$(-1)^k \Delta^k f_n > 0, \text{ où } \Delta f_n = f_{n+1} - f_n.$$

- **Théorème (Hausdorff, 1921).** — Si (f_n) est totalement monotone et n'est pas une fraction rationnelle, $\sum f_n x^n$ est une série de Stieltjes.

$\varphi(u)$ série de Hausdorff

- $\Phi_{n+1} = \frac{2}{9} \frac{(3n+1)(3n-1)}{(n+1)(2n+1)} \Phi_n.$
- (f_n) est totalement monotone si

$$(-1)^k \Delta^k f_n > 0, \text{ où } \Delta f_n = f_{n+1} - f_n.$$

- **Théorème (Hausdorff, 1921).** — Si (f_n) est totalement monotone et n'est pas une fraction rationnelle, $\sum f_n x^n$ est une série de Stieltjes.
- **Résultat.** — (φ_n) est une totalement monotone. φ est une série de Stieltjes.

$\varphi(u)$ absolument monotone

$$\Phi_{n+1} = \frac{2}{9} \frac{(3n+1)(3n-1)}{(n+1)(2n+1)} \Phi_n.$$

$\varphi(u)$ absolument monotone

$$\Phi_{n+1} = \frac{2}{9} \frac{(3n+1)(3n-1)}{(n+1)(2n+1)} \Phi_n.$$

$$(-1)^k \Delta^k \Phi_n = \Phi_n \frac{P_k(n)}{(n+1) \cdots (n+k) \cdot (2n+1) \cdots (2n+2k-1)}.$$

$\varphi(u)$ absolument monotone

$$\Phi_{n+1} = \frac{2}{9} \frac{(3n+1)(3n-1)}{(n+1)(2n+1)} \Phi_n.$$

$$(-1)^k \Delta^k \Phi_n = \Phi_n \frac{P_k(n)}{(n+1) \cdots (n+k) \cdot (2n+1) \cdots (2n+2k-1)}.$$

$$\begin{aligned} (-1)^{k+1} \Delta^{k+1} \Phi_n &= -\Delta \left[\Phi_n \frac{P_k(n)}{(n+1) \cdots (n+k) \cdot (2n+1) \cdots (2n+2k-1)} \right] \\ &= \Phi_n \frac{P_k(n)}{(n+1) \cdots (n+k) \cdot (2n+1) \cdots (2n+2k-1)} - \\ &\quad \Phi_{n+1} \frac{P_k(n+1)}{(n+2) \cdots (n+k+1) \cdot (2n+3) \cdots (2n+2k+1)} \\ &= \Phi_n \frac{(n+k+1)(2n+2k+1)P_k(n) - 2(n^2 - 1/9)P_k(n+1)}{(n+1) \cdots (n+k+1) \cdot (2n+1) \cdots (2n+2(k+1)-1)}. \end{aligned}$$

$\varphi(u)$ absolument monotone

■ $(-1)^k \Delta^k \varphi_n = \varphi_n \frac{P_k(n)}{(n+1) \cdots (n+k) \cdot (2n+1) \cdots (2n+2k-1)}.$

$\varphi(u)$ absolument monotone

- $(-1)^k \Delta^k \varphi_n = \varphi_n \frac{P_k(n)}{(n+1) \cdots (n+k) \cdot (2n+1) \cdots (2n+2k-1)}.$
- $P_{k+1}(n) = (n+k+1)(2n+2k+1)P_k(n) - 2(n^2 - 1/9)P_k(n+1).$

$\varphi(u)$ absolument monotone

- $(-1)^k \Delta^k \varphi_n = \varphi_n \frac{P_k(n)}{(n+1) \cdots (n+k) \cdot (2n+1) \cdots (2n+2k-1)}.$
- $P_{k+1}(n) = (n+k+1)(2n+2k+1)P_k(n) - 2(n^2 - 1/9)P_k(n+1).$
- $\deg_n P_k(n) = k. \quad P_k(X) = 1 \cdot 3 \cdots (2k+1)X^k + \cdots.$

$\varphi(u)$ absolument monotone

- $(-1)^k \Delta^k \varphi_n = \varphi_n \frac{P_k(n)}{(n+1) \cdots (n+k) \cdot (2n+1) \cdots (2n+2k-1)}.$
- $P_{k+1}(n) = (n+k+1)(2n+2k+1)P_k(n) - 2(n^2 - 1/9)P_k(n+1).$
- $\deg_n P_k(n) = k. \quad P_k(X) = 1 \cdot 3 \cdots (2k+1)X^k + \cdots.$
- $(-1)^i P_k(-i) > 0, i = 0, \dots, k.$

