

# Dessins d'enfants de Grothendieck, aspect calculatoire

*J.-M. Couveignes*

DMI, École Normale Supérieure, Paris

25 Janvier 1993

[résumé par Philippe Le Chenadec]

## Résumé

Un dessin d'enfant est un graphe connexe fini plongé dans une surface lisse compacte orientée et sans bord, de sorte que les composantes connexes de son complémentaire soient homéomorphes au disque unité. Nous rassemblons ici quelques résultats théoriques sur ces dessins d'enfants. Essentiellement, nous exposons l'équivalence de Grothendieck entre classes d'homéomorphismes de dessins et classes d'isomorphismes de revêtements algébriques de la sphère de Riemann, ramifiés au-dessus de trois points, ainsi que l'existence, via cette correspondance, d'une action du groupe de Galois  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  sur les dessins.

## 1. Dessins d'enfants et groupe cartographique

Soit  $X$  un complexe cellulaire fini dont l'espace topologique sous-jacent est une surface topologique compacte connexe orientable et sans bord. Nous désignerons par  $X_i$  le squelette  $i$ -dimensionnel du complexe  $X$ , union des cellules de dimension inférieure ou égale à  $i$ . D'après un résultat connu [14, thm 19, §3.6] ou [6, thm 2.5, Ch. 3], le 1-squelette  $X_1$  est connexe,  $X$  l'étant lui-même. On constate aisément que  $X_1 \setminus X_0$  vide équivaut à  $X_0$  et  $X_2$  singletons, ainsi qu'à l'existence d'une 2-cellule  $f$  dont le bord  $\partial f = \overline{f} \setminus f$  se réduit à un point. Lorsqu'il en est ainsi,  $X$  est homéomorphe à la sphère. La valence  $v(a)$  d'une 0-cellule  $a$  est le nombre de composantes connexes de  $(X_1 \setminus X_0) \cap W$ ,  $W$  un voisinage suffisamment petit de cette 0-cellule.

En vertu de phénomènes de ramification (cf. infra), un dessin peut contenir des arêtes qui ne possèdent pas de sommet à l'une de leurs extrémités, de telles arêtes étant alors repliées sur elles-mêmes. En conséquence, un dessin d'enfant est une paire  $(X, V)$ ,  $X$  comme ci-dessus mais non trivial,  $V$  un sous-ensemble de  $X_0$  tel que les 0-cellules de  $X_0 \setminus V$  aient une valence égale à 1 et, si  $u \in X_0 \setminus V$  et  $e$  désigne l'unique 1-cellule telle que  $u \in \overline{e}$ , alors  $v \in V$  où  $v$  est la 0-cellule définie par  $\partial e = \{u, v\}$ . Les éléments de  $V$  (resp. les composantes connexes de  $X_1 \setminus V$ , de  $X_2 \setminus X_1$ ) sont appelés sommets du dessin (resp. arêtes, faces). Comme exemples, notons qu'il existe deux dessins associés au complexe possédant une seule face et une seule arête (donc deux 0-cellules distinctes). Leur support est la sphère. Celui qui ne possède qu'un seul sommet est appelé le dessin universel, et est noté  $\perp$ .

Supposons choisis un point par arête et un par face du dessin  $(X, V)$ , appelés leur centre, de sorte que, si une 1-cellule  $e$  possède une 0-cellule  $u$  dans son bord  $\partial e$  qui ne soit pas dans  $V$ , le point choisi soit  $u$ , point de pliage de l'arête. Soit  $\phi : (B_2, S_1) \rightarrow (\overline{f}, \partial f)$  un homéomorphisme relatif,  $f$  une face du dessin,  $B_2$  la boule unité et  $S_1$  la sphère unité de  $\mathbb{R}^2$ . On peut supposer sans perte de généralité que  $\phi$  n'est pas constante sur les intervalles de  $S_1$ . Le centre de  $f$  détermine par  $\phi$  un point unique  $c$  de l'intérieur de  $B_2$ . Pour un centre d'arête ou sommet  $a$  de  $\partial f$ ,  $\phi^{-1}(a)$  est un ensemble fini dont le nombre d'éléments est égal à la valence  $v(a)$  de  $a$  dans  $f$ , c'est-à-dire au nombre de composantes connexes de  $f \cap (W \setminus (X_1 \cap W))$ , pour un voisinage suffisamment petit  $W$  de  $a$ , tel que  $W \cap X_0 \subset \{a\}$ . De plus, les points de  $S_1$  envoyés par  $\phi$  sur les sommets alternent avec les points de  $S_1$  envoyés sur le centre d'une arête, comme on s'en rend compte aisément par des raisonnements topologiques élémentaires.

