Introduction à l'itération des fonctions rationnelles

Jacques Carette
INRIA and Waterloo Maple Software

Lundi 13 décembre

[résumé par Michèle Loday-Richaud]

On s'intéresse aux orbites $\mathcal{O}_f(z)$ des points z de $\mathbb{C}$ sous l'action d'un polynôme ou d'une fraction rationnelle f. Par définition, $\mathcal{O}_f(z)$ est la suite des itérés de z sous f :

$$z_0 = z, \quad z_1 = f(z_0), \ldots, \quad z_{n+1} = f(z_n), \ldots$$

On notera f^n l'itérée n^e de f, la puissance étant relative à la composition.

1. Exemples élémentaires

Le cas non trivial le plus simple est celui de $f_0 : z \mapsto z^2$. À l'extérieur du cercle $|z| = 1$ l'orbite d'un point tend vers l'infini en restant sur une spirale "croissante". Sur le cercle l'application est la multiplication de l'angle polaire par 2. À l'intérieur du cercle l'orbite tend vers 0 en restant sur une spirale asymptote à 0.

Ensuite vient $f_\varepsilon : z \mapsto z^2 + \varepsilon$. Il existe une application holomorphe ϕ définie à l'extérieur du disque unité $\mathbb{D}$ qui conjugue f_ε à f_0. À l'extérieur de la courbe $|\phi(z)| = 1$ les orbites s'échappent à l'infini. À l'intérieur les points convergent vers un point fixe attractif, et il existe une application holomorphe sur $\mathbb{D}$ qui conjugue f_ε à $z \mapsto \lambda z$.

2. Quelques définitions

DEFINITION 1. Un *point fixe* est un point z tel que $f(z) = z$.

Un *point périodique de période* n est un point fixe de f^n. À tout point périodique de période n on associe son *multiplicateur*

$$\lambda = (f^n)'(z) = \prod_{i=1}^{n} f'(z_i).$$

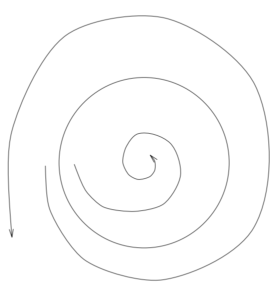

FIGURE 1. Dynamique de $z \mapsto z^2$

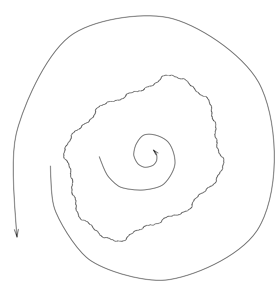

FIGURE 2. Dynamique de $z \mapsto z^2 + \varepsilon$

$$\text{On dit en outre qu'il est} \begin{cases} \text{attractif} & \text{si } |\lambda| < 1, \\ \text{superattractif} & \text{si } \lambda = 0, \\ \text{indifférent} & \text{si } |\lambda| = 1, \\ \text{répulsif} & \text{si } |\lambda| > 1. \end{cases}$$

Un *point critique* est un point z tel que $f'(z) = 0$.

DEFINITION 2. *Ensemble de Julia* J_f. C'est le complémentaire dans $\overline{\mathbb{C}}$ de l'ensemble de Fatou F_f lui-même défini comme l'ensemble des z possédant un voisinage U sur lequel la famille des itérées $f^i : U \to \mathbb{C}$, $i \in \mathbb{N}$ est normale.

Rappelons qu'une famille de fonctions $f_k : U \to \mathbb{C}$ est dite normale si de toute suite on peut extraire une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact.

Une approche intuitive de l'ensemble de Julia est donnée par les résultats suivants.

THÉORÈME 1. *J_f est l'adhérence de l'ensemble des orbites périodiques répulsives de f.*

PROPOSITION 1. *Les ensembles de Julia sont non vides, compacts et parfaits (i.e. tout point est un point d'accumulation). Ils sont en général de dimension de Hausdorff non entière.*

PROPOSITION 2. *Soit $z \in J_f$ et U un voisinage de z alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n(U) \supset J_f$.*

3. Dynamique sur l'ensemble de Fatou

Limitons-nous à l'étude au voisinage des points périodiques particuliers que sont les points fixes. En effet, d'une part tout point périodique de période n de f est un point fixe de f^n, d'autre part $J_f = J_{f^n}$ pour tout entier n car $f(J_f) = J_f = f^{-1}(J_f)$.

3.1. Cas où z est un point fixe attractif, non superattractif ($|\lambda| < 1$). On peut linéariser f et la conjugante ϕ est analytique ; de plus elle s'étend au bassin d'attraction U de z

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & U \\ {\scriptstyle\phi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\phi} \\ \mathbb{C} & \xrightarrow[z \mapsto \lambda z]{} & \mathbb{C} \end{array}$$

3.2. Cas où z est un point fixe répulsif ($|\lambda| > 1$). On peut encore linéariser f.

3.3. Cas où z est un point fixe superattractif ($\lambda = 0$). Alors f est conjugué à une fonction puissance

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & U \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathbb{C} & \xrightarrow[z \mapsto z^n]{} & \mathbb{C} \end{array}$$

où n est le degré topologique de f, c'est-à-dire la somme des degrés de son numérateur et de son dénominateur.

EXEMPLE. $f(z) = z^2 + 1/4$. L'ensemble de Julia J_f dit “le chou-fleur” est une courbe de Jordan. Le point fixe $x_0 = 1/2$ a pour multiplicateur $\lambda = 1$.

