Asymptotique des suites mahlériennes : quelques exemples typiques

Philippe Dumas
INRIA Rocquencourt

7 Décembre 1992

[résumé par Philippe Dumas]

Résumé

Une suite mahlérienne (u_n) est solution d'une récurrence linéaire qui exprime u_n en fonction de u_{n-1}, u_{n-2}, ..., $u_{n/2}$, $u_{(n-1)/2}$, ..., $u_{n/4}$, etc. Ces suites apparaissent naturellement dans les problèmes de comptage liés à l'écriture binaire des entiers ou dans l'étude d'algorithmes du type "diviser pour régner" et nous nous intéressons ici à leur comportement asymptotique.

Citons deux exemples classiques qui ont suscité de nombreux articles : la suite S_n qui somme les chiffres de l'écriture en base 2 des entiers de 1 à n et la suite b_n du nombre de partitions binaires de l'entier n, à laquelle K. Mahler s'est lui-même intéressé.

Nous proposons une classification qui vise à décrire les différents comportements possibles pour une telle suite. Elle est illustrée de quelques exemples, encore fragmentaires, où l'on voit fonctionner les méthodes classiques de l'analyse asymptotique comme la méthode du col ou de la théorie analytique des nombres comme la formule de Perron.

1. Séries mahlériennes

1.1. Définition et propriétés de clôture. Nous disons qu'une série de Laurent $f(z)$ est B-mahlérienne si elle satisfait une équation de Mahler

$$c_0(z)f(z) + c_1(z)f(z^{\mathrm{B}}) + \cdots + c_N(z)f(z^{\mathrm{B}^N}) = 0$$

à coefficients des fractions rationnelles c_0, ..., c_N avec les $c_k(z)$ non tous nuls. Ici nous allons supposer que le corps de référence, $\mathbb{K}$, est $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{C}$ et pour simplifier les écritures nous allons même imposer $\mathrm{B} = 2$, ce qui recouvre presque tous les exemples naturels.

Cette définition en terme de séries formelles se traduit immédiatement en une définition pour les suites si nous remarquons que les deux opérateurs de multiplication par z et de substitution par z^2

$$f(z) \longmapsto z\,f(z), \quad f(z) \longmapsto f(z^2),$$

se traduisent dans l'espace des suites par l'opérateur de décalage et l'opérateur d'homothétie,

$$(f_n) \longmapsto (f_{n-1}), \quad (f_n) \longmapsto (f_{n/2}).$$

Ainsi une suite (f_n) est 2-mahlérienne si elle satisfait une relation de récurrence

$$\sum_l c_{0,l} f_{n-l} + \sum_l c_{1,l} f_{(n-l)/2} + \cdots + \sum_l c_{N,l} f_{(n-l)/2^N} = 0$$

avec les scalaires $c_{k,l}$ non tous nuls.

L'anneau $\mathbb{K}[z, M]$, où M désigne l'opérateur de substitution par z^2, appelé aussi opérateur de Mahler, cet anneau donc, est euclidien à gauche, ce qui fait que l'on peut parler d'équation minimale d'une série mahlérienne.

D'autre part l'espace des séries 2-mahlériennes possède les propriétés de clôture suivantes :

(1) les fractions rationnelles sont mahlériennes,
(2) si $f(z) \in \mathbb{K}((z))$ satisfait une équation de Mahler

$$c_0(z)f(z) + c_1(z)f(z^2) + \cdots + c_N(z)f(z^{2^N}) = b(z),$$

dont le second membre $b(z)$ est une série mahlérienne, alors $f(z)$ est une série mahlérienne,
(3) si $f(z)$ est mahlérienne, il en est de même de $f(z^2)$,
(4) les séries mahlériennes forment un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}((z))$ (et même du $\mathbb{K}(z)$-espace vectoriel $\mathbb{K}((z))$),
(5) si f et g sont deux séries mahlériennes, il en est de même de leur produit de Cauchy $f \times g$,
(6) si f est une série mahlérienne, sa série dérivée f' est aussi mahlérienne.

