Comment Doron Zeilberger énumère des familles de polyominos

Dominique Gouyou-Beauchamps

LRI (CNRS & Université Paris Sud)

3 novembre 2003

Le calcul ombral en un transparent

Exercice : prouver que

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k \tag{1}$$

si et seulement si

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a_k \tag{2}$$

Preuve ombrale : soit $a = b + 1$. La formule du binôme donne :

$$a^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k$$

et aussi, puisque $b = a - 1$:

$$b^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a^k$$

Maintenant, tranformez les exposants en indices.

Définir une fonctionnelle linéaire (l'ombre) A sur l'espace linéaire des polynômes par son action sur les monômes : $A(x^n) := a_n$. Symétriquement, $B(x^n) := b_n$. L'équation (1) établit que $A(x^n) = B((x+1)^n)$ pour tout n. Par linéarité, $A(p(x)) = B(p(x+1))$ pour tout polynôme $p(x)$, et donc $B(q(x)) = A(q(x-1))$ pour tout polynôme $q(x)$. Si $q(x) = x^n$, on obtient (2).

Doron Zeilberger

The Umbral Transfer-Matrix Method. I. Foundations. J. Comb. Theory Ser. A 91 (2000), 451-463.

The Umbral Transfer-Matrix Method. II. Counting Plane Partitions.

The Umbral Transfer-Matrix Method. III. Counting Animals.

The Umbral Transfer-Matrix Method. IV. Counting Self-Avoiding Polygons and Walks. Elec. J. Comb. 8(1) (2001), R28.

The Umbral Transfer-Matrix Method. V. The Goulden-Jackson Cluster Method for Infinitely Many Mistakes.

Un graphe orienté :

- V, un ensemble infini de sommets
- possibilité d'arrêtes multiples
- V est partionné en une union finie de familles de sommets $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$
- chaque famille v_i $(i \in 1, 2, \cdots, n)$ est paramétrisée par l_i variables $(a_1, a_2, \cdots, a_{l_i})$ sur un sous-ensemble D_i de $\{0, 1, 2, 3, \cdots\}^{l_i}$
- donc $V = \cup_{i=1}^{n} \cup_{(a_1, \cdots, a_{l_i}) \in D_i} v_i(a_1, \cdots, a_{l_i})$
- pour chaque paire de sommets v_i et v_j, il y a $K(i, j) \geq 0$ types d'arêtes
- $E_{i,j}^{(k)}(a_1, \cdots, a_{l_i})$ est l'ensemble des arêtes de type k sortant du sommet $v(a_1, \cdots, a_{l_i})$
- une arête de $E_{i,j}^{(k)}(a_1, \cdots, a_{l_i})$ allant au sommet $v(b_1, \cdots, b_{l_j})$ a un poids noté

$$W_{i,j}^{(k)}(a_1, \cdots, a_{l_i}; b_1, \cdots, b_{l_j})$$

- le poids $W(P)$ d'un chemin P est la somme des poids des arêtes qui le compose
- on veut calculer la série énumératrice du poids de tous les chemins

$$\sum_P q^{W(P)}$$

  soit explicitement, soit en en calculant les N premiers termes.

Les opérateurs de Rota atomiques

$Z(q)(x_1, \cdots, x_r)$ est l'anneau des séries formelles en r variables dont les coefficients sont dans l'anneau des séries formelles en q à coefficients entiers.

Un *opérateur de Rota atomique* est un opérateur de $Z(q)(x_1, \cdots, x_r)$ dans $Z(q)(y_1, \cdots, y_s)$ de la forme

$$T[f(x_1, \cdots, x_r)] = R(q, y_1, \cdots, y_s) \\ D_{x_1}^{\alpha_1} \cdots D_{x_r}^{\alpha_r} f(x_1, \cdots, x_r)\big|_{\{x_1=m_1, \cdots, x_r=m_r\}}$$

où $R(q, y_1, \cdots, y_s)$ est une fonction rationnelle en $\{q, y_1, \cdots, y_s\}$, $D_{x_1}, \cdots, D_{x_r}$ sont des opérateurs de dérivation, $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ des entiers non négatifs et $m_1, \cdots, m_r$ des monômes en $\{q, y_1, \cdots, y_s\}$.

$$f(x_1, x_2) \rightarrow \frac{q^3 y_1 y_2 y_3}{(1 - q y_1)(1 - q y_1 y_2 y_3)} \\ D_{x_1} D_{x_2}^3 f(y_1 y_2 y_3, q y_3)$$

Les opérateurs de Rota

Un *opérateur de Rota* est une somme d'opérateurs de Rota atomiques.

