Énumération de permutations et de partitions : nouveaux résultats asymptotiques

A. M. Odlyzko
AT&T Bell Laboratories

3 Septembre 1992

[résumé par Dominique Gouyou-Beauchamps]

1. Introduction

Le but de l'exposé est d'étudier les permutations qui ont un motif interdit. Ce motif sera une permutation fixée τ sur $\{1, 2, \ldots, k\}$. Il faut donc examiner si τ apparaît dans une permutation σ sur $\{1, 2, \ldots, n\}$, c'est-à-dire examiner s'il existe une suite d'indices $1 \leq i_{\tau(1)} < i_{\tau(2)} < \cdots < i_{\tau(k)} \leq n$ tels que $\sigma(i_1) < \sigma(i_2) < \cdots < \sigma(i_k)$.

Exemple. $\tau = (1\ 3\ 2)$ apparaît dans $\sigma = (5\ 2\ 9\ 4\ 14\ 10\ 1\ 3\ 6\ 15\ 8\ 11\ 7\ 13\ 12)$ car, pour la suite d'indices $(i_1 = 1,\ i_2 = 13,\ i_3 = 11)$, la sous-suite $(\sigma(1), \sigma(11), \sigma(13)) = (5\ 8\ 7)$ est de type $(1\ 3\ 2)$ ou, pour la suite d'indices $(i_1 = 4,\ i_2 = 9,\ i_3 = 6)$, la sous-suite $(\sigma(4), \sigma(6), \sigma(9)) = (4\ 10\ 6)$ est aussi de type $(1\ 3\ 2)$ (comme bien d'autres sous-suites).

Les questions d'énumération et d'algorithmique qu'on peut se poser sont les suivantes :

(1) Pour un motif τ donné, soit $F(n, \tau)$ le nombre de permutations de $\mathfrak{S}_n$ qui ne possède pas le motif τ. Comment se comporte $F(n, \tau)$ lorsque $n \to \infty$? Est-ce-que la limite $\lim_{n\to\infty} F(n, \tau)^{1/n}$ est indépendante de τ pour une longueur k de τ fixée ?
(2) Pour un motif τ fixé, quel est le nombre maximum d'occurrences de τ dans une permutation de $\mathfrak{S}_n$ (cf. Lifschitz et Pittel [9]) ?
(3) Comment tester si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ ne contient pas τ ?
(4) Comment obtenir la liste des permutations de $\mathfrak{S}_n$ qui ne contiennent pas τ ?

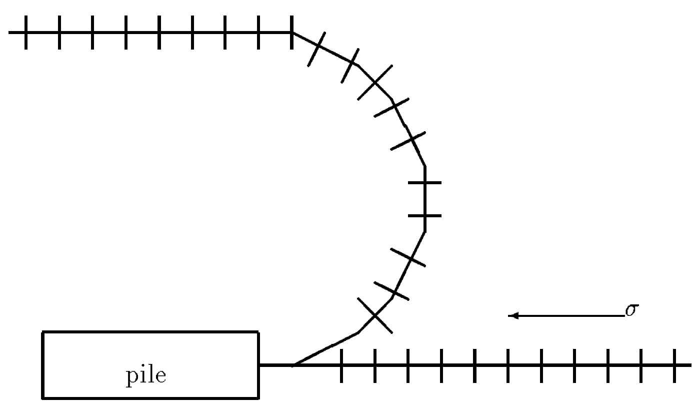

Fig. 1

Parmi les premiers travaux dans ce domaine, on peut citer le problème du tri par voie de garage ("Railroad siding") évoqué par Knuth [8] et Tarjan [19]. Ce problème peut s'énoncer ainsi : comment trier une permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$ avec une pile quand à chaque étape du tri on peut soit mettre la nouvelle lettre entrée sur la pile, soit retirer le sommet de la pile et l'envoyer sur la sortie. On suppose donc que la permutation est entrée lettre par lettre en la lisant de la droite vers la gauche et qu'elle sort triée en ordre croissant. Ceci peut être vu comme un problème de chemin de fer, comme l'illustre la figure 1.

