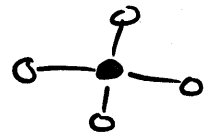


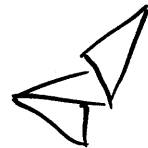
MODELES CONTRAINTS
DE
MECANIQUE STATISTIQUE
SUR RESEAUX FIXES OU
ALEATOIRES :



OBJETS DURS et



PLIAGES



E. Guiller

J. Bouttier , M. Bowick, B. Eynard, O. Golwinski

J. Jacobsen , C. Kristjansen

RESEAUX FIXES

ET

ALEATOIRES :

GENERALITES

[P1] [P2]

A - Modèles sur réseaux à 2D et Théorie conforme



$\sigma(i)$

applications σ : sommets du réseau $\rightarrow$ cible

ponds fonctionnel:

$$e^{-\frac{1}{kT} E(\{\sigma\})}$$

↑
énergie

- Limites (1) Thermodynamique = grande taille
(2) Continue = pas du réseau $\rightarrow 0$

Fonction de Partition

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} e^{-\beta E(\{\sigma\})}$$

a des singularités dans la limite (1) (2)

$\Rightarrow$ PHENOMENES CRITIQUES, EXPOSANTS

Description continue = par théorie des champs

$\sigma(i) \rightsquigarrow \phi(x)$ champ

Points critiques $\rightsquigarrow$ Théories Conformes (CFT)
Catalogue des exposants critiques

Charge centrale

$$c = 1 - \frac{6(p-q)^2}{pq}$$

$$pq=1 \in \mathbb{N}^*$$

dimensions des opérateurs

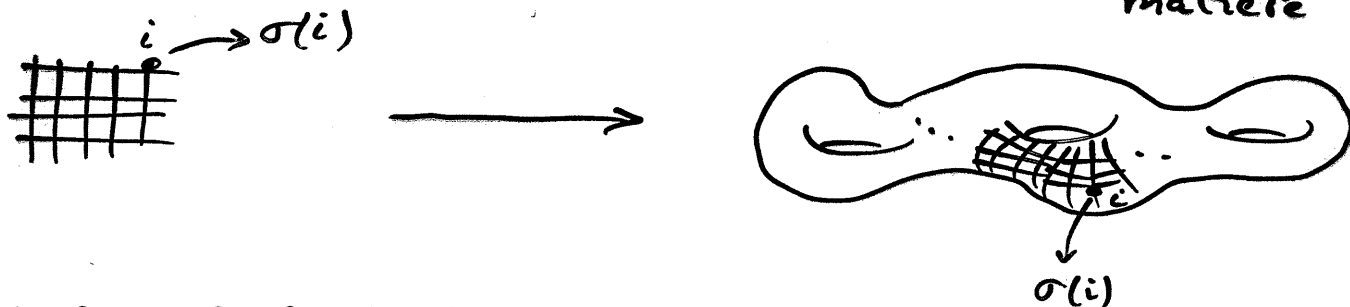
$$h_{r,s} = \frac{(pr-qs)^2 - (p-q)^2}{4pq} \quad r,s \in \mathbb{N}^*$$

Exemple $f = \lim \log Z \quad f|_{\text{sing}} \sim (T - T_c)^{2-\alpha}$

α = exposant thermique = $\frac{1-2h}{1-h}$, h dimension de l'opérateur thermique de la CFT.

B - GRAVITE QUANTIQUE à 2D

Relativité Générale $\rightarrow$ quantifier les interactions espace-matière



LA SOMME STATISTIQUE INCLUT LES FLUCTUATIONS QUANTIQUES DU RESEAU $\rightarrow$ SURFACES ou PAVAGES ALEATOIRES

$$Z = \sum_{\substack{\text{Pavages } \pi \\ \text{convexes} \\ \text{espace}}} N^{\chi(\pi)} g^{A(\pi)} \sum_{\sigma: \pi \rightarrow \text{Cible}} e^{-\beta E_{\pi}(\sigma)}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 Caract. d'Euler Aire Matière
 Action d'Einstein de la Gravité $\longleftrightarrow$ CFT
 sur le pavage π

- Limite Planaire $N \rightarrow \infty$ $\chi = 2-2g$ $h=0$ genre zéro.
- Singularités en $g \rightarrow g_c$; exposants de la gravité
- Si la matière est aussi critique $T \rightarrow T_c$, CFT avec c

Alors

$$Z|_{\text{sing}} = (g_c - g)^{2-\gamma}$$

$$\gamma = \frac{c-1 - \sqrt{(1-c)(25-c)}}{12}$$

KPZ '88

Somme sur les pavages $\leadsto$ classes conformes de métriques
 $\leadsto$ Théorie des champs de Liouville + CFT

les opérateurs de la CFT sont "habillés" par la gravité $\rightarrow$ acquièrent des "dimensions gravitationnelles"

Ex. fonctions de corrélation $\phi_{h_i} \rightarrow \tilde{\phi}_{h_i}$

$\xrightarrow{\text{CFT}} \xrightarrow{\text{CFT+gravité}}$

$$\langle \tilde{\phi}_{h_1} \tilde{\phi}_{h_2} \dots \tilde{\phi}_{h_n} \rangle \sim (g_c - g)^{\sum_i (\Delta_i - 1) + 2 - \gamma}$$

$$\Delta = \frac{\sqrt{1-c+24h} - \sqrt{1-c}}{\sqrt{25-c} - \sqrt{1-c}}$$

$\tilde{\phi}$ = version de ϕ intégrée sur les positions sur la surface $\rightarrow$ plus de notion de distance. Seule l'aire subsiste.