Considérons maintenant une triangulation de la boule  $B_2$  par le point  $c$  et les points de  $S_1$  juste définis, de sorte que  $B_2$  ainsi triangulée soit homéomorphe à un polygone régulier muni de sa triangulation usuelle par son centre. Le sous-complexe  $\mathcal{f}$  de  $X$  se trouve ainsi muni d'une nouvelle structure de complexe cellulaire, image par  $\phi$  de la triangulation de  $B_2$ , qui est régulière mais non simpliciale en général, voir  $\perp$  par exemple. On appelle triangle du dessin  $(X, V)$  une 2-cellule de cette nouvelle structure. La surface de  $(X, V)$  étant supposée orientée par l'intermédiaire d'un modèle différentiable de cette surface muni d'une orientation, chaque triangle possède une orientation induite. Un triangle sera dit positif si l'ordre de ses 0-cellules frontières, lues dans le sens direct, est centre de face – sommet – centre d'arête ; il sera dit négatif dans le cas contraire. Les triangles positifs et négatifs alternent alors autour des centres de faces et d'arêtes, et autour des sommets, lorsque chaque face du dessin a été ainsi divisée. Notons qu'un triangle est entièrement déterminé par son sommet frontière, son arête frontière et son signe. Désormais nous supposons sauf exception qu'un dessin est muni d'une orientation. Lorsque cela ne soulève pas d'ambiguïté, un dessin  $(X, V)$  sera noté simplement  $X$ , et l'ensemble de ses triangles  $T(X)$  (resp.  $T^+(X)$ ,  $T^-(X)$  pour les triangles positifs et négatifs). Cet ensemble  $T(X)$  est toujours non-vide.

Un morphisme  $\phi : (X, V) \rightarrow (X', V')$  entre deux dessins d'enfants  $(X, V)$  et  $(X', V')$  est une application cellulaire surjective qui est simultanément un revêtement ramifié, telle que  $\phi(V) = V'$ ,  $\phi(X_0 \setminus V) = X'_0 \setminus V'$ ,  $\phi(X_1 \setminus X_0) = X'_1 \setminus X'_0$  et  $\phi(X_2 \setminus X_1) = X'_2 \setminus X'_1$ . On montre alors aisément que l'image d'une cellule est une cellule de même dimension, et qu'il existe, dans chaque cellule, au plus un point de branchement ou de ramification. Les dessins et leurs morphismes (resp. les dessins orientés et les morphismes respectant l'orientation) forment une catégorie  $\mathcal{D}$  (resp.  $\mathcal{D}^+$ ) dans laquelle le dessin universel  $\perp$  est un objet terminal. Ceci motive la terminologie utilisée par Grothendieck de cartes pour les dessins, le réseau routier correspondant au 1-squelette, et les régions aux composantes connexes de son complémentaire, qui sont simplement connexes donc uniformisables simplement.