Il est bien connu (Knuth [8]) qu'une permutation σ peut être triée de cette façon si et seulement si elle ne contient pas le motif (1 3 2).

On peut aussi se poser le problème du tri par le réseau illustré par la figure 2 (un réseau parallèle de 4 files FIFO).

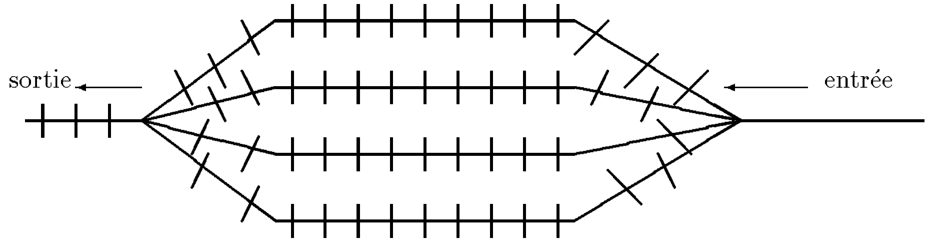

Fig. 2

Il est aussi bien connu qu'une permutation σ peut être triée par un réseau parallèle de m files si et seulement si σ ne contient pas de sous-suite décroissante de longueur supérieure ou égale à $m+1$, c'est-à-dire ne contient pas le motif $(m+1, m, m-1, \ldots, 1)$.

Sur ce sujet, on peut aussi citer les travaux récents de Dulucq, Gire et West [2], Gire [6], Even et Itai [3], Pratt [14], Simion et Schmidt [18], West [21, 22] et Zeilberger [23].

2. Sous-suites non décroissantes

À partir de maintenant, on ne considère que le motif $\tau = (1, 2, \ldots, k, k+1)$, c'est-à-dire que l'on étudie les permutations de $\mathfrak{S}_n$ qui ne contiennent pas de sous-suite croissante de longueur supérieure à k. On note $f(n, k)$ le nombre de telles permutations.

Il est bien connu que l'algorithme de Robinson-Schensted-Knuth permet de mettre en bijection une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ avec une paire de tableaux de Young standard de même forme sur $\{1, 2, \ldots, n\}$. De plus la longueur de la première ligne de ces tableaux est égale à la longueur de la plus longue sous-suite croissante de σ.

On note L_n la longueur de la plus longue sous-suite croissante d'une permutation aléatoire $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Quelle est la distribution de L_n ?

Voici quelques résultats concernant la distribution de L_n :

(1) Il existe une constante $c > 0$ telle que $\frac{L_n}{\sqrt{n}} \to c$ en probabilité lorsque $n \to \infty$ (Hammersley [7]) ;
(2) $E(L_n) \geq 2\sqrt{n}$ (Logan et Slepp [10]) ;
(3) $E(L_n) \sim 2\sqrt{n}$ lorsque $n \to \infty$ (Veršik et Kerov [20]) ;
(4) Soit $\alpha > 1/3$. Alors il existe $\beta = \beta(\alpha) > 0$ tel que $\Pr(|L_n - E(L_n)| \geq n^\alpha) \leq e^{-n^\beta}$ (Frieze [4]).

Concernant $f(n, k)$, on peut citer le résultat de Regev [15, 16, 1] : pour k fixé, lorsque $n \to \infty$,

$$f(n,k) \sim \prod_{j-1}^{k-1} j! \frac{k^{\frac{1}{2}k^2} k^{2n}}{(2\pi)^{\frac{k-1}{2}} 2^{\frac{k^2-1}{2}} n^{\frac{k^2-1}{2}}}.$$

Ce résultat est obtenu en utilisant la formule de équerres pour les tableaux de Young standard et l'intégrale de Selberg [17].