$$Z \sim (g_c - g)^{2-\gamma}$$

$\Downarrow$

$$Z_A \sim \frac{g_c^{-A}}{A^{3-\gamma}}$$

$\downarrow$
 aire fixée A
 grande

COMBINATOIRE
ASYMPTOTIQUE
DES PAVAGES +
MODELES de MATIERE

Exemple: Gravité Pure: pavages aléatoires, sans matière

$$\gamma = -\frac{1}{2}$$

Toutes cartes planaires enracinées $\sim \frac{\beta^n}{n^{5/2}}$

$n = \# \text{ sommets} = \text{Aire } A$

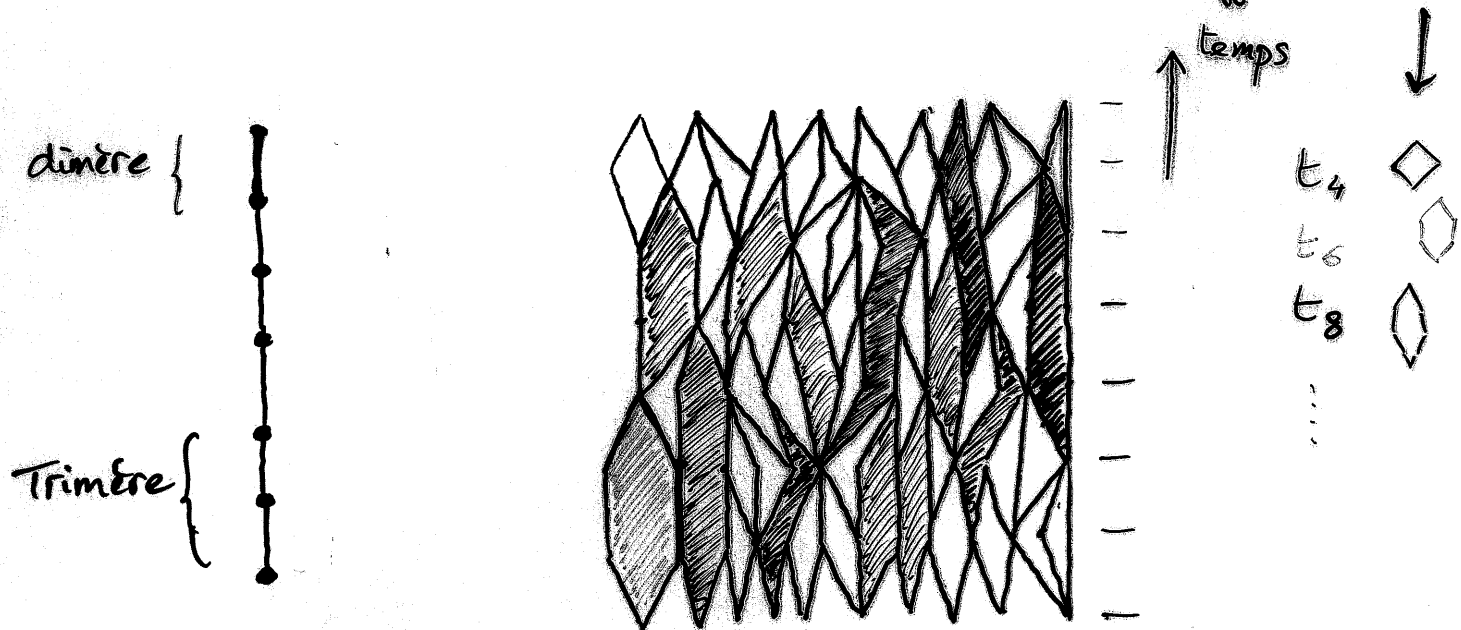
$$A Z_A \sim g_c^{-A} / A^{5/2}$$

$\uparrow$
 enracinement

! $\nearrow$

C - GRAVITE LORENTZIENNE (1+1 dimension)

surfaces semi-aléatoires { temps régulier
espace irrégulier tuiles polygones
de différentes tailles



Multimères "durs"
à 1 Dimension
(premier plan)

$$Z_{H.D.}(\{z\})$$

poids z_i par i-mère

$$Z(\{t\})$$

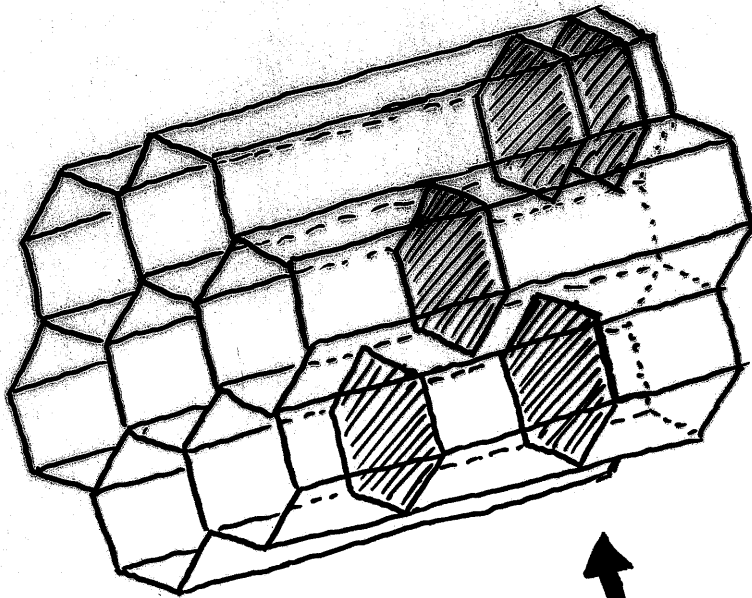
poids t_{2i+2} par z_{2i+2} gone

$$Z_{H.D.}(\{z\}) \times Z(\{t\}) = 1$$

$$z_i = -t_{2i+2}$$

- modèles multicritiques $f_{sing} \sim (t_c - t)^{\frac{1}{R+1}}$
- généralisations
- "piles de dimères" ; animaux sur réseau

EXEMPLE à 2+1 Dimensions



↑
Hexagones durs
à 2D, poids
 $z = -t / \text{hexagone}$

↑
réseaux semi-aléatoires

à 2+1 D, poids t
par plaquette (duale d'un dodécaèdre
élémentaire)

$$Z_{HH}(-t) \times Z_{2+1}(t) = 1$$

↓
Intégrable
(Baxter)

OBJETS

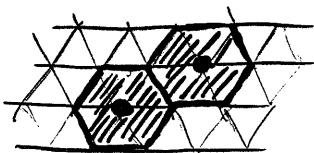
DURS

[P3]

A - PARTICULES DURES SUR RESEAUX

PARTICULES EXCLUANT LES VOISINS ; poids z / particule

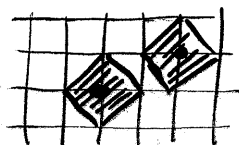
Triangulaire



Hexagones Durs

Intégrable (Baxter)

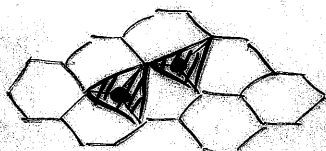
Carré



Carrés Durs

Matrice de Transfert de Coins (Baxter)

Hexagonal



TRIANGLES Durs

MTC (Baxter)

Résultats

• HEXAGONES DURS

deux points critiques $z_+ > 0, z_- < 0$

l'énergie libre par site $f = \lim_{\text{taille}} \frac{1}{\text{taille}} \log Z(z)$ a

une singularité $f \sim (z_c - z)^{2-\alpha}$

$$z_{\pm} = \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right)^5$$

(z_-)

$$\alpha = 7/6$$

singularité de Lee-Yang
(non unitaire $z_- < 0$)

$$\text{CFT } c(2,5) = -22/5$$

(z_+)

$$\alpha = 1/3$$

Modèle de Potts à 3 états
(unitaire $z_+ > 0$)

$$\text{CFT } c(5,6) = 4/5$$

= transition de cristallisation à $z \gg z_+$ le système tend à occuper 1 des 3 sous-réseaux hexagonaux