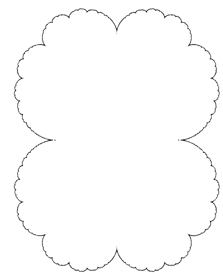

FIGURE 3. L'ensemble de Julia de $z^2 + 1/4$

En conjuguant f par la transformation homographique $z \mapsto Z = 1/(z-1/2)$ on obtient $F(Z) = Z - 1 + 1/(Z+1)$. En dehors d'un disque de rayon assez grand, en l'occurrence plus grand que $2\sqrt{2}$ F est injective et voisine de la translation $Z \mapsto Z - 1$.

On peut choisir pour domaine fondamental de F la “bande” comprise entre une verticale γ qui ne coupe pas le disque de rayon $2\sqrt{2}$ et l'image $F(\gamma)$ de celle-ci. On appelle *cylindre d'Ecalle* le cylindre obtenu en recollant γ et $F(\gamma)$.

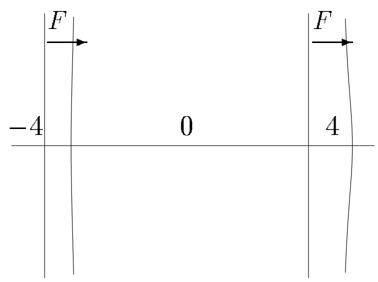

FIGURE 4. Plan des Z

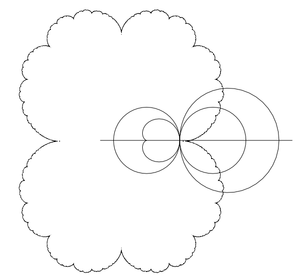

FIGURE 5. Plan des z

La dynamique s'effectue en envoyant un domaine fondamental sur le domaine fondamental contigu. De plus, il existe un domaine, réunion d'un cylindre d'Ecalle et de ses images itérées par f, appelé *pétale de Fatou* sur lequel f est conjugué à la translation $z \mapsto z - 1$

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & U \\ {\scriptstyle\phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\phi} \\ \mathbb{C} & \xrightarrow[z \mapsto z-1]{} & \mathbb{C} \end{array}$$

Si le multiplicateur $\lambda = e^{2i\pi p/q}$ est une racine de l'unité, le pétale de Fatou est à remplacer par une fleur de Fatou à q pétales, la dynamique envoyant un pétale sur le pétale “suivant”.

Le cas où $\lambda = e^{i\pi\theta}$ avec θ irrationnel se sépare en deux suivant les propriétés des dénominateurs des réduites p_n/q_n du développement en fraction continue de θ.

Dans le cas de Siegel, il existe alors des courbes conjuguées à un cercle et l'application f est conjuguée à $z \mapsto \lambda z$ sur leur intérieur appelé *disque de Siegel.*

THÉORÈME 2 (BRUNO-YOCCOZ). *Le point fixe z admet un disque de Siegel si et seulement si*

$$\sum \frac{\log q_{n+1}}{q_n} < +\infty.$$

Le cas complémentaire où $\sum \log q_{n+1}/q_n = +\infty$ est le cas de Cremer.
Les points de Siegel appartiennent à l'ensemble de Fatou, alors que les points de Cremer appartiennent à l'ensemble de Julia.

THÉORÈME 3 (SULLIVAN). *Toute composante connexe U de l'ensemble de Fatou est prépériodique, ce qui signifie qu'il existe k et n entiers tels que $f^{k+\ell n}(U) = f^k(U)$, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$.*

La démonstration est très difficile et repose sur la théorie des espaces de Teichmüller.

COROLLAIRE 1. *Si tous les points critiques sont strictement prépériodiques alors $J_f = \overline{\mathbb{C}}$.*

THÉORÈME 4. *Ou bien l'ensemble de Julia J_f est égal à $\overline{\mathbb{C}}$ ou bien il est d'intérieur vide.*

EXEMPLE. $J_f = \overline{\mathbb{C}}$ pour $f = (z^2-2)/z^2$ et $\mathring{J}_f = \varphi$ si f est un polynôme.

4. Cas particulier des polynômes

On a le théorème suivant sur la topologie de J_f.

THÉORÈME 5. *J_f est connexe si et seulement si l'orbite de tout point critique borné est bornée ; J_f est totalement disconnexe si et seulement si l'orbite de tout point critique borné est non bornée.*

Les cas intermédiaires sont horribles.

DEFINITION 3. On considère la famille des polynômes quadratiques $f_c(z) = z^2 + c$. On appelle ensemble de Mandelbrot l'ensemble M des $c \in \mathbb{C}$ pour lesquels J_{f_c} est connexe.
Pour un paramètre c à l'extérieur de M, l'ensemble de Julia J_{f_c} est totalement disconnexe.

THÉORÈME 6 (DOUADY-HUBBARD 1980). *L'ensemble M est compact, connexe et plein (i.e. son complémentaire est connexe).*

THÉORÈME 7 (SHISHIKURA). *La dimension de Hausdorff du bord de M est égale à 2.*

CONJECTURE 1. [1] *L'ensemble M est localement connexe.*

Les avancées de cette conjecture reposent en particulier sur la construction d'un modèle combinatoire pour M (cf. tableaux de Hubbard et Branner en particulier).

[1]Due à Douady et partiellement résolue par Yoccoz.