Par contre une primitive de série mahlérienne n'est pas nécessairement mahlérienne, comme on le voit en considérant $\ln \dfrac{1}{1-z}$, et le produit de Hadamard de deux séries mahlériennes n'est généralement pas mahlérien.

1.2. Séries 2-régulières. Parmi les séries mahlériennes nous distinguons une classe particulière : celle des séries régulières. Rappelons une définition possible [1, 6]. Nous nous donnons deux matrices carrées A_0, A_1, une matrice ligne λ et une matrice colonne γ, toutes de taille convenable. Si n est un entier naturel, nous écrivons son développement binaire $\varepsilon_l \cdots \varepsilon_1 \varepsilon_0$ et nous calculons le nombre $f_n = \lambda A_{\varepsilon_l} \cdots A_{\varepsilon_1} A_{\varepsilon_0} \gamma$. Alors la série formelle $f(z) = \sum_{n \geq 0} f_n z^n$ est 2-régulière.

La donnée de A_0, A_1, λ et γ est une représentation linéaire de la série régulière $f(z)$ et un peu de réflexion montre que derrière toute série 2-régulière se cache une série rationnelle non commutative sur l'ensemble d'indéterminées $\{x_0, x_1\}$. Cette remarque permet d'obtenir à peu de frais de nombreuses propriétés de ces séries, comme la stabilité par somme ou produit de Hadamard. Il faut noter aussi la stabilité par produit de Cauchy.

La notion de série régulière généralise celle de suite automatique car une série automatique est une série régulière dont les coefficients sont pris dans un ensemble fini.

Le théorème de Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy [3, 9], qui relie suites automatiques à valeurs dans $\mathbb{F}_q$ et séries formelles algébriques sur $\mathbb{F}_q(z)$, nous montre, *mutatis mutandis*, qu'une série régulière est mahlérienne.

2. Comportement asymptotique

2.1. Classification. L'équation minimale d'une série mahlérienne a un coefficient $c_0(z)$ qui n'est pas nul et sa résolution se scinde en deux parties : d'abord l'étude d'un système linéaire qui donne la dimension de l'espace des solutions et la partie basse des solutions puis l'application d'une récurrence mahlérienne qui permet de calculer autant de termes que l'on veut de la partie haute. On peut encore dire que cette deuxième phase est la recherche d'un point fixe par itération d'un opérateur contractant dans l'espace des séries formelles et il en résulte que les solutions définissent des fonctions méromorphes dans le disque unité, qui ne peuvent avoir comme pôles que les zéros du coefficient $c_0(z)$ et leurs racines carrées itérées.

Partant de ceci, on montre [6] qu'une série mahlérienne se décompose en un produit de quatre séries mahlériennes

$$f(z) = p_-(z)p(z)p_+(z)g(z).$$

Les trois séries $p_-(z)$, $p(z)$ et $p_+(z)$ sont des produits infinis de la forme

$$\prod_{k \geq 0} \frac{1}{\varphi(z^{2^k})}$$

dans lesquels $\varphi(z)$ est un polynôme dont les racines sont respectivement de module strictement plus petit que 1, de module 1 mais sans être des racines de l'unité d'ordre pair (le mot "ordre" est pris au sens de la théorie des groupes) ou de module strictement plus grand que 1. Enfin $g(z)$, le dernier terme du produit, est une série régulière.

Comme nous ne savons pas traiter le problème en toute généralité, nous allons nous contenter de considérer des exemples qui ne ressortissent essentiellement que d'un des quatre types précédents.

2.2. Cas interne. Une équation

$$c_0(z)f(z) + \cdots + c_N(z)f(z^{\mathrm{B}^N}) = b(z)$$

dans laquelle $c_0(z)$ a des racines dont au moins une est de module strictement plus petit que 1, apparaît comme une perturbation de l'équation

$$c_0(z)r(z) = b(z)$$

et le comportement des coefficients d'une solution $f(z)$ va être en première approximation du même type que pour la solution rationnelle $r(z)$ de celle-ci.