• CARRÉS / TRIANGLES durs

séries $\leadsto$ ordre 50 en 3

(z_-)

$$\alpha = 7/6 \text{ (conj. num.)}$$

Lee Yang
(non-unitaire)

$$c(2,5) = -22/5$$

(z_+)

$$\alpha = 0 \text{ (conj. num.)}$$

Ising
(unitaire)

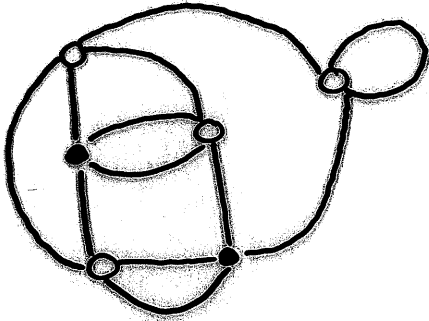
$$c(3,4) = 1/2$$

= On attend une transition de cristallisation à $z \gg z_+$ le système tend à occuper 1 des deux sous réseaux (bipartite)

B - Particules dures sur réseaux aléatoires

Particules excluant les voisins sur un graphe planaire tétravalent ; poids $\equiv$

$$\left\{ \begin{array}{l} z / \text{particule (matière)} \\ g / \text{sommet (espace)} \end{array} \right.$$



MODELE DE MATRICE A, B Hermitiennes $N \times N$

$$Z(N; g, z) = \frac{\int dA dB e^{-N \text{Tr} (AB - \frac{A^2}{2} - g \frac{A^4}{4} - g \frac{B^4}{4})}}{\int dA dB e^{-N \text{Tr} (AB - \frac{A^2}{2})}}$$

$$= \sum_{\text{graphes tétravalents}} \left\{ \begin{array}{l} \text{jeu de LEGO}^{\text{®}} \text{ avec les briques} \\ \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \text{diagramme } A^4 \\ \text{occupé} \end{array} & \begin{array}{c} \text{diagramme } B^4 \\ \text{vide} \end{array} & \begin{array}{c} \text{diagramme } AB \\ \text{(inverse de la forme quadratique } AB - \frac{A^2}{2}) \end{array} \end{array} \right\}$$

- les indices des matrices sont portés par les lignes orientées, qui bordent les faces $\Rightarrow N_F$
- les arêtes portent $1/N$
- les sommets N

$$\boxed{N_F - A + S = \chi}$$

LIMITE PLANAIRE $N \rightarrow \infty$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \log Z(N; g, z) = f(g, z) \quad \text{énergie libre planaire}$$

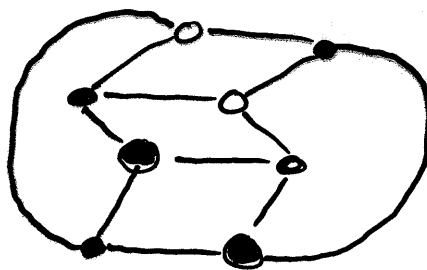
calculer f exactement ?

PARTICULES DURES SUR GRAPHS

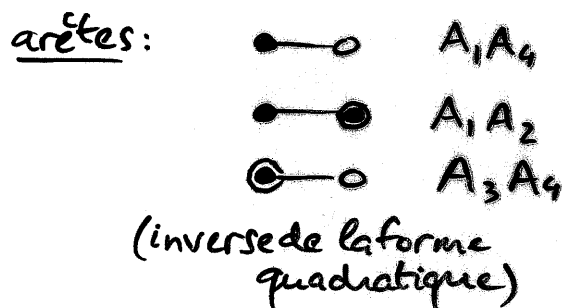
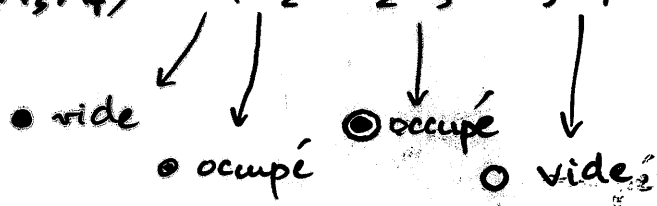
TRIVALENTS BIPARTIE

MODELE DE MATRICE

$$Z = \int dA_1 dA_2 dA_3 dA_4 e^{-N \text{Tr} V(A_1, A_2, A_3, A_4)}$$



$$V(A_1, A_2, A_3, A_4) = A_1 A_2 - A_2 A_3 + A_3 A_4 - g \left(\frac{A_1^3}{3} + \frac{A_4^3}{3} \right) - g z \left(\frac{A_2^3}{3} + \frac{A_3^3}{3} \right)$$



ETAPE 1 reduction aux valeurs propres

ETAPE 2 Polynômes bi-orthogonaux

$$(f(x), g(x)) = \int dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 e^{-NV(x_1, x_2, x_3, x_4)} f(x_1) g(x_4)$$

$$Z = \prod_{n=0}^{N-1} \frac{h_n(g; z)}{h_n(0, 0)} ; (p_n, q_m) = h_n \delta_{n,m}$$

ETAPE 3 operateurs P, Q

$$P_1 : \frac{d}{dx_1} \text{ sur } p_n$$

$$P_2 : \frac{d}{dx_4} \text{ sur } q_m$$

$$Q_1 : x_1 \text{ sur } p_n$$

$$Q_4 : x_4 \text{ sur } q_m$$

$$Q_4 = Q_1^+$$

$$Q_2 : x_2 \text{ sur } p_n$$

$$Q_3 : x_3 \text{ sur } q_m$$

$$Q_3 = Q_2^+$$

$$\boxed{\frac{P_1}{N} = Q_2 - g Q_1^2 ; Q_1 = Q_2^+ + g z Q_2^2}$$

limite planaire $N \rightarrow \infty$ $n \rightarrow \infty$ $\frac{n}{N} = z$ fixé

$$\begin{cases} Q_2 = \sigma^2 S_0(x) + \sigma^{-1} S_1(x) + \sigma^{-4} S_2(x) \\ Q_1 = \sigma + \sigma^{-2} r_1(x) + \sigma^{-5} r_2(x) + \sigma^{-8} r_3(x) \\ \sigma^+ = v \sigma^{-1} \quad v(x) = \lim \left(\frac{h_n}{h_{n-1}} \right) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ système d'équations algébriques $V = g^2 z v$