Il existe une caractérisation des classes d'isomorphie de dessins par l'intermédiaire du groupe cartographique  $C_2$ , défini par la présentation  $\langle \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2; \sigma_i^2 = (\sigma_0 \sigma_2)^2 = 1, i = 0, 1, 2 \rangle$ . Le groupe cartographique orienté  $C_2^+$  est son sous-groupe engendré par  $\rho_0 = \sigma_2 \sigma_1$ ,  $\rho_1 = \sigma_0 \sigma_2$  et  $\rho_2 = \sigma_1 \sigma_0$ . C'est aussi le sous-groupe de  $C_2$  dont les éléments sont représentés par les mots de longueur paire sur les lettres  $\sigma_0$ ,  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ . Il est donc d'indice 2, et un ensemble de relations de définition est donné par les équations  $\rho_1^2 = \rho_2 \rho_1 \rho_0 = 1$ . Le groupe  $C_2$  agit sur  $T(X)$ ,  $X$  un dessin, comme suit. Le générateur  $\sigma_0$  échange deux triangles dont les côtés de type centre de face–centre d'arête sont identiques (resp.  $\sigma_1$  et côtés centre de face–sommet identiques,  $\sigma_2$  et côtés centre d'arête–sommet identiques). Les éléments de  $C_2 \setminus C_2^+$  définissent donc des bijections entre  $T^+(X)$  et  $T^-(X)$ , et le groupe orienté  $C_2^+$  agit sur chacun de ces deux ensembles. Par suite, le générateur  $\rho_2$  agit sur  $T^+(X)$  comme la rotation en sens direct autour du centre d'un modèle-polygone régulier d'une face (resp.  $\rho_1$  autour du centre d'une arête,  $\rho_0$  autour d'un sommet), et  $C_2^+$  agit sur les triangles négatifs par les rotations en sens inverse. La connexité de  $X_1$  implique la transitivité de l'action de  $C_2$  sur  $T(X)$  (resp. de  $C_2^+$  sur  $T^\pm(X)$ ). La bijection de  $T(X)$  induite par  $\sigma \in C_2$  est un morphisme de  $\sigma$ -conjugaison : pour tout triangle  $T$  et  $\tau \in C_2$ , on a  $\sigma(\tau T) = (\sigma \tau)\sigma(T)$ . A un isomorphisme  $C_2$ -équivariant près, l'ensemble  $T(X)$  muni de son action est indépendant du choix des points-centres. Cette action est décrite dans la figure 1, où  $\sigma_i(T) = T'_i$ ,  $\rho_i(T) = T_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ , et où  $\circ$  dénote le centre d'une face,  $\times$  celui d'une arête et  $\bullet$  un sommet.

Appelons  $\mathcal{E}$  la catégorie des  $C_2^+$ -ensembles finis transitifs avec comme morphismes les applications équivariantes. Un morphisme  $\phi : X \rightarrow X'$  de dessins induit une application  $T(\phi) : T(X) \rightarrow T(X')$  (resp.  $T^\pm(\phi) : T^\pm(X) \rightarrow T^\pm(X')$  lorsque  $\phi$  conserve l'orientation), par exemple via la caractérisation d'un triangle  $T$  par le triplet  $(v, e, \epsilon)$ ,  $v$  son sommet,  $e$  son arête et  $\epsilon$  son signe, l'image de  $T$  par  $T(\phi)$  est alors le triangle  $(\phi(v), \phi(e), \epsilon_\phi \epsilon)$ , où  $\epsilon_\phi = \pm 1$  selon que  $\phi$  respecte ou change l'orientation des dessins. On vérifie aisément que  $T^+ : \mathcal{D}^+ \rightarrow \mathcal{E}$  est un foncteur covariant. Si  $\phi, \psi : X \rightarrow X'$  sont deux morphismes de dessins, ils sont dits homotopes ssi il existe une application continue  $F : X \times [0, 1] \rightarrow X'$  telle que  $F(-, t) : X \rightarrow X'$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , soit un morphisme,  $F(-, 0) = \phi$  et  $F(-, 1) = \psi$ . Par des résultats standards d'homotopie différentielle, si  $\phi$  et  $\psi$  sont homotopes, elles respectent l'orientation toutes deux ou la changent toutes deux et  $T(\phi) = T(\psi)$ . Soit alors  $\mathcal{G}$  la catégorie dont les objets sont les dessins et les morphismes les classes d'homotopie de morphismes de dessins (resp  $\mathcal{G}^+$  pour la catégorie conservatrice). Le foncteur  $T^+$  passe au quotient et définit une équivalence de catégories  $T^+ : \mathcal{G}^+ \rightarrow \mathcal{E}$  (l'action de  $C_2^+$  sur  $T^+(X)$  détermine celle de  $C_2$  sur  $T(X)$ ) :

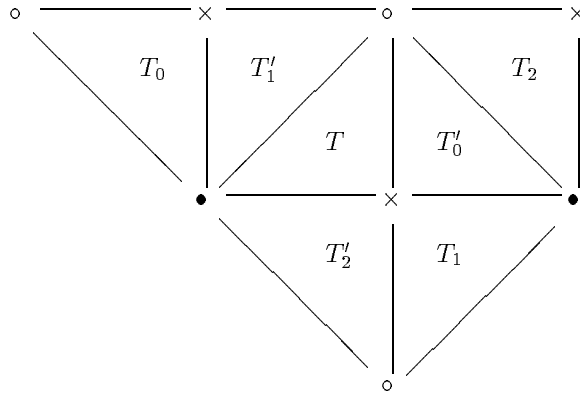


FIGURE 1. Action du groupe cartographique sur les triangles.