3. L'intégrale de Selberg

Si on note $\Delta = \Delta(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \prod_{1 \leq h < j \leq n}(X_h - X_j)$, l'intégrale de Selberg est donnée par :

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 |\Delta|^{2\gamma} \prod_{j=1}^{n-1} \{X_j^{\alpha-1}(1-X_j)^{\beta-1}\}\, dX_1 \cdots dX_n = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\Gamma(1+\gamma+j\gamma)\Gamma(\alpha+j\gamma)\Gamma(\beta+j\gamma)}{\Gamma(1+\gamma)\Gamma(\alpha+\beta+(n+j-1)\gamma)}.$$

On peut donner cette intégrale sous une autre forme :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |\Delta|^{2\gamma} \exp(-a \sum_{j=1}^{n} X_j^2)\, dX_1 \cdots dX_n = (2\pi)^{\frac{n}{2}} (2a)^{\frac{n}{2}(\gamma(n-1)+1)} \prod_{j=1}^{n} \frac{\Gamma(1+j\gamma)}{\Gamma(1+\gamma)}.$$

La solution de l'intégrale multiple précédente avait été conjecturée par Mehta [12] et est aussi connue sous le nom de conjecture de Mehta. Macdonald [11] a étendu cette conjecture aux groupes finis de réflexions et à d'autres groupes, la conjecture de Mehta correspondant au cas du groupe symétrique. Selberg et Bombieri ont montré dans une lettre non publiée que la preuve de la conjecture de Mehta pouvait être obtenue par des méthodes asymptotiques utilisant une intégrale de Selberg [17] plus simple, d'où le nom d'intégrale de Selberg utilisé dans ce texte.

4. Une autre méthode

Gessel [5] a prouvé que la série :

$$U_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n,k) \frac{z^{2n}}{(n!)^2}$$

était égale à :

$$U_k(z) = \det(I_{h-j}(2z))_{1 \leq h,j \leq k} \quad \text{où} \quad I_\nu(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{t\cos\theta + i\nu\theta}\, d\theta.$$

On obtient alors :

$$I_h(u) \approx \frac{e^u}{\sqrt{2\pi u}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j c(h,j)}{(2u)^j} \quad \text{lorsque} \quad u \to \infty \quad \text{avec} \quad c(h,0) = 1,$$

et donc :

$$U_k(z) \sim \frac{c(k)}{(2z)^{\lambda(k)}} \frac{e^{2kz}}{(4\pi z)^{\frac{k}{2}}}.$$

Le principe de la méthode est que sous des conditions discutées dans [13, Section 10], le comportement asymptotique à l'infini d'une fonction génératrice se traduit en une forme asymptotique des coefficients.

Principe 1. Sous certaines conditions de régularité, si $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ est une fonction entière et s'il existe C telle que

$$\left| f(z) - \frac{e^{\alpha z}}{z^k} \right| \leq C \frac{e^{\alpha |z|}}{|z|^{k+1}},$$

pour z dans un voisinage convenable de $+\infty$, alors $a_n = \frac{\alpha^{n+k}}{(n+k)!}(1 + O(\frac{1}{\sqrt{n}}))$ lorsque $n \to \infty$.

Or on peut obtenir l'égalité suivante pour $U_k(z)$:

$$\begin{aligned} U_k(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f(n,k) \frac{z^{2n}}{(n!)^2} = \det(I_{h-j}(2z))_{1\le h,j\le k} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^k k!} \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} e^{2z\sum_{j=1}^{k}\cos\theta_j} \prod_{h\neq j} \left|e^{i\theta_h} - e^{i\theta_j}\right| d\theta_1 \cdots d\theta_k. \end{aligned}$$

D'où le problème proposé :

Problème : Donner une évaluation fine de

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j=1}^{k} (\cos\theta_j)^{2n} \prod_{1\le h<j\le k} \left|e^{i\theta_h} - e^{i\theta_j}\right|^2 d\theta_1 \cdots d\theta_k,$$

pour $k, n \in Z^+$ et $1 \le k < n$.

Bibliographie

[1] Beckner (W.) et Regev (A.). – Asymptotics and algebraicity of some generating functions. *Advances in Mathematics*, vol. 65, 1987, pp. 1–15.