$$g^2 z^2 x = \varphi(V) = \frac{zV}{(1+2V)^2} - 2V^2(1-2V^2)$$

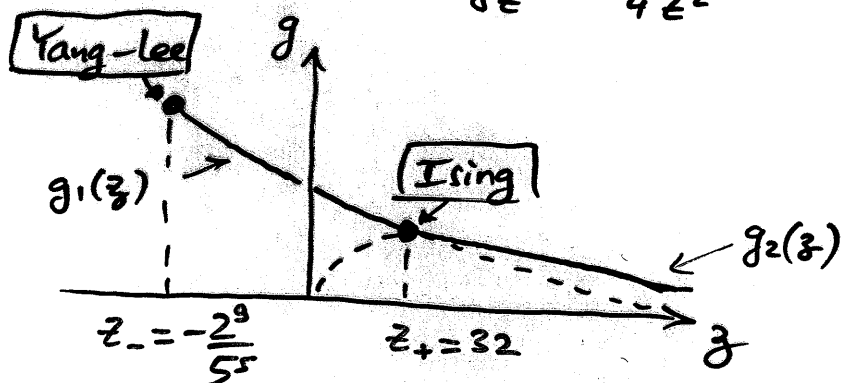
et énergie libre $f = \sum f_n g^n$ $E = g \frac{d}{dz} f = \sum e_n g^n$

avec $e_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \oint \frac{du}{2i\pi u} \frac{1}{\varphi(u)^n}$

SINGULARITES

$$\varphi'(V_c(z)) = 0 \propto (1-2V)(z - 4V(1+2V)^4) \quad 2 \text{ branches}$$

$$\begin{cases} g_1^2(z) = \frac{1+8V+10V^2}{8(1+2V)^8} ; z(V) = 4V(1+2V)^4 \\ g_2^2(z) = \frac{1}{8z} - \frac{1}{4z^2} ; V = \frac{1}{2} \end{cases}$$



Deux points critiques

$$\begin{cases} z_- \rightarrow \text{pt d'arrêt} \\ z_+ \rightarrow \text{croisement} \end{cases}$$

Aux deux points, on a $\varphi''(V_c(z)) = 0 \Rightarrow$

$$\gamma(c(p,q)) = -\frac{2}{p+q-2} \quad p+q=7; p \wedge q=1$$

$$\boxed{\gamma = -\frac{1}{3}}$$

$(p,q) = (2,5)$ LEE-YANG

$(p,q) = (3,4)$ ISING (cristallisation)

Solution du modèle de matrices $N \rightarrow \infty$ (planaire)

$$\frac{d^2}{dg^2} g^3 \frac{d}{dg} f = 1 - g \frac{d}{dg} \log V$$

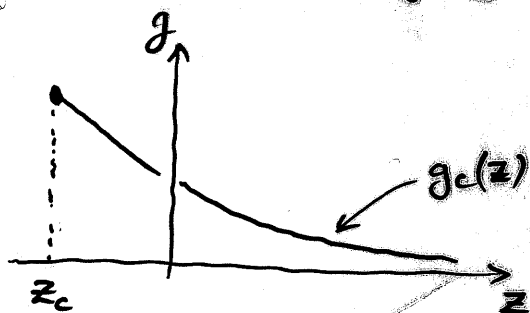
$$g = V(1 - 3zV^2) - \frac{3V^2}{(1 - 3zV^2)^2} \quad V = g + O(g^2)$$

Les singularités de f sont celles de V . Génériquement

$$(V_c - V)^2 \sim g_c - g \Rightarrow f|_{\text{sing}} \sim (g_c - g)^{2-\gamma}$$

Mais à une valeur particulière (pt multicritique) de $z = z_c$ on a :

$$(V_c - V)^3 \sim g_c - g \Rightarrow \gamma = -\frac{1}{3} \quad \text{Lee Yang} \\ C(2,5) + 2DQG$$



$$z_c = -\frac{25}{8192} (11\sqrt{5} + 25) < 0 \\ (\text{théorie non-unitaire})$$

PAS D'AUTRE SINGULARITÉ !

- La transition de cristallisation (Ising?)
est effacée par les fluctuations du réseau
- pas de bons états fondamentaux maximalement occupés
- Restreindre les graphes à être bicoloriables des sommets

LEÇON : les contraintes géométriques
ont mis en exergue l'aspect bipartie
du réseau comme élément nécessaire pour
l'existence d'une transition de cristallisation

ici : le réseau aléatoire doit s'accomoder
pour permettre l'existence générique
d'états fondamentaux cristallins

suite : le réseau va devoir s'accomoder
pour permettre l'existence générique
des degrés de liberté du modèle de
matière

B - PLIAGE D'UNE MEMBRANE FLUIDE (TRIANGULÉE)

Réseau Triangulaire $\rightarrow$ Triangulation aléatoire
(valence arbitraire des sommets)

- UNE TRIANGULATION PLANAIRE EST "PLIABLE"
 $\Leftrightarrow$ ELLE EST EULERIENNE $\equiv$ valence des sommets paire
- POUR PRESERVER les DEGRES de LIBERTE du modèle FPL(n), il faut considérer le modèle sur des graphes (duals des triangulations) BIPARTIE $\equiv$ avec sommets bicoloriables

Triangulations arbitraires (gravité ordinaire)

$$C = C_D(n) = 1 - 6e^2/1-e$$

Triangulations Euleriennes (gravité Eulerienne)

$$C = C_{FPL}(n) = 2 - 6e^2/1-e$$

(cf phénomène analogue avec les objets durs $\equiv$ seul un ensemble restreint de réseaux aléatoires permet de préserver les degrés de liberté)

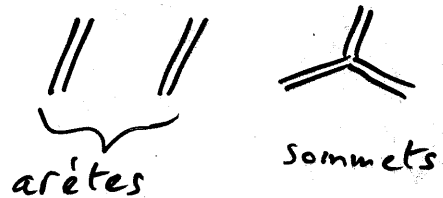
C - EXEMPLE de FPL (n=1)

$$e = \frac{1}{3} ; n = 2 \cos \pi e = 1 ; C_{FPL} = 2 - 6 \frac{e^2}{1-e} = 1$$

- Couplage à la gravité ordinaire

$$Z^{(ordin.)} = \int dA dB e^{-N \text{Tr} \left(\frac{A^2}{2} + \frac{B^2}{2} - g AB^2 \right)}$$

$N \times N$ Hermit.



on intègre sur A (Gaussien)

$$Z^{ordin} = \int dB e^{-N \text{Tr} \left(\frac{B^2}{2} - \frac{2g^2}{4} B^4 \right)}$$