THÉORÈME 1 (MALGOIRE-VOISIN). *Il y a bijection entre classes d'isomorphie de dessins d'enfants et classes de  $C_2$ -conjugaison de sous-groupes d'indice fini du groupe cartographique orienté  $C_2^+$ .*

PREUVE. Soit  $X$  un dessin et  $B$  le stabilisateur d'un triangle. Par l'action de  $C_2^+$  sur  $T^\pm(X)$ , nous avons  $[C_2^+ : B] = |T^\pm(X)| < +\infty$ , et la classe de conjugaison de  $B$  dans  $C_2$ , par la transitivité de l'action de  $C_2$  sur  $T(X)$ , ne dépend pas du triangle choisi, mais seulement de  $X$ . Deux dessins isomorphes définissent une même classe de conjugaison de stabilisateurs.

Réciproquement, soit  $B$  un sous-groupe de  $C_2^+$  d'indice fini. Soit  $H = C_2/B$  l'ensemble des classes à gauche de  $B$  dans  $C_2$ , ensemble sur lequel  $C_2$  agit par multiplication à gauche, ce qui induit une action de  $C_2^+$  sur  $C_2^+/B$  et sur  $H \setminus (C_2^+/B)$ . Construisons un 2-complexe  $X$  comme suit. Soit  $X' = \bigsqcup_{h \in H} f_h$  le 2-complexe cellulaire union disjointe de 2-complexes  $f_h$  homéomorphes au 2-complexe standard  $\Delta_2$  de  $\mathbb{R}^3$ . À chaque sommet de  $f_h$  associons un générateur  $\rho_i$  de sorte que deux sommets distincts correspondent à deux générateurs distincts. De même, au côté de  $f_h$  d'extrémités associées à  $\rho_i$  et à  $\rho_j$  on associe l'élément  $\sigma_k$ ,  $k \neq i$ ,  $k \neq j$ , bien défini puisque  $i \neq j$ . Les orbites de  $H^+$  sous l'action des  $\rho_i$  sont en bijection avec les orbites de  $H^-$  sous ces mêmes éléments par la correspondance :

$$\{\rho_i^n cB \mid n \in \mathbb{Z}\} \mapsto \{\rho_i^n \sigma_k cB \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{\rho_i^n \sigma_l cB \mid n \in \mathbb{Z}\},$$

$$\text{où } \{i, k, l\} = \{0, 1, 2\}, \quad c \in C_2^+,$$

comme on le constate avec l'aide des identités :

$$\rho_i \sigma_j = \sigma_j \rho_i^{-1}, \quad i \neq j, \quad \text{et} \quad \rho_0 \sigma_1 = \sigma_2, \quad \rho_1 \sigma_2 = \sigma_0, \quad \rho_2 \sigma_0 = \sigma_1.$$

L'espace  $X$  est le quotient topologique de  $X'$ , obtenu en identifiant d'une part deux sommets  $v$  et  $v'$  de  $X'$ , lorsqu'ils sont associés tous deux à un même élément  $\rho_i$ , et que de plus, si  $v \in f_h$ ,  $v' \in f_{h'}$ , alors les orbites de  $h$  et  $h'$  sous  $\rho_i$  sont ou égales, ou associées par la correspondance bijective juste définie ; et d'autre part deux côtés  $e \subset f_h$ ,  $e' \subset f_{h'}$  tels que tous deux soient associés à  $\sigma_i$ , et que  $h$  forme avec  $h'$  une  $\sigma_i$ -orbite. Ces conditions impliquent, via la correspondance ci-dessus, que les extrémités de  $e$  et  $e'$  sont identifiées dans  $X$ , on impose alors que  $e$  et  $e'$  le soient via un homéomorphisme entre  $e$  et  $e'$  qui respecte ces identifications.