Ainsi la suite (u_n), définie par les conditions initiales $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et la récurrence

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} + u_{n/2}$$

est une perturbation de la suite de Fibonacci. La série génératrice associée, $u(z)$, vérifie l'équation

$$(1 - z - z^2)u(z) = z + (1 + z)u(z^2)$$

et ceci nous fournit par itération

$$u(z) = \frac{z}{1 - z - z^2} + \frac{1}{(1 - z - z^2)(1 - z^2 - z^4)}\left[z^2(1 + z) + (1 + z)(1 + z^2)v(z)\right]$$

avec

$$v(z) = \frac{z^4}{1 - z^4 - z^8} + \frac{z^8(1 + z^4)}{(1 - z^4 - z^8)(1 - z^8 - z^{16})} + \frac{z^{16}(1 + z^4)(1 + z^8)}{(1 - z^4 - z^8)(1 - z^8 - z^{16})(1 - z^{16} - z^{32})} + \cdots$$

Par simple soustraction des singularités, nous obtenons

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} C\phi^n + (c_+ + (-1)^n c_-)\phi^{n/2} + O(\phi^{n/4})$$

en notant ϕ le nombre d'or et

$$C = \frac{2\phi + 1}{\sqrt{5}} + \frac{\phi^4}{2}v(1/\phi) \simeq 2.0996360882.$$

2.3. Cas régulier. La classification que nous avons donnée confine essentiellement la difficulté dans l'étude des suites régulières, puisque pour les trois autres cas nous disposons d'une expression explicite en produit infini. D'ailleurs on peut à bon droit s'interroger sur la pertinence d'un développement asymptotique pour certaines suites à l'aspect assez chaotique comme la suite miroir, qui à un entier n associe la valeur de son écriture binaire lue à l'envers (cf. figure 1).

En pratique on est amené à lisser ces suites par application de l'opérateur de sommation. Par exemple la suite $(\nu(n))$ qui donne la somme des bits d'un entier a des variations violentes mais la suite $(S(n))$ qui représente la somme de tous les bits des entiers entre 1 et n a un comportement assez lisse puisque [5]

$$S(n) = \frac{1}{2}n \lg n + o(n \lg n),$$

où la notation lg représente le logarithme de base 2.

Remarquons d'abord qu'une suite régulière (u_n) vérifie $u_n = O(n^\alpha)$ pour un certain α [1]. Ceci résulte d'une majoration grossière des coefficients des matrices d'une représentation linéaire. La détermination de la borne inférieure des α possibles est délicate en toute généralité. Une technique consiste à considérer tous les produits de longueur donnée $A_{\varepsilon_1}\cdots A_{\varepsilon_l}$, si A_0, A_1 sont les deux matrices carrées d'une représentation linéaire, et à utiliser le maximum des normes de ces produits en comptant qu'un effet de moyenne va permettre d'affiner les bornes utilisées.

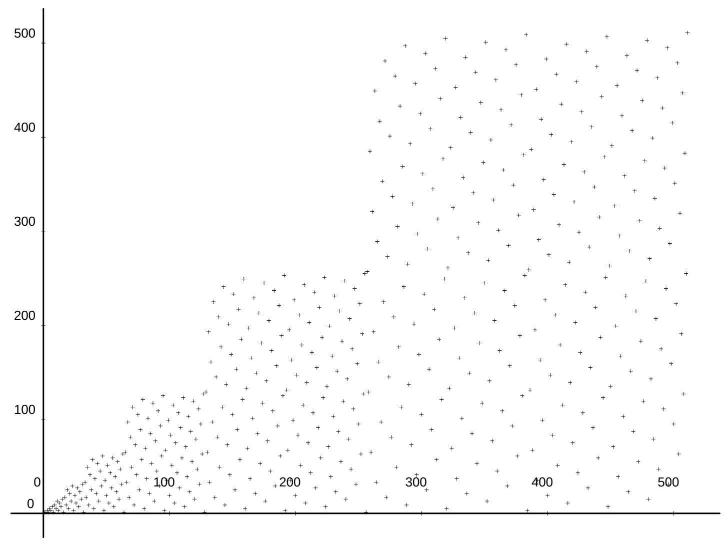

FIGURE 1
La suite miroir présente à la fois un comportement globalement simple et difficile à décrire du point de vue asymptotique.