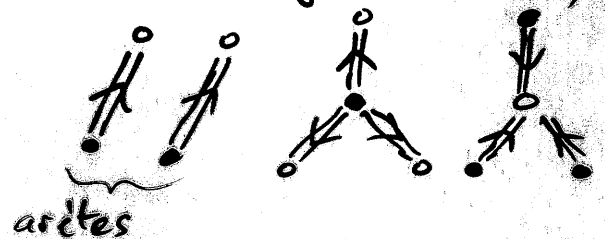
⇒ Gravité pure (pas de matière)

$C = C_D(1) = 0$

- Couplage à la gravité Eulérienne

$$Z^{Eul.} = \int dA dB e^{-N \text{Tr} (AA^+ + BB^+ - g (AB^2 + A^+ B^+))}$$

$N \times N$ complex.



on intègre sur A (Gaussien)

$$\Rightarrow Z^{Eul.} = \int dB e^{-N \text{Tr} (BB^+ - g^2 B^2 B^{+2})}$$



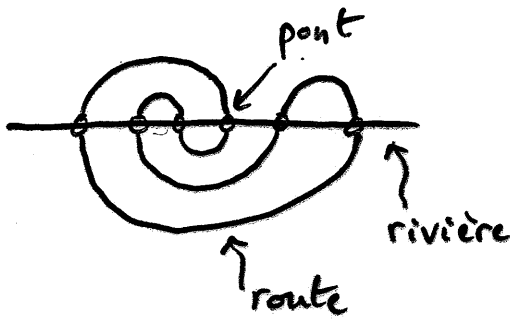
⇒ MODELE 6V + gravité
(Kazakov / P. Zinn-Justin)

$C = C_{FPL}(1) = 1$

LA SOLUTION
ASYMPTOTIQUE
DU PROBLEME DES
MEANDRES

[P7] [P8] [P9] [P10]

A - MEANDRES: ENUMERATION

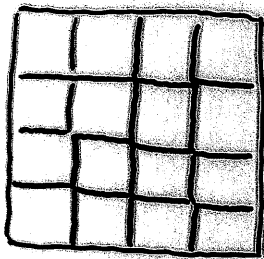


$M_n = \# \text{ configs topol. inequivalentes}$
d'une route croisant une
rivière rectiligne en $(2n)$ ponts,
fermée, sans auto-intersections

(Poincaré, Arnold, S^t Lagüe, Touchard, Lunnan, Lando, Zvonkin,
Ko, Smolinski, Physique)

$$M_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} C \frac{R^{2n}}{n^\alpha} \quad \left\{ \begin{array}{l} R \approx 3.50... \\ \alpha \approx 3.5... \end{array} \right. ?$$

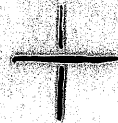
B - GAZ DE BOUCLES COMPACTES SUR LE RESEAU CARRE



2 types de boucles



2 types de vertex



croisement

tangence

6 vertex

Poids = n_1 par boucle bleue

n_2 par boucle rouge

Nom = FPL(n_1, n_2)
(Fully-Packed Loop)

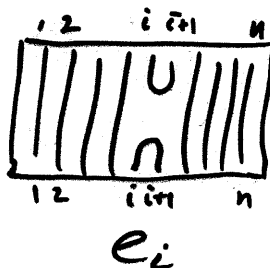
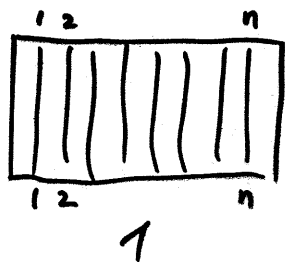
De Gier
Nienhuis
Kondev
Jacobsen
DeCon

Blöte
Batchelor
Suzuki
Young

ALGÈBRE DE TEMPERLEY-LIEB $TL_n(\beta)$

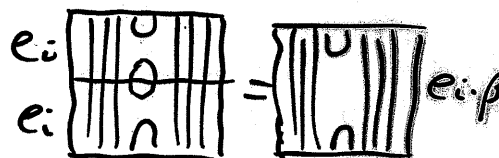
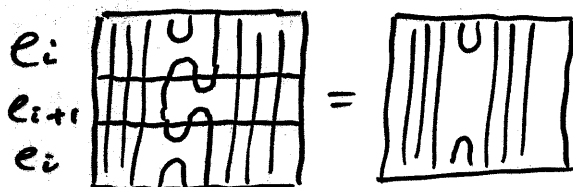
structure responsable de l'intégrabilité des modèles $O(n)$, 6V, Potts

GENERATEURS



produit = concaténation de dominos + esp. vect.

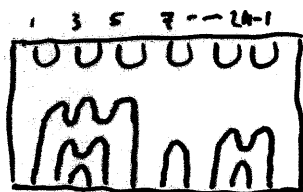
RELATIONS



$$e_i e_{i+1} e_i = e_i$$

$$e_i^2 = \beta e_i$$

IDEAUX de $TL_{2n}(\beta)$



configuration d'arche
a

$$\mathcal{I}_{2n}(\beta) = TL_{2n}(\beta) \times e_1 e_3 e_5 \dots e_{2n-1}$$

un méandre $\equiv$ 2 configs d'arches superposées $\frac{a}{b}$

$$\# \text{ compes. connexes de route} = c(a/b)$$

$$\text{produit scalaire } (a, b) = \text{Tr}(ab^+) \equiv \beta^{c(a/b)}$$

$$M_n = \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{1}{\beta} \sum_{a, b \in \mathcal{I}_{2n}(\beta)} \text{Tr}(ab^+)$$

$$G_{ab} = (a, b) \text{ matrice de Gram}$$

RESULTAT

- $FPL(n_1, n_2)$ est critique pour $-2 \leq n_1, n_2 \leq 2$
- Décrit par une CFT avec charge centrale

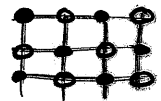
$$c_{FPL}(n_1, n_2) = c_0(n_1) + c_0(n_2) + 1$$

$$c_0(n_i) = 1 - \frac{6e_i^2}{1-e_i} ; n_i = 2\cos(\pi e_i)$$

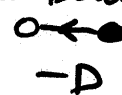
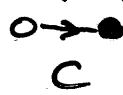
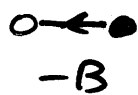
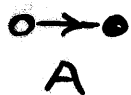
$c_{FPL} = 3 - qqch \Rightarrow 3$ champs scalaires
 $\Rightarrow$ degré de liberté $\in \mathbb{R}^3$ (variable de hauteur)

VARIABLE DE HAUTEUR ($n_1 = n_2 = 2$)

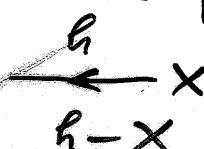
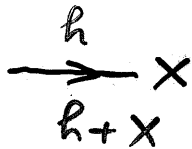
ETAPE 1 Bicolorier les sommets du réseau