On vérifie que  $X$  ainsi défini est naturellement muni d'une structure de 2-complexe cellulaire dont les cellules sont les images de celles de  $X'$  sous la projection canonique de  $X'$  sur  $X$ . Par construction, le complexe  $X$  est régulier car  $X'$  l'est et les identifications des 0-cellules et des 1-cellules entre elles respectent leurs types  $\sigma_i$  ou  $\rho_j$ . De même, chaque 0-cellule de  $X$  appartient au bord d'au moins une 2-cellule, et chaque 1-cellule au bord de deux 2-cellules exactement puisque  $\sigma_i^2 = 1$ , ces 2-cellules peuvent d'ailleurs être égales. L'espace  $X$  est compact, la relation d'identification étant fermée. Il est connexe, l'action de  $C_2$  sur  $H$  étant

transitive. Les 2-cellules de  $X$  sont d'autre part en bijection avec  $H$ , et donc munies d'une  $C_2$ -action. Si une paire de 2-cellules  $f_1$  et  $f_2$  forme une  $\sigma_i$ -orbite, les deux 1-cellules de type  $\sigma_j$  des bords de  $f_1$  et  $f_2$  ont en commun dans leur bord une 0-cellule étiquetée  $\rho_k$ ,  $\{i, j, k\} = \{0, 1, 2\}$  puisque  $\rho_k^\epsilon(f_1) = \sigma_j(f_2)$ , en vertu de l'identité  $\rho_k^\epsilon = \sigma_j \sigma_i$ ,  $\epsilon = \pm 1$ . Les  $\sigma_i$ -orbites montrent que l'espace  $X$  est une pseudo-variété, et la remarque précédente montre qu'il est en fait une surface topologique, puisque les 2-cellules contenant une 0-cellule de type  $\rho_k$  dans leur bord forment une suite  $f, \sigma_i f, \sigma_j \sigma_i f, \sigma_i \sigma_j \sigma_i f, \sigma_j \sigma_i \sigma_j \sigma_i f, \dots$ , deux éléments consécutifs ayant une 1-cellule de type  $\sigma_i$  ou  $\sigma_j$  en commun,  $\rho_k$  étant la 0-cellule commune à tous les bords de ces 1-cellules. Cette surface est sans bord, par la remarque précédente sur les 1-cellules qui bordent deux 2-cellules.

De même, supposons donnés des homéomorphismes  $g_h : \Delta_2 \rightarrow f_h$ ,  $h \in H$ , ce qui est licite puisque  $X$  est régulier. On suppose ces homéomorphismes deux à deux compatibles :

$$g_h^{-1}|_{f_h \cap f_{h'}} = g_{h'}^{-1}|_{f_h \cap f_{h'}}, \quad h, h' \in H.$$

La relation dans  $X$ , définie par  $a \sim b$  ssi  $a \in f_h$ ,  $b \in f_{h'}$ ,  $h, h' \in C_2^+$  ou  $h, h' \in C_2 \setminus C_2^+$ , et  $b = g_{h'} \circ g_h^{-1}(a)$ , définit un espace quotient  $X/\sim$  qui n'est autre que la sphère  $S_2$  par examen des  $\sigma_i$ -orbites et des voisinages des points de  $X/\sim$ . Ceci fait de  $X$  un revêtement de  $S_2$  ramifié au-dessus de trois points au plus, dont le lieu de branchement est inclus dans  $X_0$ , le 0-squelette de  $X$  pour sa structure cellulaire originelle. La surface  $X$  est donc orientable.

On reconstitue un dessin associé à  $X$  par les définitions suivantes : une face est la réunion des 2-cellules de  $X$  ayant une 0-cellule de type  $\rho_2$  fixée dans leur fermeture, une arête est la réunion des 0- et 1-cellules ayant dans leur fermeture une 0-cellule de type  $\rho_1$  fixée, sauf s'il n'existe qu'une seule telle 1-cellule, auquel cas l'arête est définie comme étant cette 1-cellule augmentée de la 0-cellule fixée ; enfin les 0-cellules du dessin sont les 0-cellules de type  $\rho_0$ , plus les 0-cellules de type  $\rho_1$  et de valence 1 comme ci-dessus. On définit bien entendu  $V$  comme étant l'ensemble des 0-cellules de type  $\rho_0$ . Le couple  $(X, V)$ ,  $X$  muni de cette nouvelle structure de complexe cellulaire, est alors un dessin d'enfant.