L'axiome ombral

Pour toute paire de sommets v_i et v_j et pour toutes les arêtes de type $k \in K(i,j)$ les reliant, on associe un opérateur de Rota atomique nommé $Q_{i,j}^k$ et défini sur la base des monômes par :

$$x_1^{a_1} \cdots x_{l_i}^{a_{l_i}} \to \sum_{(b_1,\cdots,b_{l_j}) \in E_{i,j}^k(a_1,\cdots,a_{l_i})} q^{W_{i,j}^{(k)}(a_1,\cdots,a_{l_i};b_1,\cdots,b_{l_j})} y_1^{b_1} \cdots y_{l_j}^{b_{l_j}}$$

L'opérateur de transition

L'*opérateur de transition $P_{i,j}$* d'un sommet v_i vers un sommet v_j $(1 \leq i, j \leq n)$ est défini par :

$$P_{i,j} = \sum_{k \in K(i,j)} Q_{i,j}^k$$

Le *mishkal* d'un chemin P qui se termine en $v_i(a_1, \cdots, a_{l_i})$ est $q^{W(P)} x_1^{a_1} \cdots x_{l_i}^{a_{l_i}}$.

Le *mishkal total* de tous les chemins qui se terminent en v_i est

$$F_i(q; x_1, \cdots, x_{l_i}) = \sum_P mishkal(P)$$

où la somme est prise sur l'ensemble infini des chemins qui se terminent en v_i.

Le système fondamental

$$F_j = [j \in Start] + \sum_{i=1}^{n} P_{i,j} F_i$$

La série énuératrice des poids est

$$\sum_{j \in Finish} F_j(q; 1, \cdots, 1)$$

Pour chaque $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, les variables $x_1, \cdots, x_{l_i}$ sont des variables *catalytiques*.

On peut mettre les poids sur les sommets au lieu de les mettre sur les arêtes.

Le schéma ombral

$$F_i = A_i + \sum_{j=1}^{n} Q_{j,i} F_j$$

où les $F_i(x_1, \cdots, x_{l_i})$ sont des séries formelles inconuues et les $Q_{j,i}$ des opérateurs de Rota explicites.

Les partitions d'entiers

Un seul sommet v, paramétré les entiers positifs. Le sommet $v(a)$ aura le poids a.

Une partition $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k$ est représentée par un chemin $v(a_1) \to \cdots \to v(a_k)$.

La variable catalytique sera x qui comptera le nombre de part ou la taille de la plus grande part.

Le mishkal du chemin $v(a_1) \to \cdots \to v(a_k)$ sera $q^{a_1+\cdots+a_k} x^{a_k}$.

A partir d'un sommet $v(b)$, on peut atteindre tous les sommets $v(a)$ avec $a \geq b$.

L'opérateur $P_{1,1}$ agit sur le monôme x^b de la façon suivante :

$$P_{1,1}(x^b) = \sum_{a \geq b} q^a x^a = \frac{q^b x^b}{1 - qx}$$

Donc

$$P_{1,1}(f(x)) = \frac{f(qx)}{1 - qx}$$

Le schéma ombral est

$$f(x) = \frac{qx}{1-qx} + \frac{f(qx)}{1-qx}$$

Si on pose $g(x) = 1 + f(x)$, on obtient

$$g(x) = \frac{g(qx)}{1-qx}$$

et donc

$$g(x) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^i x}$$

$$g(1) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^i}$$

Les partitions planes à deux lignes

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1} & \geq & a_{1,2} & \geq & \cdots & \geq & a_{1,r} & \geq & 0 \\ a_{2,1} & \geq & a_{2,2} & \geq & \cdots & \geq & a_{2,r} & \geq & 0 \end{array}$$

et $a_{1,i} \geq a_{2,i} \geq 0$ pour $i = 1, 2, \cdots, r$.

La variable t compte le nombre de colonne.

Un seul sommet v, paramétré par une paire d'entiers (a_1, a_2) tels $a_1 \geq a_2 \geq 0$.