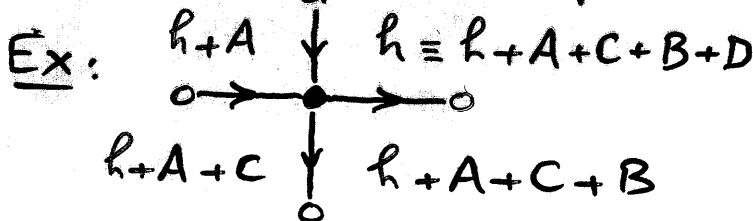
ETAPE 2 Variable d'arête après orientation des boucles
 (Σ orientations $\Leftrightarrow n_1 = n_2 = 2$ par boucle)



ETAPE 3 Variable de face par règle d'ampère



ETAPE 4 Compatibilité pour chaque vertex



$$\Leftrightarrow \boxed{A + B + C + D = 0}$$

4 vecteurs $\in \mathbb{R}^3$

$$\Rightarrow \boxed{h \in \mathbb{R}^3}$$

NB: modèle "dense"

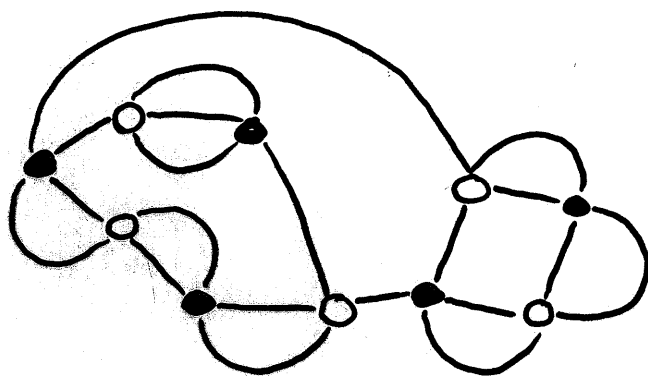
$$\boxed{C+D=0} \quad \boxed{A+B=0} \quad \boxed{h \in \mathbb{R}^2}$$

$$c_{dense} = c_{FPL} - 1$$

C - FPL(n_1, n_2) et Gravité Quantique à 2D

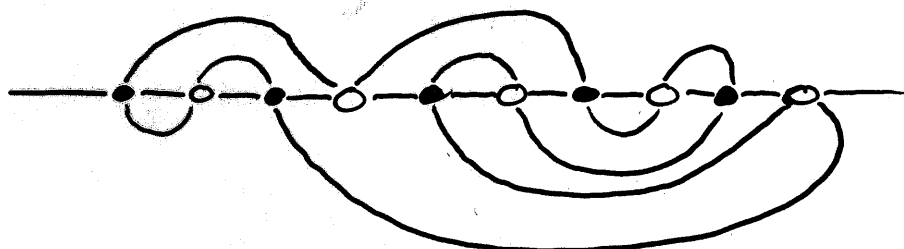
LA Bicoloration des sommets était cruciale pour une bonne définition des variables de hauteur

Donc FPL(n_1, n_2) sur des graphes tétravalents bipartite



une rivière, une route $\Leftrightarrow \begin{cases} n_1 \rightarrow 0 \\ n_2 \rightarrow 0 \end{cases}$

$$C_{\text{FPL}}(0,0) = 1 - 2 - 2 = -3$$



MEANDRES "TANGENTS"

$$\gamma(-3) = -\frac{1+\sqrt{7}}{3}$$

$$T_n \sim \frac{8^{2n}}{n^\beta} ; \quad \beta = 2 - \gamma = \frac{7+\sqrt{7}}{3}$$

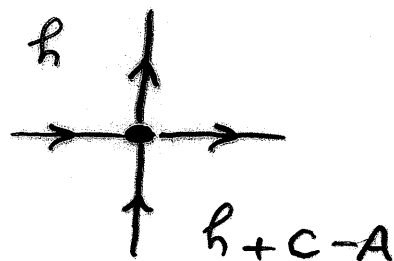
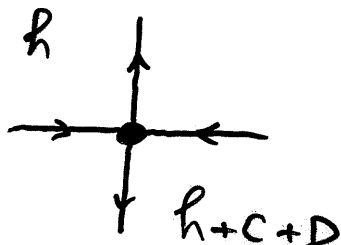
$2n$ = "aire" (# carrés dans la quadrangulation duale)

β = exposant de configuration

D - MEANDRES

Pour engendrer les "vrais" meandres (sans points tangents) il faut interdire le vertex tangent

①



diagonalement

$$h \rightarrow h \pm (A+B)$$

(1 direction)



$$h \rightarrow h \pm (A-C)$$

$$h \pm (B+C)$$

(2 directions)

en éliminant ce vertex, on réduit la dimension de 1 pour l'espace des hauteurs $\Rightarrow h \in \mathbb{R}^2$

$$C = C_{FPL}(0,0) - 1 = -4$$

② Autre solution: utiliser des graphes arbitraires, non nécessairement bipartie $\Rightarrow$ plus de distinction $\int \bullet$

$$\Rightarrow \begin{cases} A \text{ et } -B & \text{indistinguables} \\ C \text{ et } -D & \text{également} \end{cases}$$

$$A+B = C+D = 0$$

$$\Rightarrow h \in \mathbb{R}^2 \text{ de facto.}$$

Modèle dense DPL(n_1, n_2)

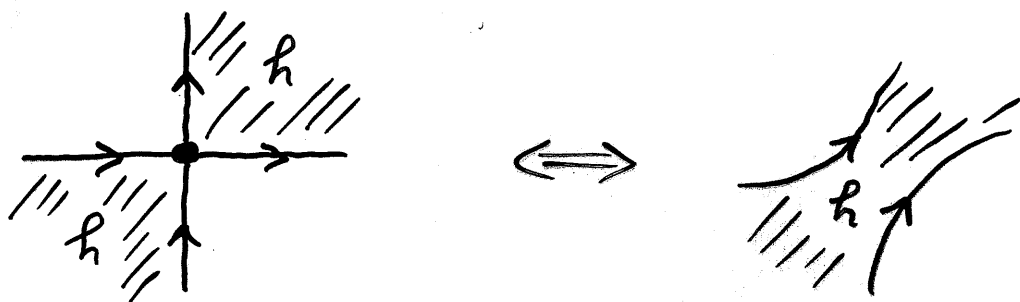
$$C_D(n_1, n_2) = C(n_1) + C(n_2) = C_{FPL}(n_1, n_2) - 1$$

Konder - Jacobsen

$$C_D(0,0) = -2 - 2 = -4$$

Problème = que faire du vertex tangent ?