La majoration précédente permet de considérer la série de Dirichlet

$$u(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n^s}.$$

Une technique utilisée systématiquement dans un contexte voisin par Flajolet *et alii* [8] consiste à invoquer la formule de Perron dans la version

$$\sum_{1 \le k < n} \left(1 - \frac{k}{n}\right) v_k = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} v(s) n^{s+1} \frac{ds}{s(s+1)}.$$

Idéalement cette formule s'applique à la série génératrice des différences secondes et les singularités de l'intégrande sont connues, ce qui permet par des calculs de résidus d'obtenir une série asymptotique comme approximation de u_n. Dans les bons cas ce développement est même convergent.

En pratique $v(s)$ est plutôt la série génératrice des différences premières et on a donc un développement asymptotique pour la fonction sommatoire de la suite (u_n).

Considérons par exemple [8, p. 8] le nombre γ_n de 1 dans la représentation en code Gray de l'entier n. La suite des différences arrière $\delta_n = \gamma_n - \gamma_{n-1}$ vérifie $\delta_{2k} = \delta_k$ et $\delta_{2k+1} = (-1)^k$. Sa série de Dirichlet est donc

$$\delta(s) = \frac{2^s\, L(s)}{2^s - 1} \qquad \text{avec} \qquad L(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^s}.$$

D'après la formule de Perron, la fonction sommatoire $G_N = \sum_{n<N} \gamma_n$ est donnée par

$$G_N = \frac{N}{2i\pi} \int_{2-i\infty}^{2+\infty} \frac{2^s\, L(s)}{2^s - 1} N^s \frac{ds}{s(s+1)}.$$

L'intégrande est méromorphe avec un pôle double en 0 de résidu

$$\frac{1}{2}\frac{\ln n}{\ln 2} + \frac{\ln \Gamma(1/4)/\Gamma(3/4)}{\ln 2} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2\ln 2},$$

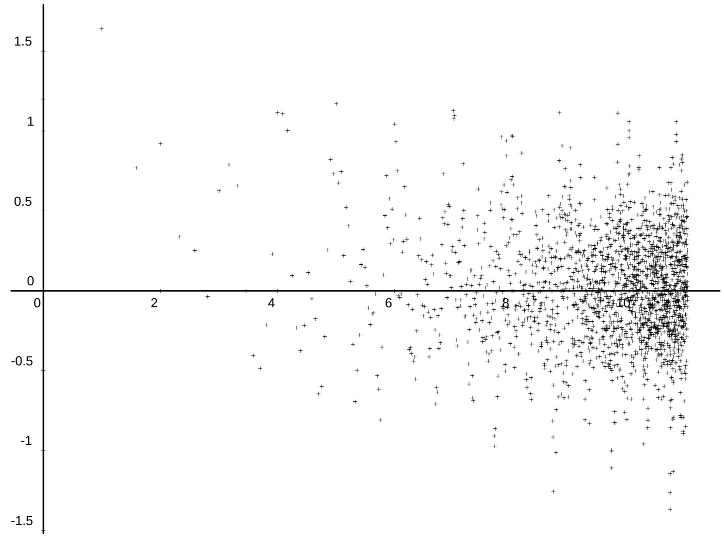

FIGURE 2
Le comportement de la suite des coefficients du produit $\prod_{k\geq 0} \frac{1}{1-6/5\,z^{2^k}+z^{2.2^k}}$ laisse perplexe le petit asymptoticien

un pôle simple en chaque $\chi_k = 2ik\pi/\ln 2$ et un pôle simple en -1. On trouve ainsi

$$G_N = \frac{1}{2}\,N\,\lg N + N\,F(\lg N)$$

où $F(u)$ est une fonction 1-périodique donnée par la série de Fourier

$$F(u) = 2\ \lg\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{3}{2} - \lg\pi + \frac{1}{\ln 2}\sum_{k\neq 0}\frac{L(\chi_k)}{\chi_k(\chi_k+1)}\ \exp(2ik\pi u).$$