Le stabilisateur du triangle du dessin associé à la classe à gauche  $B$  de  $H$  est évidemment  $B$ , lorsque  $T(X)$  est défini via la structure cellulaire originelle de  $X$ . Réciproquement, soit  $X$  un dessin,  $T_0$  un triangle de  $X$ ,  $B_0$  son stabilisateur. Le complexe cellulaire  $X$  dont les 2-cellules sont les triangles étant régulier, on peut se donner des homéomorphismes cellulaires  $h_T : \Delta_2 \rightarrow \overline{T}$ ,  $T \in T(X)$ ,  $\Delta_2$  le 2-simplexe standard de  $\mathbb{R}^3$ , qu'on suppose compatibles :  $h_T^{-1}|_{T \cap T'} = h_{T'}^{-1}|_{T \cap T'}$ . De même pour le dessin  $X_0$  défini par  $B_0$  : on suppose donnés des homéomorphismes cellulaires compatibles  $g_U : \Delta_2 \rightarrow \overline{U}$ ,  $U \in T(X_0)$ , tels que de plus les types associés aux cellules de  $\Delta_2$  par  $h_T$  et  $g_U$  coïncident. Alors  $\phi : X \rightarrow X_0$ , défini par  $\phi(x) = (g_{cB_0} \circ h_{cT_0}^{-1})(x)$ , pour  $c \in C_2$  tel que  $x \in \overline{cT_0}$ , est un homéomorphisme de  $X$  sur  $X_0$ , qui est un isomorphisme de dessins.

Pour conclure, observons que pour tout  $\sigma \in C_2$ , l'application

$$cB \mapsto (\sigma c \sigma^{-1})(\sigma B \sigma^{-1})$$

entre  $H = C_2/B$  et  $H' = C_2/\sigma B \sigma^{-1}$  est un isomorphisme de  $\sigma$ -conjugaison entre ces deux  $C_2$ -ensembles, l'homéomorphisme qu'il induit à homéomorphisme des 2-cellules près entre  $X'$  et  $X'' = \bigsqcup_{h' \in H'} f_{h'}$  passe donc aux quotients, la construction du quotient de  $X''$  étant effectuée à l'aide de générateurs de  $C_2$ ,  $\sigma$ -conjugus des générateurs originaux  $\sigma_i$ .  $\square$

## 2. Ramification et rationalité

Soit  $X$  une courbe algébrique projective et lisse définie sur  $\mathbb{C}$ . Montrons que  $X$  est isomorphe à une courbe définie sur  $\overline{\mathbb{Q}}$  ssi il existe une fonction rationnelle  $f \in \mathbb{C}(X)$ , non constante, dont toutes les valeurs critiques sont dans  $\overline{\mathbb{Q}}$ . Dans un sens c'est élémentaire : si  $X$  est définie sur  $\overline{\mathbb{Q}}$ , elle est isomorphe à la complétée  $X'$  d'une courbe affine lisse  $Y$  de  $\mathbb{C}^n$ , définie sur  $\overline{\mathbb{Q}}$ ,  $n \geq 1$ . L'idéal  $\mathcal{I}$  de  $Y$ , idéal premier de  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  de hauteur  $n - 1$ , possède donc une base à coefficients dans  $\overline{\mathbb{Q}}$ . Soient  $g_i$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$ , les éléments d'une telle base. Soit également  $f$  une fonction rationnelle non constante de  $\overline{\mathbb{Q}}(Y)$ , représentée par une fraction rationnelle  $p/q$ ,  $p, q \in \overline{\mathbb{Q}}[x_1, \dots, x_n]$ ,  $p, q \notin \mathcal{I}$ . L'équation  $df = 0$  est équivalente aux  $n$  équations  $q \partial p / \partial x_i - p \partial q / \partial x_i = 0$  et l'un au moins de ces derniers polynômes n'appartient pas à  $\mathcal{I}$ , sinon les fonctions

rationnelles  $q^2 \partial(p/q)/\partial x_i$ , nulles sur  $Y$ , impliquerait  $\partial(p/q)/\partial x_i$  nulle également sur  $Y$ , puisque  $q \notin \mathcal{I}$  et  $\mathcal{I}$  premier, et donc  $f$  constante, contrairement aux hypothèses. Les solutions du système  $df = 0$ ,  $g_i = 0$  sont alors en nombre fini et rationnelles sur  $\overline{\mathbb{Q}}$ , et le même raisonnement, appliqué aux homogénéisés, montre qu'un éventuel point à l'infini de  $Y$ , critique pour  $f$ , est aussi  $\overline{\mathbb{Q}}$ -rationnel. Les valeurs critiques correspondantes de  $f$  sont également dans  $\overline{\mathbb{Q}}$ . Ainsi la fonction  $f$  fournit, via l'isomorphisme entre  $X$  et  $X'$ , une fonction rationnelle de  $X$  à valeurs critiques dans  $\overline{\mathbb{Q}}$ , puisqu'une transformation birationnelle entre courbes complètes est partout définie et birégulière [11, prop. 1, Ch. 7]. Un lemme désormais classique de Belyi [1] permet de raffiner ce résultat. Dorénavant, nous noterons  $\mathbb{G}$  le groupe de Galois  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ .

**LEMME 1 (BELYI).** *Soit  $X$  une courbe lisse projective définie sur  $\overline{\mathbb{Q}}$ . Il existe dans  $\overline{\mathbb{Q}}(X)$  une fonction rationnelle dont toutes les valeurs critiques sont dans  $\{0, 1, \infty\}$ .*

**PREUVE.** Soit  $f$  non constante dans  $\overline{\mathbb{Q}}(X)$ . Construisons  $h \in \overline{\mathbb{Q}}(X)$  dont toutes les valeurs critiques sont dans  $\mathbb{Q}$ . Soit  $S_0$  l'ensemble formé des valeurs critiques finies de  $f$  et de leurs  $\mathbb{G}$ -conjuguées. On définit successivement les polynômes  $P_i(x) \in \mathbb{Q}[x]$  par  $P_0(x) = \prod_{s \in S_0} (x - s)$  et  $P_{i+1}(x) = \prod_{s \in S_{i+1}} (x - P_i(s))$ , où  $S_{i+1}$  désigne l'ensemble des zéros de  $P_i'(x)$ , lorsque ce dernier polynôme est non identiquement nul. Ces polynômes sont bien à coefficients rationnels puisque  $P_i'(s) = 0$  et  $P_i(x) \in \mathbb{Q}[x]$  impliquent  $(P_i'(s))^\sigma = P_i'(s^\sigma) = 0$ ,  $\sigma \in \mathbb{G}$ . De plus on a  $\deg(P_{i+1}) < \deg(P_i)$ . Il existe donc  $n$  tel que  $\deg(P_n) = 0$ . La fonction rationnelle  $h = P_{n-1} \circ P_{n-2} \circ \dots \circ P_0 \circ f$  de  $\overline{\mathbb{Q}}(X)$  a ses valeurs critiques finies dans  $\mathbb{Q}$ . En effet, si  $\phi : U \rightarrow V$  et  $\psi : V \rightarrow W$  sont des morphismes non constants entre courbes, par la considération des points de branchement de  $\psi \circ \phi$ , on a  $C_{\psi \circ \phi} = C_\psi \cup \psi(C_\phi)$ , où  $C_\phi$  et  $C_\psi$  désignent respectivement l'ensemble de toutes les valeurs critiques de  $\phi$  et  $\psi$ . Alors l'égalité :

$$C_h = C_{P_{n-1}} \cup (P_{n-1}(C_{P_{n-2}})) \cup \dots \cup (P_{n-1} \circ \dots \circ P_1(C_{P_0})) \cup ((P_{n-1} \circ \dots \circ P_0(C_f))),$$

l'observation que les zéros de  $P_{i+1}(x)$  sont les valeurs critiques de  $P_i(x)$  et l'observation analogue pour  $P_0$  et  $f$ , impliquent le résultat cherché.

Si  $h$  possède au plus trois valeurs critiques, une homographie de  $\text{PSL}_2(\overline{\mathbb{Q}})$  fournit la fonction rationnelle souhaitée. Sinon nous pouvons supposer, toujours d'après la 3-transitivité de l'action de  $\text{PSL}_2(\overline{\mathbb{Q}})$  sur  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ , les points  $0, 1$  et  $\infty$  valeurs critiques de  $h$ , et, comme  $h$  en possède au moins quatre, qu'elle en possède une de la forme  $m/(m+n)$ , avec  $m, n$  entiers positifs. Alors le polynôme :

$$B_{m,n}(x) = \frac{(m+n)^{m+n}}{m^m n^n} (1-x)^n x^m$$

a  $m/(m+n)$  comme point critique, de valeur critique 1, et éventuellement 0, 1 comme autres points critiques finis, de valeur critique correspondantes 0. La fonction rationnelle  $B_{m,n} \circ h$  est dans  $\overline{\mathbb{Q}}(X)$ , et ses valeurs critiques sont dans  $\mathbb{Q}$ , en nombre  $k-1$  où  $k$  est le cardinal de l'ensemble des valeurs critiques de  $h$ . Répéter cette opération le cas échéant fournit le morphisme cherché.  $\square$