Réponse = rien, il ne compte pas (non pertinent)



Les faces SE et NO ont la même hauteur, identique à la situation où elles communiqueraient

La présence ou l'absence du vertex tangent n'affecte pas l'universalité (au contraire du cas bipartite)

Dans les deux cas nous obtenons $C = -4$ pour la classe d'universalité des méandres

$$\gamma(-4) = -\frac{5 + \sqrt{145}}{12}$$

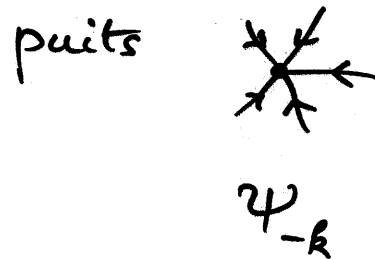
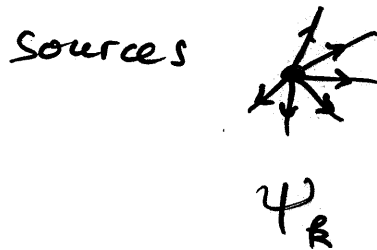
$$M_n \sim \text{const.} \frac{R^{2n}}{n^\alpha} ; \alpha = 2 - \gamma = \frac{29 + \sqrt{145}}{12}$$

QED

E - AUTRES NOMBRES "Meandresques"

Nous avons identifié la théorie des champs effective décrivant les grands méandres $(C=-4) + 2DQG$

• Opérateurs de création de rivières



Ex: $\langle \psi, \psi_{-1} \rangle = \sum_{n \geq 1} g^n \# \left\{ \text{diagram of two circles with a horizontal segment connecting them} \right\} \sim (g_c - g)^{2\Delta, -2}$

= meandres avec (rivière = segment) $\cong$ 

PLIAGE COMPACT D'UNE
BANDE DE TIMBRES

$\Leftrightarrow$ SEMI-MEANDRES

$$\bar{M}_n \sim \text{const} \frac{R^n}{n^{\bar{\alpha}}}; \quad \bar{\alpha} = 1 + \frac{\sqrt{11}}{24} (\sqrt{5} + \sqrt{29})$$

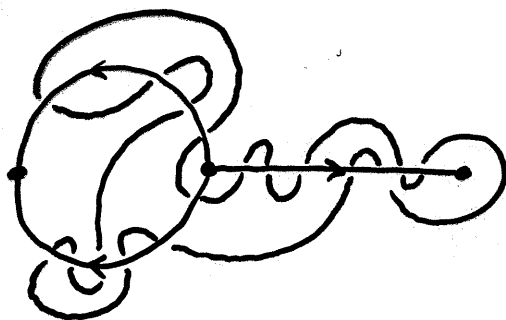
En général ψ_R a dimension conforme $h_R = \frac{R^2 - 4}{32}$
dimension "habillée"

$$\Delta_R = \frac{\frac{1}{2} \sqrt{3R^2 + 8} - \sqrt{5}}{\sqrt{29} - \sqrt{5}}$$

KPZ nous dit $\langle \psi_{R_1} \dots \psi_{R_n} \rangle \sim \frac{R^{2A}}{A^{\alpha(R_1, \dots, R_n)}}$
Aire fixée A

$$\alpha(R_1, \dots, R_n) = 1 + \sum_i (\Delta_{R_i} - 1) + 2 - \gamma$$

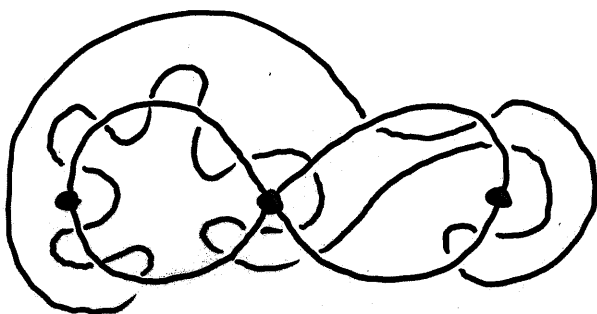
"CERISE"



$$\langle \psi_3 \psi_{-2} \psi_{-1} \rangle$$

$$\alpha = \frac{1}{48} (\sqrt{5} + \sqrt{29}) (\sqrt{11} + \sqrt{35})$$

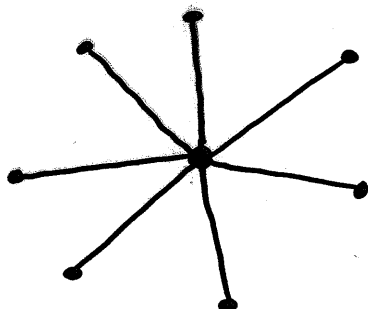
"HUIT"



$$\langle \psi_4 \psi_{-2} \psi_{-2} \rangle$$

$$\alpha = \frac{1}{24} (\sqrt{5} + \sqrt{29}) (\sqrt{5} + \sqrt{14})$$

"ETOILE"

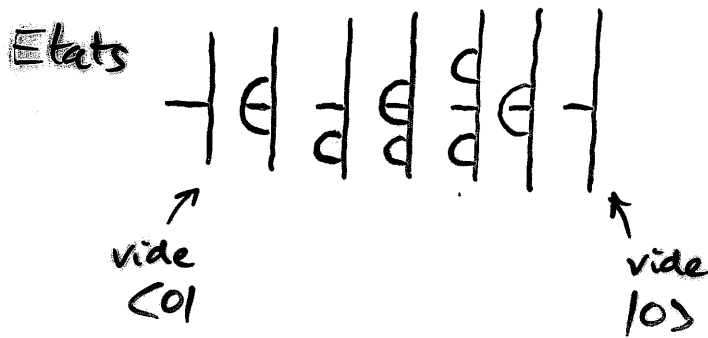
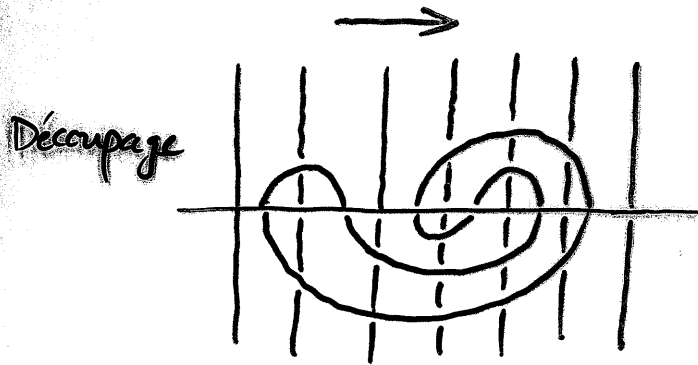


$$\langle \psi_k (\psi_{-1})^k \rangle$$

$$\alpha = \frac{1}{24} \left(\frac{k}{2} \sqrt{11} + \frac{1}{2} \sqrt{3k^2 + 8} - \sqrt{5} - (k-2) \sqrt{29} \right) (\sqrt{5} + \sqrt{29})$$