$\varphi(u)$ absolument monotone

- $(-1)^k \Delta^k \varphi_n = \varphi_n \frac{P_k(n)}{(n+1) \cdots (n+k) \cdot (2n+1) \cdots (2n+2k-1)}.$
- $P_{k+1}(n) = (n+k+1)(2n+2k+1)P_k(n) - 2(n^2 - 1/9)P_k(n+1).$
- $\deg_n P_k(n) = k. \quad P_k(X) = 1 \cdot 3 \cdots (2k+1)X^k + \cdots.$
- $(-1)^i P_k(-i) > 0, i = 0, \dots, k.$
 - $P_{k+1}(0) = (k+1)(2k+1)P_k(0) + 2/9P_k(1) > 0$

$\varphi(u)$ absolument monotone

- $(-1)^k \Delta^k \varphi_n = \varphi_n \frac{P_k(n)}{(n+1) \cdots (n+k) \cdot (2n+1) \cdots (2n+2k-1)}.$
- $P_{k+1}(n) = (n+k+1)(2n+2k+1)P_k(n) - 2(n^2 - 1/9)P_k(n+1).$
- $\deg_n P_k(n) = k. \quad P_k(X) = 1 \cdot 3 \cdots (2k+1)X^k + \cdots.$
- $(-1)^i P_k(-i) > 0, i = 0, \dots, k.$
 - $P_{k+1}(0) = (k+1)(2k+1)P_k(0) + 2/9P_k(1) > 0$
 - $(-1)^{k+1} P_{k+1}(-(k+1)) = 0 - 2((k+1)^2 - 2/9)(-1)^{k+1} P_k(-k) > 0$

$\varphi(u)$ absolument monotone

- $(-1)^k \Delta^k \varphi_n = \varphi_n \frac{P_k(n)}{(n+1) \cdots (n+k) \cdot (2n+1) \cdots (2n+2k-1)}.$
- $P_{k+1}(n) = (n+k+1)(2n+2k+1)P_k(n) - 2(n^2 - 1/9)P_k(n+1).$
- $\deg_n P_k(n) = k. \quad P_k(X) = 1 \cdot 3 \cdots (2k+1)X^k + \cdots.$
- $(-1)^i P_k(-i) > 0, i = 0, \dots, k.$
 - $P_{k+1}(0) = (k+1)(2k+1)P_k(0) + 2/9P_k(1) > 0$
 - $(-1)^{k+1} P_{k+1}(-(k+1)) = 0 - 2((k+1)^2 - 2/9)(-1)^{k+1} P_k(-k) > 0$
 - $(-1)^i P_{k+1}(-i) = (k-i+1)(2(k-i)+1)(-1)^i P_k(i) + 2(i^2 - 2/9)(-1)^{i-1} P_k(-(i-1)) > 0.$

$\varphi(u)$ absolument monotone

- $(-1)^k \Delta^k \varphi_n = \varphi_n \frac{P_k(n)}{(n+1) \cdots (n+k) \cdot (2n+1) \cdots (2n+2k-1)}.$
- $P_{k+1}(n) = (n+k+1)(2n+2k+1)P_k(n) - 2(n^2 - 1/9)P_k(n+1).$
- $\deg_n P_k(n) = k. \quad P_k(X) = 1 \cdot 3 \cdots (2k+1)X^k + \cdots.$
- $(-1)^i P_k(-i) > 0, i = 0, \dots, k.$
 - $P_{k+1}(0) = (k+1)(2k+1)P_k(0) + 2/9P_k(1) > 0$
 - $(-1)^{k+1} P_{k+1}(-(k+1)) = 0 - 2((k+1)^2 - 2/9)(-1)^{k+1} P_k(-k) > 0$
 - $(-1)^i P_{k+1}(-i) = (k-i+1)(2(k-i)+1)(-1)^i P_k(i) + 2(i^2 - 2/9)(-1)^{i-1} P_k(-(i-1)) > 0.$
- P_k de degré k a ses racines entre $-k$ et 0 . $P_k(n) > 0$ si $n > 0$.

Hausdorff – Stieltjes

■ **Problème des moments.** — Etant donné (u_n) , existe-t'il une mesure croissante telle que $u_n = \int_{u=0}^1 u^n d\mu$.

Hausdorff – Stieltjes

■ **Problème des moments.** — Etant donné (u_n) , existe-t'il une mesure croissante telle que $u_n = \int_{u=0}^1 u^n d\mu$.