A partir d'un sommet $v(b_1, b_2)$, on peut atteindre tous les sommets $v(a_1, a_2)$ avec $a_1 \geq b_1$ et $a_2 \geq b_2$.

Les variables catalytiques seront x_1 et x_2.

L'opérateur $P_{1,1}$ agit sur le monôme x^b de la façon suivante :

$$P_{1,1}(x_1^{b_1} x_2^{b_2}) = t \sum_{a_1, a_2} (qx_1)^{a_1} (qx_2)^{a_2}$$

où la somme est prise sur toutes les paires (a_1, a_2) telles que $a_1 \geq a_2 \geq 0$, $a_1 \geq b_1$ et $a_2 \geq b_2$.

$$P_{1,1}(x_1^{b_1}x_2^{b_2}) = t\frac{(qx_1)^{b_1}(qx_2)^{b_2} - (q^2x_1x_2)^{b_1}}{(1-qx_1)(1-qx_2)} + t\frac{(q^2x_1x_2)^{b_1}}{(1-qx_1)(1-q^2x_1x_2)}$$

$$P_{1,1}(f(x_1,x_2)) = t\frac{f(qx_1,qx_2) - f(q^2x_1x_2,1)}{(1-qx_1)(1-qx_2)} + t\frac{f(q^2x_1x_2,1)}{(1-qx_1)(1-q^2x_1x_2)}$$

Le schéma ombral est

$$F(x_1,x_2) = \frac{t}{(1-qx_1)(1-q^2x_1x_2)}$$
$$t\frac{F(qx_1,qx_2) - F(q^2x_1x_2,1)}{(1-qx_1)(1-qx_2)} + t\frac{F(q^2x_1x_2,1)}{(1-qx_1)(1-q^2x_1x_2)}$$

Cas spécial du *MacMahon's box theorem* :

$$F(1,1) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1-q}{(q)_r (q)_{r+1}} t^r$$

où $(q)_r = (1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^r)$ et $(q)_0 = 1$.

Les compositions sans doubles descentes

$$\sum_{n=0}^{\infty} A(n) q^n$$

où $A(n)$ est le nombre de r-uplets ($r \geq 0$) d'entiers positifs $(a_1, a_2, \cdots, a_r)$ tels que $a_1 + a_2 + \cdots + a_r = n$ où on interdit les doubles descentes, c'est-à-dire $a_i > a_{i+1} > a_{i+2}$ pour $i = 1, 2, \cdots, r-2$.

Deux sommets : u indique qu'on vient de faire une montée et d qu'on vient de faire une descente.

Les deux sommets sont paramétrés par un entier.

A partir d'un sommet $u(b)$, on peut atteindre tous les sommets $u(a)$ avec $a \geq b$ et les sommets $d(a)$ avec $1 \leq a < b$.

A partir d'un sommet $d(b)$, on peut atteindre tous les sommets $u(a)$ avec $a \geq b$.

$$P_{u,u}(x^a) = \sum_{b=a}^{\infty} (qx)^b = \frac{(qx)^a}{1 - qx}$$

$$P_{u,d}(x^a) = \sum_{b=1}^{a-1} (qx)^b = \frac{qx - (qx)^a}{1 - qx}$$

$$P_{d,u}(x^a) = \sum_{b=a}^{\infty} (qx)^b = \frac{(qx)^a}{1 - qx}$$

$$P_{d,d}(x^a) = 0$$

Le schéma ombral est

$$\begin{aligned} F_u(x) &= \frac{qx}{1-qx} + \frac{F_u(qx)}{1-qx} + \frac{F_d(qx)}{1-qx} \\ F_d(x) &= \frac{qxF_u(1) - F_u(qx)}{1-qx} \end{aligned}$$

On veut $F_u(1) + F_d(1)$.

http://www.math.temple.edu/~zeilberger/utm.html

Package Maple: ROTA

ApplyUmSc(UmSch,q,n,vars)

Les animaux sur réseau carré

Un sous-ensemble connexe de points sur le réseau carré. On compte modulo la relation d'équivalence "translation".

L'ensemble d'entiers

$$\{0, 1, 2, 5, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 16\}$$

peut être représenté (modulo une translation) par la suite

$$[3, 2, 3, 2, 2, 2, 3] = [A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, A_4]$$

car elle a 4 tableaux (*boards*) (de longueurs $3, 3, 2, 3$) et trois sauts (*gaps*) (de longueurs $2, 2, 2$).