F - VERIFICATIONS NUMERIQUES

Méthode de Matrice de Transfert (Jensen / Jensen Guttman)



$$M_n = \langle 0 | T^{2n} | 0 \rangle$$

↓
matrice de transfert

$$T = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}$$

Résultats: (PDF, Guatter, Jacobsen)

Meandres $\rightarrow 2n = 48$, exact $\alpha = 3.421$

Semi-meandres $\rightarrow n = 33$, exact $\bar{\alpha} = 2.0532$

Huit $\rightarrow 2n = 44$, exact $\alpha_{\text{huit}} = 1.88$

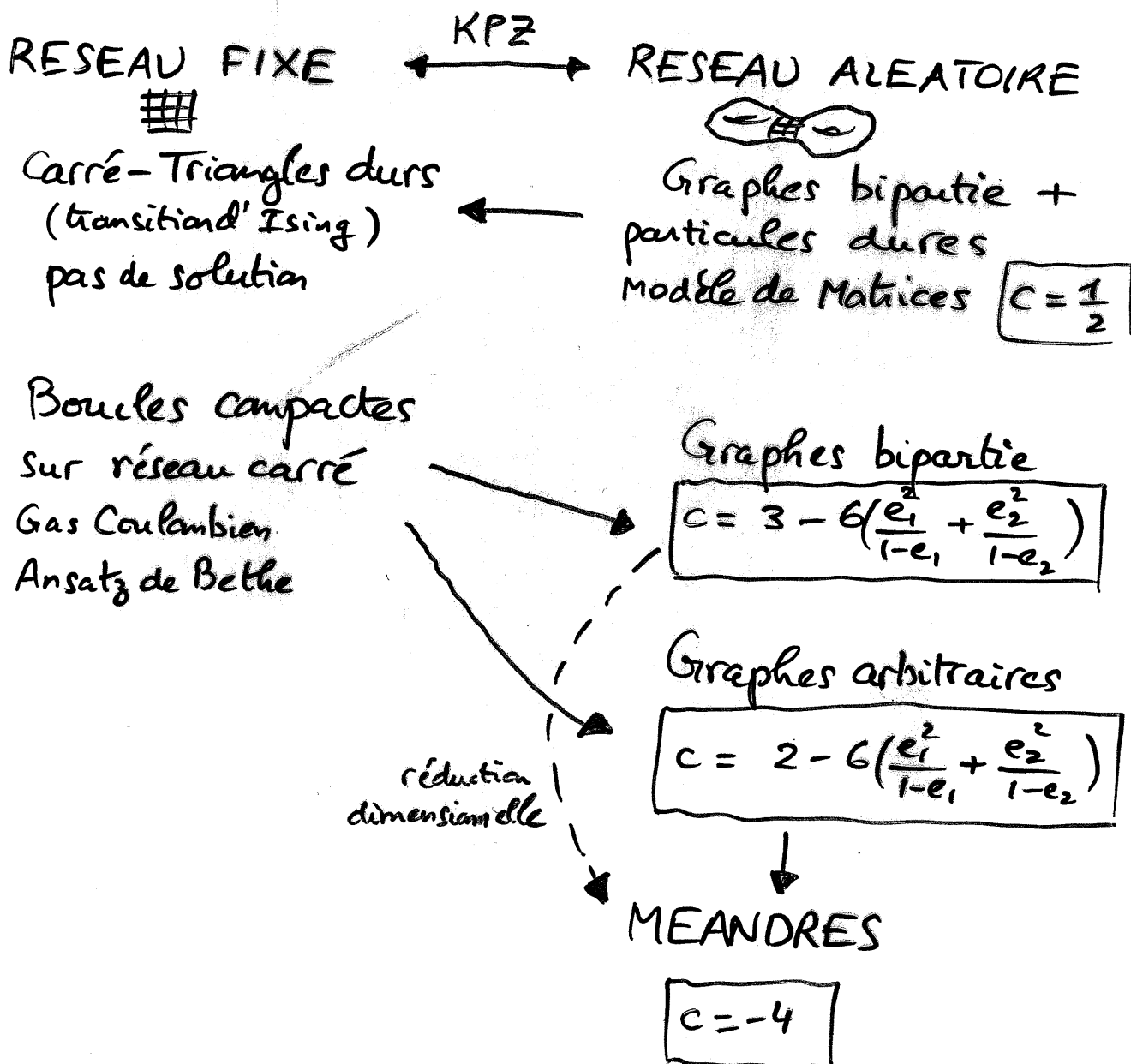
Tangence / ou pas $\rightarrow 2n = 44$, exact $\alpha^{\text{tan}} = \alpha (10^{-3})$

(aussi Jensen - Guttman)

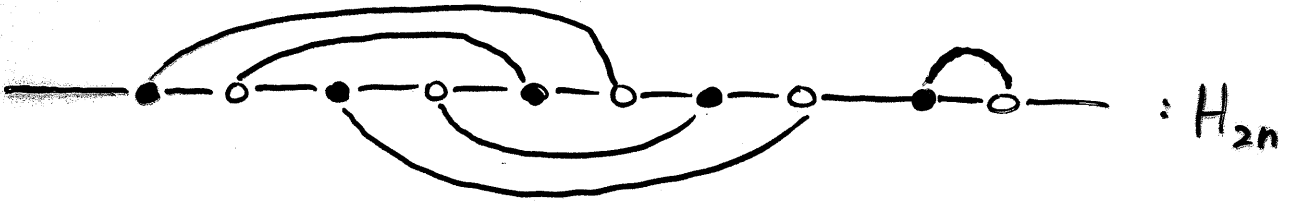
CONCLUSION

Le couplage matière - gravité et l'application de la formule de KPZ peuvent être délicats

Règle d'or = toujours préserver les degrés de liberté (hauteurs ici) // Prix à payer = restreindre éventuellement les pavages aléatoires (bipartie ici)



UN PETIT PROBLEME OUVERT



- les arches ne connectent que
 - pas d'intersections
- 

CYCLE HAMILTONIEN SUR TRIANGULATION
BICOLORIEE (dual)

$$H_{2n} \sim \text{const} \frac{\Lambda^{2n}}{h^\alpha} ; \alpha = \frac{13 + \sqrt{13}}{6}$$

philippe@spht.saclay.cnrs.fr

(explication: $C = C_{FPL}(n=0) = -1$ par couplage de FPL($n=0$) à la gravité Eulerienne)

$$\sum_{m=0}^n \binom{2n}{2m} c_{n-m} c_m = c_n c_{n+1}$$

$$C_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$$