[2] Dulucq (S.), Gire (S.), et West (J.). – Permutations à motifs exclus et cartes planaires non séparables. *In : Formal Power Series and Algebraic Combinatorics*, éd. par Barlotti (A.), Delest (M.), et Pinzani (R.), pp. 165–178. – 1993. Proceedings of FPACS'5, Florence (Italy).

[3] Even (S.) et Itai (A.), Kohavi (Z.) et Paz (A.) (édité par). – *Theory of machines and computation*, Chapitre Queues, stacks and graphs, pp. 71–86. – New-York, Academic Press, 1971.

[4] Frieze (A.). – On the length oh the longest monotone subsequence in a random permutation. *Annals of Applied Probability*, vol. 1, n° 2, 1991, pp. 301–305.

[5] Gessel (Ira M.). – Symmetric functions and P-recursiveness. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, vol. 53, 1990, pp. 257–285.

[6] Gire (S.). – *Arbres, permutations à motifs exclus et cartes planaires : quelques problèmes algorithmiques et combinatoires.* – Thesis, Université de Bordeaux I, 1993.

[7] Hammersley (J. M.). – A few seedlings of research. *In : Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probabilities*, pp. 345–394. – 1972.

[8] Knuth (Donald E.). – *The Art of Computer Programming.* – Addison-Wesley, 1968, volume 1: Fundamental Algorithms. Second edition, 1973.

[9] Lifschitz (V.) et Pittel (B.). – The number of increasing subsequences of the random permutation. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, vol. 31, 1981, pp. 1–20.

[10] Logan (B. F.) et Slepp (L. A.). – A variational problem for Young tableaux. *Advances in Mathematics*, vol. 26, 1977, pp. 206–222.

[11] Macdonald (I. G.). – Some conjectures for root systems and finite reflexion groups. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, vol. 13, n° 6, 1982, pp. 988–1007.

[12] Mehta (M. L.). – *Random Matrices and the Statistical Theory of Energy Levels.* – Academic Press, New York, 1967.

[13] Odlyzko (A. M.). – Asymptotic enumeration methods. – Preprint, mars 1992. To appear as a chapter in the *Handbook of Combinatorics*, R. Graham, M. Grötschel and L. Lovász, (editors).

[14] Pratt (V. R.). – Computing permutations with double-ended queues, parallel stacks and parallel queues. *In : Proceedings of the Fifth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pp. 268–277. – mai 1973.

[15] Regev (A.). – Asymptotic values for degrees associated with strips of Young diagrams. *Advances in Mathematics*, vol. 41, n° 2, 1981, pp. 115–136.

[16] Regev (A.). – Young-derived sequences of s_n-characters and their asymptotics. *In : Formal Power Series and Algebraic Combinatorics*, éd. par Barlotti (A.), Delest (M.), et Pinzani (R.), pp. 381–386. – 1993. Proceedings of FPACS'5, Florence (Italy).

[17] Selberg (A.). – Bemerkninger om et multipelt integral. *Nordisk Mat. Tidskr.*, vol. 26, 1944, pp. 71–78.

[18] Simion (R.) et Schmidt (F.). – Restricted permutations. *European Journal of Combinatorics*, vol. 6, 1985, pp. 383–406.

[19] Tarjan (R. E.). – Sorting using networks of queues and stacks. *Journal of the ACM*, vol. 19, n° 2, 1972, pp. 341–346.

[20] Veršik (A. M.) et Kerov (S. V.). – Asymptotics of the planchered measure of the symmetric group and the limiting form of Young tables. *Soviet Mathematical Doklady*, vol. 18, n° 2, 1977, pp. 527–531.

[21] West (J.). – *Permutations with restricted subsequences and stack-sortable permutations.* – Thèse de PhD, MIT, 1990.

[22] West (J.). – Sorting twice through a stack. *Theoretical Computer Science*, vol. 117, 1993, pp. 303–313.

[23] Zeilberger (D.). – A proof of Julian West's conjecture that the number of two-stack sortable permutations of length n is $2(3n)!/((n+1)!(2n+1)!)$. *Discrete Mathematics*, vol. 102, 1992, pp. 85–93.