A une colonne $[A_1, B_1, A_2, B_2, \cdots, B_{k-1}, A_k]$, on donne le poids

$$(qx_1)^{A_1} y_1^{B_1} (qx_2)^{A_2} y_2^{B_2} \cdots y_{k-1}^{B_{k-1}} (qx_k)^{A_k}$$

La relation d'équivalence "être relié par la droite" (relation sur les k tableaux d'une colonne d'un animal) partitionne l'ensemble $\{1, 2, \cdots, k\}$ des indices de ces tableaux en une *partition d'ensemble non-croisée*.

La partition de type

$$\{\{\cdots, i, \cdots, k, \cdots\}, \{\cdots, j, \cdots, l, \cdots\}, \cdots\}$$

où $i < j < k < l$ est interdite.

Les interfaces

Comment une colonne M constituée de m tableaux (et $m-1$ sauts) peut être placée à gauche d'une colonne N constituée de n tableaux (et $n-1$ sauts) ?

On numérote les $2n+1$ "régions" de N de 1 à $2n+1$.

La liste de paires (une *interface*) :

$$[[a_1, b_1], [a_2, b_2], \cdots, [a_m, b_m]]$$

indique que

- le premier tableau de M commence dans la région a_1 de N et se termine b_1 de N,
- le deuxième tableau de M commence dans la région a_2 de N et se termine b_2 de N,
- $\cdots$,
- le dernier tableau de M (de numéro m) commence dans la région a_m de N et se termine b_m de N.

Donc on doit avoir

$$a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq \cdots \leq a_m \leq b_m$$

et les a_i et les b_j dans $[2n+1]$.

Il faut que chaque classe d'équivalence de la colonne N touche au moins un tableau de M sinon la connexité est détruite.

$Interfaces(m,n)$ est l'ensemble de toutes les interfaces entre une colonne à m tableaux à gauche et les n tableaux et $n+1$ sauts (y compris les deux sauts infinis en haut et en bas) de la colonne de droite.

Pour une colonne N donnée, $LegalInterfaces(m,n,N)$ est le sous-ensemble de $Interfaces(m,n)$ constitué des suites légales vers la gauche.

Pour une colonne N donnée (une partition non-croisée) et une de ses interfaces légales I, $LeftLetter(I,N)$ note la colonne M induite.

$$LeftLetter([[2,3],[4,5]],\{\{1,3\},\{2\}\}) = \{\{1\},\{2\}\}$$

$$LeftLetter([[2,3],[4,6]],\{\{1,3\},\{2\}\}) = \{\{1,2\}\}$$

Les interfaces de sauts

Pour une interface I donnée et un entier positif n, $GapInterfaces(I, n)$ toutes les interfaces de sauts compatibles avec I.

Soit A un symbole notant un entier. On pose

$$P_A(z_1, \cdots, z_m) = \Sigma\, z^{i_1} z^{i_2} \cdots z^{i_m}$$

où la somme est prise sur tous les m-uplets d'entiers positifs $(i_1, i_2, \cdots, i_m)$ tels que $i_1 + i_2 + \cdots + i_m = A$.

$P_A(z_1, \cdots, z_m) = z_1 \cdots z_m h_{A-m}(z_1, \cdots, z_m)$ où h_i est le polynôme symétrique homogène complet de degré i.

$$P_A(z_1, \cdots, z_m) = \sum_{i=1}^{A-1} P_{A-i}(z_1, \cdots, z_{m-1}) z_m^i$$

$$P_A(z_1) = z_1^A$$

$$P_A(z_1, z_2) = \frac{z_1^A z_2 - z_1 z_2^A}{z_1 - z_2}$$

$P_A(z_1, \cdots, z_m)$ est une combinaison linéaire de $z_1^A, z_2^A, \cdots, z_m^A$ avec des coefficients qui sont des fonctions rationnelles de $z_1, z_2, \cdots, z_m$.

Comment peut-on continuer chaque tableau et chaque saut de la colonne à droite vers la gauche ?

