Élire un meneur sans dépenser trop d'énergie

Christian Lavault, Vlady Ravelomanana & JF. M.

n stations cherchent à élire un meneur.

HYPOTHÈSES:

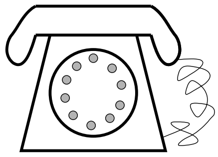
- les stations ne connaissent pas n.
- elles sont indiscernables (elles n'ont pas de nom)
- le graphe sous jacent est une n-clique

ÉCONOMIE ... deux quantités à minimiser:

- la durée totale de l'élection du meneur
- le temps passé par chaque station pour réaliser cette élection.

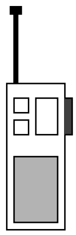
2 protocoles:

Le téléphone:



il possède deux états:
- Eteint
- Allumé: une station dont le téléphone est allumé peut écouter et émettre simultanément.

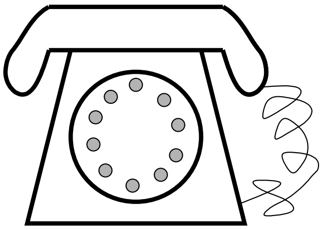
Le talkie-walkie:



il possède trois états:
- Eteint
- En écoute
- En émission

Hypothèse sur les collisions:

- si 0 ou 2 personnes ou plus émettent, ceux qui écoutent entendent du bruit.
- si 1 seule personne émet, ceux qui écoutent reçoivent le message en clair.



Rappel: NOTRE MODÈLE: 0, 2+ : bruit; 1 : clair.

Pour n connu... FACILE!

chaque individu émet avec probabilité $1/n$ et tout le monde écoute. A chaque unité de temps, l'élection a lieu avec probabilité

$$p_n = \binom{n}{1}\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1} = \left(1-1/n\right)^{n-1}.$$

C'est-à-dire, en gros, pour n grand e^{-1}. Il faut alors un nombre géométrique de tours $G(p_n)$ pour avoir l'élection:
En moyenne approximativement e, en variance approximativement $e(e-1)$.

Pour n inconnu: MOINS FACILE!!

- si chaque individu émet avec probabilité p, le nombre d'émettants est $B(n,p)$. La probabilité d'avoir une élection est de

$$np\left(1-p\right)^{n-1}.$$

Ceci est ridiculement petit si $p \ll 1/n$ ou si $p \gg 1/n$:
il faut que p soit de l'ordre de $1/n$ et répéter pour "un bon p" l'expérience autant de fois que nécessaires (un nombre géométrique de fois!).

Une première solution semi-économique

Algorithme 1.

$ronde \leftarrow 1$;

Répète

Pour k allant de 1 à $\lceil \alpha^{ronde} \rceil$ **faire**

chaque station décroche indépendamment des autres avec probabilité $1/2^k$ et émet "bonjour" et écoute
Si une unique station émet **alors**
elle est **élue** et continue à parler jusqu'à $k = \lceil \alpha^{ronde} \rceil$;
Fin Si

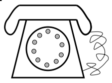
Fin Pour

À la fin de chaque ronde, toutes les stations décrochent et écoutent. Si il y a un élu, il en informe les autres.

$ronde \leftarrow ronde + 1$;

jusqu'à élection d'une station.

Une deuxième solution plus économique

Algorithme 1'. 

$ronde \leftarrow 1$;

Répète

Pour k allant de 1 à $\lceil \alpha^{ronde} \rceil$ **faire**

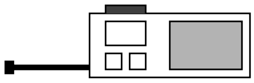
Chaque station décroche (indépendamment des autres) avec probabilité $1/2^k$ émet "bonjour" et écoute.
Si une unique station émet elle devient "candidate" **Fin Si**

Fin Pour

À la fin de chaque ronde, toutes les stations décrochent et tous les candidats émettent
Si un unique candidat émet, **alors** il est élu **Fin Si**;

$ronde \leftarrow ronde + 1$;

jusqu'à ce qu'une station soit élue



Si n était connu:

Chaque personne allume son appareil avec probabilité $2/n$ puis décide avec probabilité $1/2$ d'écouter ou d'émettre.

