Premiers chiffres significatifs et nombres algébriques

Ilan Vardi
IHES

December 10, 1998

[summary by M.-J. Bertin]

Abstract

Let α and β, $1 \le \alpha < \beta$ and define $\log_\beta(\alpha) = \frac{\log \alpha}{\log \beta}$. Denote by $\{z\}$ the fractional part of z i.e. $\{z\} = z - \lfloor z \rfloor$. The main result is the analytic continuation in $\mathbb{C}$ of the L-series $L(s, \alpha, \beta) = \sum_{n \ge 1} \{\log_\beta \frac{n}{\alpha}\} \frac{1}{n^s}$ if and only if β is a Pisot number, α belonging to the number field generated by β and the second largest conjugate of β being real or the corresponding conjugate of α being positive.

1. Introduction

La motivation de ce travail est la “loi” probabiliste de Benford, disant que les entiers rationnels n satisfaisant

$$\beta^h \le n < \alpha \beta^h$$

pour α et β vérifiant $1 \le \alpha < \beta$, apparaissent parmi les entiers rationnels avec une probabilité $\log_\beta(\alpha) = \log \alpha / \log \beta$. En réalité, cette “loi” est fausse car $\log_{10} n$ n'est pas une suite équirépartie modulo 1.

Cependant, la loi est vraie en moyenne harmonique d'après le théorème de Duncan prouvant que

$$\frac{\sum^*_{n<x} \frac{1}{n}}{\sum_{n<x} \frac{1}{n}} \underset{x \to \infty}{\to} \log_\beta(\alpha),$$

la sommation $\sum^*$ étant faite sur les entiers n satisfaisant les inégalités

$$\beta^h \le n < \alpha \beta^h.$$

2. Les résultats

D'après un résultat de Diaconis, la limite précédente est équivalente à la formule

$$\lim_{s \to 1^+} (s-1) \zeta_{\alpha,\beta}(s) = \log_\beta(\alpha),$$

où

$$\zeta_{\alpha,\beta}(s) = \sum_{n \ge 1}^{*} \frac{1}{n^s}.$$

Par ailleurs, $\zeta_{\alpha,\beta}(s)$ peut s'écrire

$$\zeta_{\alpha,\beta}(s) = L(s, \alpha, \beta) - L(s, 1, \beta) + \zeta(s) \log_\beta(\alpha),$$

où

$$L(s,\alpha,\beta)=\sum_{n\geq 1}\{\log_\beta \frac{n}{\alpha}\}\frac{1}{n^s}$$

et $\zeta(s)$ désigne la fonction dzêta de Riemann.

Il est naturel de s'intéresser au prolongement analytique dans $\mathbb{C}$ des séries $L(s,\alpha,\beta)$ et $\zeta_{\alpha,\beta}(s)$. En effet, en 1997, Kuba a montré le lien entre la série $L(s,\alpha,\beta)$ et le nombre de points d'un réseau situés sous une courbe logarithmique. Auparavant, Hecke avait montré que la fonction $\sum_{n\geq 1}\{\theta n\}n^{-s}$ possède un prolongement analytique à $\mathbb{C}$ si θ est un irrationnel quadratique. De même, Hardy et Littlewood ont montré que le prolongement admet une frontière naturelle si θ admet une bonne approximation par des rationnels.

Avant de présenter les résultats d'I. Vardi, rappelons qu'un nombre de Pisot (resp. Salem) est un entier algébrique supérieur à 1 dont tous les autres conjugués ont un module strictement inférieur à 1 (resp. inférieur ou égal à 1 avec au moins un conjugué de module 1).

Théorème 1. *La fonction $L(s,\alpha,\beta)$ admet un prolongement analytique dans le demi-plan $\sigma=\Re s>0$. Ou bien la droite $\sigma=0$ est une frontière naturelle pour la fonction L ou bien la fonction L est méromorphe dans $\mathbb{C}$.*

Si L est méromorphe dans $\mathbb{C}$, alors β est un nombre de Pisot ou de Salem et $\alpha\in\mathbb{Q}(\beta)$.

En outre, si $\alpha\in\mathbb{Z}[1/\beta]/f'(\beta)$, où f désigne le polynôme minimal de β, le prolongement analytique dans $\mathbb{C}$ est équivalent au fait que le deuxième plus petit conjugué de β soit réel (par suite β est un nombre de Pisot).

Si $\alpha\notin\mathbb{Z}[1/\beta]/f'(\beta)$ et si β est un nombre de Pisot, l'existence du prolongement analytique dans $\mathbb{C}$ est équivalente à l'existence d'un entier m ne divisant pas la trace de $m\alpha\beta^k$ pour k assez grand. Si β est un nombre de Salem, il n'y a pas équivalence, cette dernière condition étant seulement nécessaire.

Corollaire 1. *La fonction $\zeta_{\alpha,\beta}(s)$ admet un prolongement méromorphe dans $\sigma=\Re s>0$ et ou bien la droite $\sigma=0$ est une frontière naturelle ou bien le prolongement est méromorphe dans tout le plan.*

L'existence d'un prolongement méromorphe est équivalente au fait que β soit un nombre de Pisot, α appartenant au corps de nombres engendré par β et ou bien le deuxième plus grand conjugué de β est réel ou bien $\alpha\in\mathbb{Z}[1/\beta]/f'(\beta)$ et le conjugué de α correspondant au deuxième plus grand conjugué de β est positif.