■ **Résultat.** — Si oui, alors

$$(-1)^k \Delta^k u_n = \int_0^1 (1-u)^k u^n d\mu \geq 0; \quad (P, Q) \mapsto \int_0^1 P(u)Q(u) d\mu \geq 0 \text{ positive.}$$

Hausdorff – Stieltjes

■ **Problème des moments.** — Etant donné (u_n) , existe-t'il une mesure croissante telle que $u_n = \int_{u=0}^1 u^n d\mu$.

■ **Résultat.** — Si oui, alors

$$(-1)^k \Delta^k u_n = \int_0^1 (1-u)^k u^n d\mu \geq 0; \quad (P, Q) \mapsto \int_0^1 P(u)Q(u) d\mu \geq 0 \text{ positive.}$$

■ **Théorème (Hausdorff, 1921).** — Si $(-1)^k \Delta^k u_n \geq 0$ alors il existe une mesure μ telle que $u_n = \int_{u=0}^1 u^n d\mu$.

Hausdorff – Stieltjes

- **Problème des moments.** — Etant donné (u_n) , existe-t'il une mesure croissante telle que $u_n = \int_{u=0}^1 u^n d\mu$.
- **Résultat.** — Si oui, alors
$$(-1)^k \Delta^k u_n = \int_0^1 (1-u)^k u^n d\mu \geq 0; \quad (P, Q) \mapsto \int_0^1 P(u)Q(u) d\mu \geq 0$$
positive.
- **Théorème (Hausdorff, 1921).** — Si $(-1)^k \Delta^k u_n \geq 0$ alors il existe une mesure μ telle que $u_n = \int_{u=0}^1 u^n d\mu$.
- **Résultat.** — Si $f(z) = \sum u^n z^n$ n'est pas une fraction rationnelle alors μ prend une infinité de valeurs.

Hausdorff – Stieltjes

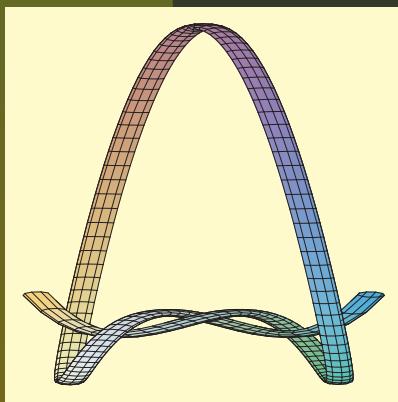
- **Problème des moments.** — Etant donné (u_n) , existe-t'il une mesure croissante telle que $u_n = \int_{u=0}^1 u^n d\mu$.
- **Résultat.** — Si oui, alors
$$(-1)^k \Delta^k u_n = \int_0^1 (1-u)^k u^n d\mu \geq 0; \quad (P, Q) \mapsto \int_0^1 P(u)Q(u) d\mu \geq 0$$
 positive.
- **Théorème (Hausdorff, 1921).** — Si $(-1)^k \Delta^k u_n \geq 0$ alors il existe une mesure μ telle que $u_n = \int_{u=0}^1 u^n d\mu$.
- **Résultat.** — Si $f(z) = \sum u^n z^n$ n'est pas une fraction rationnelle alors μ prend une infinité de valeurs.
- **Résultat.** — Si $(-1)^k \Delta^k u_n > 0$ et $f(z) = \sum u^n z^n$ n'est pas une fraction rationnelle alors $(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(u)Q(u) d\mu \geq 0$ est définie positive. f est une série de Stieltjes.

Conclusion, perspectives

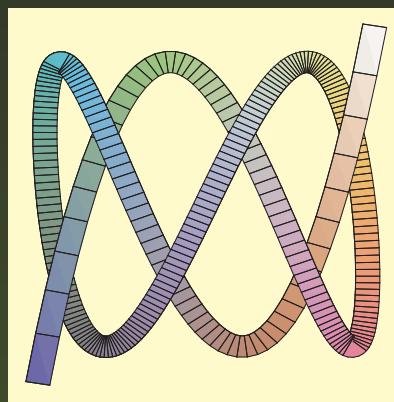
- K_{2n+1} représenté par des courbes polynomiales de degré $(3, 3n + 1, 3n + 2)$.