Évidemment la série de Fourier provient des pôles χ_k et c'est leur disposition régulière qui produit une fonction périodique.

L'apparition d'une fonction périodique est usuelle dans ces questions et nous renvoyons à [8] pour d'autres exemples. Citons aussi [7] qui emploie des méthodes élémentaires.

2.4. Cas complémentaire. La suite des coefficients d'un produit infini comme

$$\prod_{k\geq 0}\frac{1}{1-6/5\,z^{2^k}+z^{2.2^k}},$$

dans lequel le polynôme $\varphi(z)$, ici $1-6/5\,z+z^2$, a comme racines des nombres complexes de module 1 qui ne sont pas des racines de l'unité, a un comportement assez erratique sur lequel nous avons bien peu à dire pour l'instant (cf. figure 2).

Aussi allons nous plutôt évoquer l'étude des coefficients du produit

$$p(z) = \prod_{k\geq 0}\frac{1}{1+z^{2^k}+z^{2.2^k}},$$

où le polynôme utilisé, en l'occurrence $\Phi_3(z)$, est un polynôme cyclotomique dont l'indice est premier avec 2.

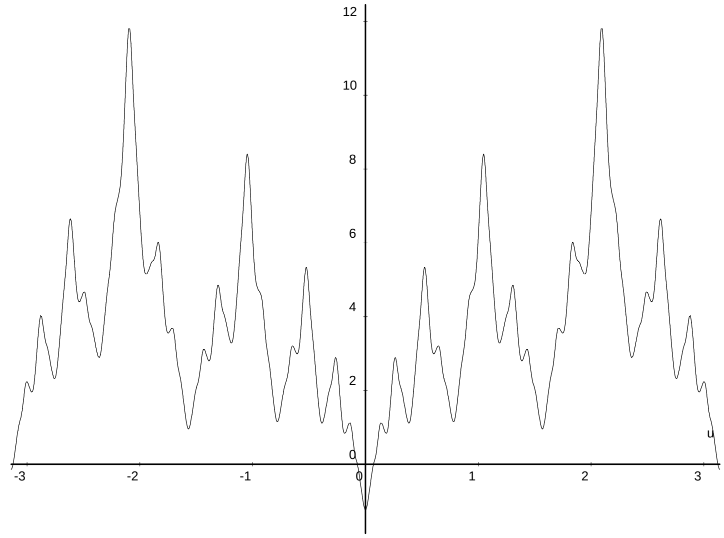

FIGURE 3

Le comportement de $\prod_{k\geq 0} \frac{1}{1+z^{2^k}+z^{2.2^k}}$ sur le contour d'intégration montre une prédominance des racines cubiques primitives de l'unité et de leurs racines carrées itérées. En abscisse on voit l'argument de z et en ordonnée le logarithme du module de la fonction.

Pour extraire le coefficient d'indice n de $p(z)$, nous utilisons la formule de Cauchy

$$[z^n]p(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{p(z)}{z^{n+1}}\,dz,$$

où C est un lacet entourant l'origine.