Une colonne N de n tableaux avec son poids

$$(qx_1)^{A_1} y_1^{B_1} (qx_2)^{A_2} y_2^{B_2} \cdots y_{n-1}^{B_{n-1}} (qx_n)^{A_n}$$

Une interface légale

$$[[a_1, b_1], [a_2, b_2], \cdots, [a_m, b_m]]$$

et une interface de sauts

$$[[c_1, d_1], [c_2, d_2], \cdots, [c_{m+1}, d_{m+1}]]$$

Le tableau du bas de N (la région 2) est de longueur A_1 (A_1 est symbolique, pas numérique).

Il faut trouver dans quels intervalles $[a_i, b_i]$ se trouve 2. Pour chacun de ces intervalles, cela signifie que la variable x_i "occupe de l'espace" dans le premier tableau de N (de longueur A_1). Soit X l'ensemble de ces variables x_i.

Même chose pour l'interface de sauts, avec la variable 1 associé au saut infini du bas (y_1 correspondant au saut suivant, etc). Soit Y l'ensemble des variables y_i qui "occupent de l'espace" dans le premier tableau de N.

Ainsi les régions de M qui occupent la premier tableau de N est donné par l'ensemble de variables $X \cup Y$. Chaque variable de cet ensemble doit apparaître au moins une fois dans le poids correspondant à chaque possibilité de configuration. La fonction génératrice de toutes les possibilités pour ce cas de figure est $P_{A_1}(X \cup Y)$.

On procède de la même façon pour chacun des sauts (de longueur $B_1, B_2, \cdots$) et pour les autres tableaux (de longueur $A_2, A_3, \cdots$).

Puisque chaque décision d'occupation est indépendante des autres, la fonction génératrice de toutes les possibilités de continuation est

$$P_{A_1}(.)P_{A_2}(.)\cdots P_{A_n}(.)P_{B_1}(.)P_{B_2}(.)\cdots P_{B_{n-1}}(.)$$

Aille! On a oublié $P_\infty(.)P_\infty(.)$.
Et on a oublié de substituer qx_i à x_i.

Exemple :

$N: \{\{1,3\},\{2\}\}$
Interface : $[[1,1],[1,3],[4,7]]$
GapInterface : $[[1,1],[1,1],[3,4],[7,7]]$

$$(x_1)^{A_1}y_1^{B_1}(x_2)^{A_2}y_2^{B_2}(x_3)^{A_3}Z[\{\{1,3\},\{2\}\}] \rightarrow$$

$$P_\infty(qx_1,y_1,qx_2)P_{A_1}(qx_2)P_{B_1}(qx_2,y_2)$$

$$P_{A_2}(y_2,qx_3)P_{B_2}(qx_3)P_{A_3}(qx_3)$$

$$P_\infty(qx_3)Z[\{\{1\},\{2,3\}\}]$$

On fait faire ce calcul par un ordinateur pour chaque interface et pour chaque interface de saut associée et on lui fait sommer les résultats. On obtient ainsi l'action du *schéma ombral* sur un monôme générique

$(x_1)^{A_1} y_1^{B_1} (x_2)^{A_2} y_2^{B_2} (x_3)^{A_3} Z[\{\{1,3\},\{2\}\}]$

Une matrice carrée de taille:

$$C_1 + C_2 + \cdots + C_k$$

dont les lignes et les colonnes sont indicées par les partitions non croisées des ensembles à au plus k éléments.

Les états initiaux

$$\{\{1\}\}, \{\{1\},\{2\}\}, \cdots, \{\{1\},\{2\},\cdots,\{k\}\}$$

La fonction génératrice correspondant à $\{\{1\},\{2\},\cdots,\{i\}\}$ $(1 \le i \le k)$:

$$\prod_{j=1}^{i} \frac{qx_j}{1-qx_j} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{y_j}{1-y_j}$$

Les états terminaux

$$\{\{1\}\}, \{\{1,2\}\}, \cdots, \{\{1,2,\cdots,k\}\}$$

Package Maple **ZOO**

AUSk:=AniUmSc(k,x,y,q);

ApplyUmSc(AUSk,q,n,var);

var est l'ensemble des variables catalytiques :

$$\{x[1], y[1], x[2], \cdots, y[k-1], x[k]\}$$

Le calcul de AUS2 "*takes a while*".

Pour le calcul de ApplyUmSc(AUS2,q,54,$\{x[1], y[1], x[2]\}$) : "*waiting for a few days*".

Le 54ème terme est 4829178405489339485784600027 91

Le calcul de AUS3 n'aboutit pas (pas assez de mémoire).