Conclusion, perspectives

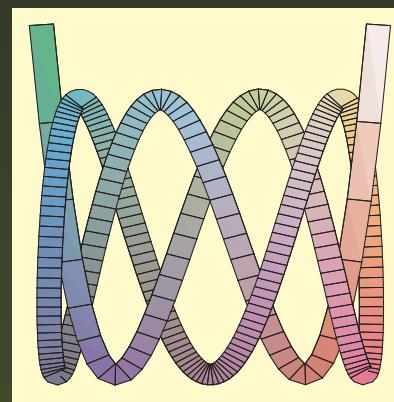
- K_{2n+1} représenté par des courbes polynomiales de degré $(3, 3n + 1, 3n + 2)$.



K_5



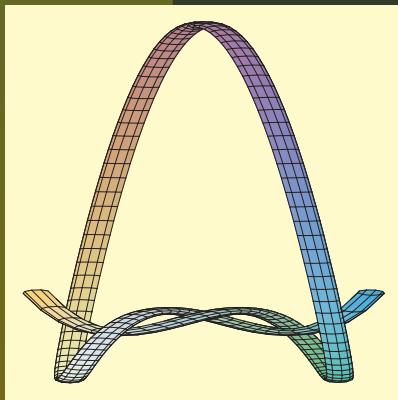
K_5



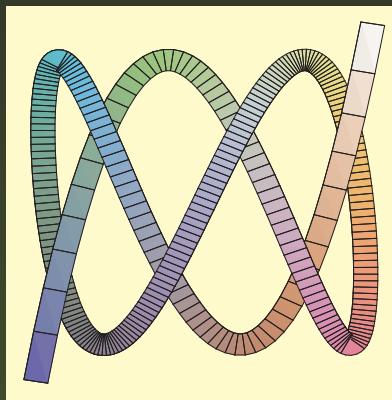
K_7

Conclusion, perspectives

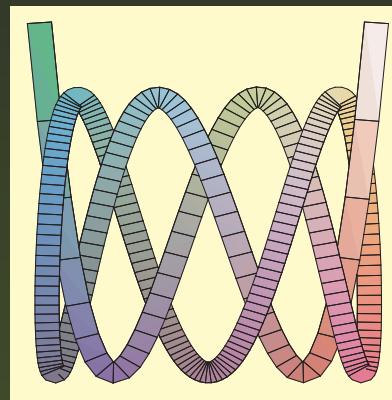
- K_{2n+1} représenté par des courbes polynomiales de degré $(3, 3n+1, 3n+2)$.



K_5



K_5

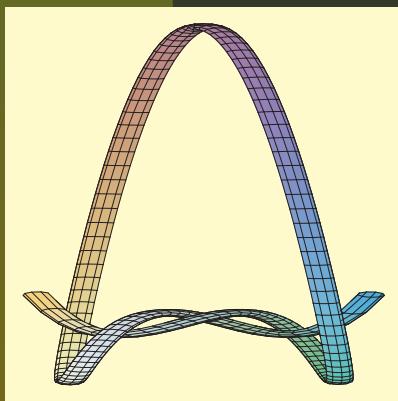


K_7

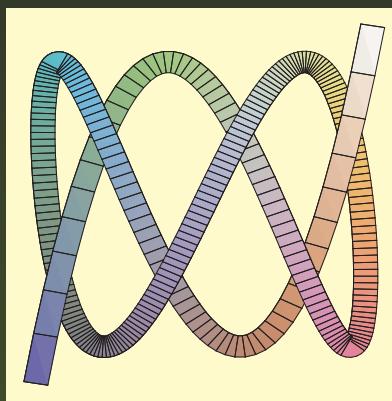
- **Résultat.** — Ces degrés sont minimaux. Sans restriction sur le diagramme.
(avec D. Pecker, E. Brugallé).

Conclusion, perspectives

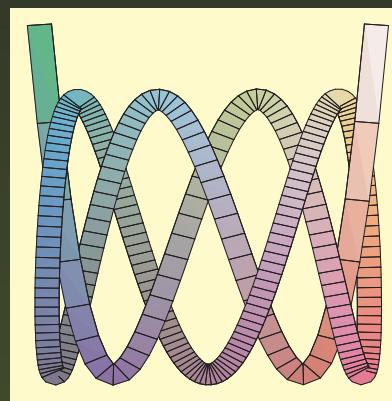
- K_{2n+1} représenté par des courbes polynomiales de degré $(3, 3n+1, 3n+2)$.



K_5



K_5



K_7

- **Résultat.** — Ces degrés sont minimaux. Sans restriction sur le diagramme.
(avec D. Pecker, E. Brugallé).
- Recherche exhaustive pour les nœuds à deux ponts (avec D. Pecker, Salsa).
- Applications en géométrie hyperbolique...