Le cercle unité est frontière naturelle mais tous les points du cercle n'ont pas la même importance. Nous avons d'abord les deux racines primitives cubiques j et j^2, qui sont racines de tous les $\Phi_3(z^{2^k})$, puis leurs racines carrées $-j$ et $-j^2$, qui sont racines des $\Phi_3(z^{2^k})$ à partir de $k=1$, etc. Pour mettre en valeur ces comportements nous procédons à une étude locale au voisinage des racines carrées itérées des racines cubiques de l'unité, en utilisant la transformation de Mellin et le calcul des résidus, dans l'esprit de [4] ou [2, chap. 6]. Nous constatons ainsi qu'au voisinage de ω la fonction $p(\omega e^{-t})$ a un comportement en $\exp(\ln^2 t)$ si ω vaut j, j^2 ou une de leurs racines carrées itérées alors qu'elle a seulement un comportement en $\exp(\ln t)$ si ω vaut 1 ou de ses racines carrées itérées.

Nous prenons alors pour C un cercle collé le long du cercle unité et nous le divisons en petits arcs qui font face aux racines carrées itérées de 1, j et j^2. Nous appliquons à chaque intégrale la méthode du col puis nous sommons toutes les approximations obtenues et nous constatons que seules les contributions des arcs associés à j et j^2 importent vraiment.

En appelant ρ l'unique solution strictement positive de l'équation

$$\lg\rho + n\rho - \frac{1}{2} + \lg 3 = 0$$

et en posant

$$v = \frac{\ln\rho}{2\ln 2},$$

nous avons l'équivalence

$$[z^n]\prod_{k\geq 0}\frac{1}{1+z^{2^k}+z^{2.2^k}}\underset{n\to+\infty}{\sim}$$

$$\exp\left[2v^2\ln 2+v(-2+\ln 3)-\frac{1}{2}\ln 2n\pi+C+P(v)\right]\times 2\cos\left(\frac{2n\pi}{3}+\frac{\pi}{12}+P^*(v)\right),$$

où la constante C est

$$C=-\frac{1}{12\ln 2}\left(-3\ln^2 3+3\ln 2\ln 3-\ln^2 2-6\ln 2+12\ln 3+6\gamma^2-\pi^2+12\gamma_1\right)$$

et les fonctions 1-périodiques $P(v)$ et $P^*(v)$ sont définies par leur série de Fourier

$$P(v)=\frac{1}{2\ln 2}\sum_{k\neq 0}\Gamma(s_k)\zeta(1+s_k)\left(3^{-s_k}+1\right)\exp(4ki\pi v),$$

$$P^*(v)=\frac{1}{2\ln 2}\sum_{k}\Gamma(r_k)3^{-1/2-r_k}\left[\zeta(1+r_k,1/3)-\zeta(1+r_k,2/3)\right]\exp((4k+2)i\pi v)$$

avec

$$s_k=2ik\pi/\ln 2,\qquad r_k=(2k+1)i\pi/\ln 2.$$

On voit clairement apparaître la périodicité modulo 3, qui est évidente dès que l'on calcule quelques termes de la suite, mais aussi une périodicité en $\lg n$ plus cachée comme dans le cas des suites régulières.

2.5. Cas externe. Il nous reste enfin le cas d'un produit infini associé à un polynôme dont toutes les racines ont un module strictement plus grand que 1. Un exemple typique en est

$$\prod_{k\geq 1}\frac{1}{1-z^{2^k}/\rho}$$

avec $\rho>1$. Ce cas est encore à l'étude et nous nous contenterons d'une remarque. Si nous traçons le graphe de la suite des coefficients (cf. Figure 4, où $\rho=2$) en joignant les points d'abscisse n suivant le nombre de bits égaux à 1 dans l'écriture binaire de n, nous voyons apparaître des phénomènes périodiques et une étude plus approfondie semble montrer que le n-ième terme de la suite vaut asymptotiquement

$$c\prod_{i=1}^{k}\left(a(l_i)+b(l_i)\,F(\lg n)\right)$$

où $F(u)$ est 1-périodique, si l'écriture binaire de n se décompose en k blocs $10\cdots 0$, le i-ème bloc comportant l_i zéros.