- Temps 1: Si une seule personne émet, ceux qui l'entendent en clair deviennent temoins.
- Temps 2: les témoins émettent: "coucou", les émetteurs du temps 1 écoutent.
- Temps 3: si le message "coucou" a été entendu, c'est qu'il y a eu une seule personne qui a parlé au temps 1 et un seul témoin. La station qui a émis au temps 1 est élue et annonce la nouvelle au temps 4.
- Temps 4: tout le monde écoute...

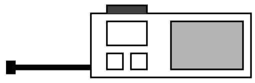
et on recommence ces 4 temps jusqu'à élection.

Dans chaque tour il y a élection si 2 personnes ont allumé leur TW, l'une ayant émis, l'autre ayant écouté. Ceci arrive avec probabilité

$$q_n = \frac{1}{2}\binom{n}{2}(\frac{2}{n})^2(1-\frac{2}{n})^{n-2} = (1-2/n)^{n-1}$$

en gros, avec probabilité e^{-2} pour n grand.

Il faut cette fois un nombre géométrique $G(q_n)$ de tours pour avoir élection.

Algorithme 2. 

ronde $\leftarrow 1$;

Répète

Pour k allant de 1 à $\lceil \alpha^{ronde} \rceil$ **faire**

Chaque station s'allume avec probabilité $1/2^k$;
Les stations allumées décident d'émettre "bonjour"
avec probabilité $1/2$ ou d'écouter avec probabilité $1/2$
Une station ayant perçu en clair un message devient
un témoin (et garde k en mémoire);

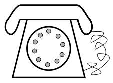
Fin Pour

Au temps $\lceil \alpha^{ronde} \rceil + 1$, chaque témoin et chaque station
ayant émis s'éveillent
Les témoins émettent les k qu'ils ont en mémoire;

S'il n'y a qu'un seul témoin, la station ayant émis au temps k
est élue.
Au temps $\lceil \alpha^{ronde} \rceil + 2$, toutes les stations écoutent (sauf l'élu);
Si il y a un élu, **alors** il émet **Fin Si**;

$ronde \leftarrow ronde + 1$;

jusqu'à ce qu'une station soit élue

Algorithme 1': 

• En moyenne l'élection dure moins de

$$c_q(\alpha)\log_2(n)$$

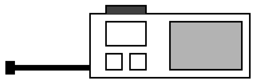
où

$$c_q(\alpha) = \frac{q\alpha^3}{(\alpha-1)\big(1-\alpha(1-q)\big)}$$

avec $q = .6305$.

Les stations ont décroché leur téléphone au plus $(1+o(1))2\log_\alpha \log_2 n$ fois

---

Algorithme 2: 

• En moyenne l'élection dure moins de

$$c_{q'}(\alpha)\log_2(n)$$

où $q' = .6176$.

Les stations ont décroché leur téléphone au plus $(1+o(1))2,5\log_\alpha \log_2 n$ fois

Élément d'analyse:

Durant la ronde numéro j sont successivement testés les probabilités $1/2, 1/2^2, \ldots, 1/2^{\lceil \alpha^j \rceil}$.

la probabilité d'avoir élection pendant cette ronde est

$$p_j = \sum_{k=1}^{\lceil \alpha^j \rceil} \frac{n}{2^k} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{n-1} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{n}{2^k} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{n-1}\right)} \times \prod_{i=1}^{\lceil \alpha^j \rceil} \left(1 - \frac{n}{2^i} \left(1 - \frac{1}{2^i}\right)^{n-1}\right.$$

RESTAURANT CHINOIS, ABR
et
PROCESSUS DE BELLMAN-HARRIS

avec B. Chauvin, T. Klein et A. Rouault