Proposition 1. *Pour tout nombre de Pisot ou de Salem β, il existe une infinité de α appartenant au corps de nombres engendré par β tels que $L(s,\alpha,\beta)$ possède un prolongement analytique dans $\mathbb{C}$.*

Bibliography

[1] Amara (Mohamed). – Ensembles fermés de nombres algébriques. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, vol. 83, n° 3, 1966, pp. 215–270.

[2] Berend (Daniel) and Frougny (Christiane). – Computability by finite automata and Pisot bases. *Mathematical Systems Theory. An International Journal on Mathematical Computing Theory*, vol. 27, n° 3, 1994, pp. 275–282.

[3] Bertin (M.-J.), Decomps-Guilloux (A.), Grandet-Hugot (M.), Pathiaux-Delefosse (M.), and Schreiber (J.-P.). – *Pisot and Salem numbers.* – Birkhäuser Verlag, Basel, 1992, xiv+291p. With a preface by David W. Boyd.

[4] Diaconis (Persi). – *Weak and strong averages in probability and the theory of numbers.* – PhD thesis, Department of Statistics, Harvard University, 1974.

[5] Duke (William). – Lattice points in cones. – Preprint, 1990.

[6] Duncan (R. L.). – A note on the initial digit problem. *Fibonacci Quarterly*, vol. 7, 1969, pp. 474–475.

[7] Fel'dman (N. I.). – Estimation of a linear form in the logarithms of algebraic numbers. *Matematicheskiĭ Sbornik. Novaya Seriya.*, vol. 76, n° 118, 1968, pp. 304–319. – (Russian).

[8] Gupta (Rajiv) and Murty (M. Ram). – A remark on Artin's conjecture. *Inventiones Mathematicae*, vol. 78, n° 1, 1984, pp. 127–130.

[9] Hardy (G. H.) and Littlewood (J. E.). – Some problems of diophantine approximation. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 22, 1923, pp. 519–533.

[10] Heath-Brown (D. R.). – Artin's conjecture for primitive roots. *The Quarterly Journal of Mathematics. Oxford. Second Series*, vol. 37, n° 145, 1986, pp. 27–38.

[11] Hecke (E.). – Über analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod Eins. *bhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, vol. 1, 1921, pp. 54–76.

[12] Hill (Theodore P.). – Base-invariance implies Benford's law. *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 123, n° 3, 1995, pp. 887–895.

[13] Hill (Theodore P.). – Le premier chiffre significatif fait sa loi. *La Recherche*, 1999, pp. 72–75.

[14] Hooley (Christopher). – On Artin's conjecture. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, vol. 225, 1967, pp. 209–220.

[15] Kahane (Jean-Pierre) and Salem (Raphaël). – *Ensembles parfaits et séries trigonométriques.* – Hermann, Paris, 1994, second edition, 245p.

[16] Knuth (Donald E.). – *The art of computer programming.* – Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1973, 2nd edition, xi+722 pp.p. Volume 3. Sorting and searching.

[17] Kuba (G.). – The number of lattice points below a logarithmic curve. *Archiv der Mathematik*, vol. 69, n° 2, 1997, pp. 156–163.

[18] Lang (Serge). – *Algebraic numbers.* – Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1964, ix+163p.

[19] Meyer (Yves). – *Algebraic numbers and harmonic analysis.* – North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1972, x+274p.

[20] Mignotte (Maurice). – Sur les conjugués des nombres de Pisot. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série I. Mathématique*, vol. 298, n° 2, 1984, p. 21.

[21] Pólya (G.). – Sur les séries entières à coefficients entiers. *Proceedings of the London Mathematica Society*, vol. 21, 1923, pp. 22–38.

[22] Salem (R.). – Power series with integral coefficients. *Duke Mathematical Journal*, vol. 12, 1945, pp. 153–172.

[23] Salem (Raphaël). – *Algebraic numbers and Fourier analysis.* – D. C. Heath and Co., Boston, Mass., 1963, x+68p.

[24] Serre (Jean-Pierre). – *Abelian l-adic representations and elliptic curves.* – A K Peters Ltd., Wellesley, MA, 1998, 199p. With the collaboration of Willem Kuyk and John Labute, Revised reprint of the 1968 original.

[25] Shanks (Daniel). – Fibonacci primitive roots. *Fibonacci Quarterly*, vol. 10, n° 2, 1972, pp. 163–168, 181.

[26] Stevenhagen (P.) and Lenstra, Jr. (H. W.). – Chebotarëv and his density theorem. *The Mathematical Intelligencer*, vol. 18, n° 2, 1996, pp. 26–37.

[27] Tenenbaum (G.). – Communication personnelle, 1998.

[28] Vardi (Ilan). – Premiers chiffres significatifs et nombres algébriques. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série I. Mathématique*, vol. 328, n° 9, 1999, pp. 749–754.