2.6. Conclusion. Comme on le voit l'étude du comportement asymptotique des suites mahlériennes est loin d'être achevée.

En particulier une question générale demeure : quelle est la bonne échelle asymptotique pour exprimer ces suites ? Il est clair que les fonctions usuelles n^α, $\ln^\beta n$, etc. sont insuffisantes. L'utilisation des séries trigonométriques permet de décrire des comportements assez chaotiques, mais pose des problèmes de convergence ; il serait peut être pertinent d'introduire certaines suites régulières comme la suite somme des bits ou la suite miroir dans l'échelle utilisée.

Au cas où le lecteur n'aurait pas encore reconnu sa main, nous précisons que les quelques idées pertinentes qui figurent dans ce texte ont été inspirées par le bon docteur Flajolet.

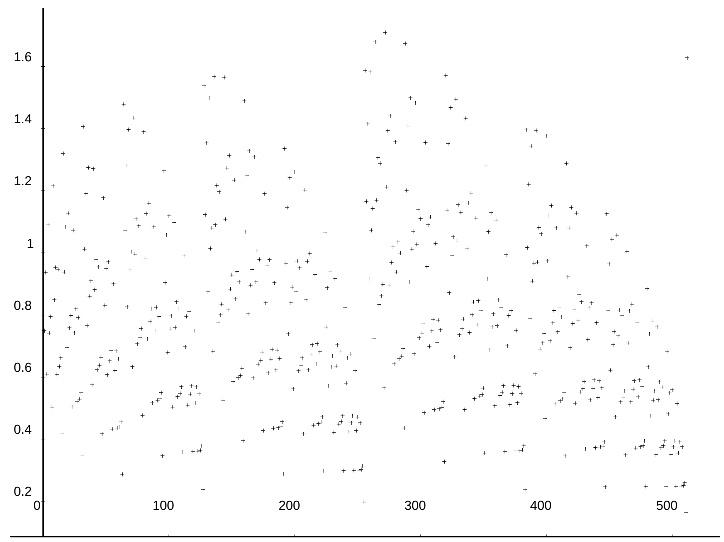

Figure 4

Les coefficients de $\prod_{k\geq 1} \frac{1}{1 - z^{2^k}/2}$ présentent un comportement périodique quand on classe les entiers suivant la somme des bits de leur écriture binaire.

Bibliographie

[1] Allouche (Jean-Paul) et Shallit (Jeffrey). – The ring of k-regular sequences. *Theoretical Computer Science*, vol. 98, 1992, pp. 163–197.

[2] Andrews (George E.). – *The Theory of Partitions.* – Addison-Wesley, 1976, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, volume 2.

[3] Christol (G.), Kamae (T.), France (M. Mendès), et Rauzy (G.). – Suites algébriques, automates et substitutions. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, vol. 108, 1980, pp. 401–419.

[4] De Bruijn (N. G.). – On Mahler's partition problem. *Indagationes Mathematicae*, vol. 10, 1948, pp. 210–220. – Reprinted from *Koninklijke Akademie voor Wetenschappen, Series A.*

[5] Delange (Hubert). – Sur la fonction sommatoire de la fonction somme des chiffres. *L'Enseignement Mathématique*, vol. XXI, n° 1, 1975, pp. 31–47.

[6] Dumas (Philippe). – *Récurrences Mahlériennes, suites automatiques, et études asymptotiques.* – Doctorat de Mathématiques, Université de Bordeaux I, 1993.

[7] Dumont (Jean-Marie) et Thomas (Alain). – Systèmes de numération et fonctions fractales relatifs aux substitutions. *Theoretical Computer Science*, vol. 65, 1989, pp. 153–169.

[8] Flajolet (Philippe), Grabner (Peter), Kirschenhofer (Peter), Prodinger (Helmut), et Tichy (Robert). – Mellin transforms and asymptotics: Digital sums. *Theoretical Computer Science*, 1993. – To appear.

[9] Loxton (J. H.). – Automata and transcendance. *In : New Advances in Transcendance Theory*, éd. par Baker (Alan). pp. 215–228. – Cambridge University Press, 1988.