Ainsi toute courbe définie sur  $\overline{\mathbb{Q}}$  peut être vue comme un revêtement de la sphère ramifié en  $0, 1$  et  $\infty$  seulement. La réciproque utilise le résultat algébrique élémentaire suivant : si  $G$  est un groupe finiment engendré, le nombre de sous-groupes de  $G$  d'indice fini fixé est fini [2, exerc. 5, §5, Ch. 1]. Soit alors  $X$  une courbe projective et lisse définie sur  $\mathbb{C}$ , et qui est via  $f : X \rightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  dans  $\mathbb{C}(X)$  un revêtement de la sphère non ramifié en dehors de  $\{0, 1, \infty\}$ . Le revêtement non ramifié induit par  $f$  sur  $X \setminus f^{-1}(\{0, 1, \infty\})$  est caractérisé par une classe de conjugaison de sous-groupes de  $\pi_1(\mathbb{P}(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\})$ , d'indice égal au degré de  $f$ , à isomorphisme de revêtements près. Les structures complexes associées étant également isomorphes et déterminant leur prolongement aux points de branchement [5, Satz 8.4, Kap. I], deux revêtements associés à des sous-groupes conjugués de ce  $\pi_1$  seront isomorphes en tant que courbes algébriques sur  $\mathbb{C}$ .

Dans la construction qui suit, nous utiliserons librement soit le langage des schémas [7], soit le langage classique des variétés (voir [15], notamment pour les questions de rationalité et d'intersection), le passage de l'un à l'autre étant valide, par suite de l'équivalence de catégories entre schémas intègres séparés de type fini sur un corps algébriquement clos et variétés au sens classique sur ce corps, voir e.g. [8, prop. 4.10, Ch.

2] ou [13, thm 2, §II.3]. Suivant alors le point classique, la fonction  $f$ , identifiée à son graphe, est une sous-variété du produit  $X \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ , isomorphe à  $X$  puisque  $f$  est partout définie et birégulière. Elle est donc lisse, complète, et de même genre  $g$  que  $X$ .

Considérons alors l'action du groupe  $G = \text{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ , comme définie en [15, Ch. VII, §4], action qui conserve le degré et le genre. Par le résultat d'algèbre mentionné plus haut, l'orbite de  $f$  est finie modulo  $\mathbb{C}$ -isomorphie. Le genre étant constant sous l'action de  $G$ , d'après la remarque ci-dessus, cet ensemble forme un sous-ensemble fini de  $\mathcal{M}_g(\mathbb{C})$ ,  $\mathcal{M}_g(k)$  désignant l'espace des modules des courbes algébriques définies sur  $k$ , complètes et lisses de genre  $g$ . Le cas  $g = 0$  est trivial. Et lorsque  $g = 1$ , les deux remarques suivantes impliquent la validité des conclusions du raisonnement ci-dessous, effectué pour  $g \geq 2$  : a) le corps  $\mathbb{C}$ , via l'invariant modulaire  $j$ , paramétrise les classes de courbes elliptiques, a pour compactifié  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ , défini sur  $\mathbb{Z}$  et b) la courbe paramétrée par  $j$  est définie sur  $\overline{\mathbb{Q}}$  ssi  $j \in \overline{\mathbb{Q}}$  [9].

D'après les résultats de la théorie des modules, notamment ceux de Mumford [10, 12], il existe un schéma de module grossier  $M_g$ ,  $g \geq 2$ , quasi-projectif sur  $\mathbb{Z}$ , et donc de type fini sur  $\mathbb{Z}$ . Par définition des schémas de modules grossiers, l'ensemble  $\mathcal{M}_g(k)$ , pour  $k$  algébriquement clos, est en bijection avec  $M_g(k)$ , l'ensemble des points de  $M_g$  à valeurs dans  $k$ , égal par définition à  $\text{Hom}(\text{Spec}(k), M_g)$ . L'orbite sous  $G$  de  $f$  étant finie à  $\mathbb{C}$ -isomorphisme près, la bijection ci-dessus associe donc à  $f$  un sous-ensemble fini de  $M_g(\mathbb{C})$ . Or par la prop. 1.3.7, Ch. 0 [7],  $M_g(\mathbb{C})$  est isomorphe à  $\text{Hom}_U(U, M_{g,\mathbb{C}})$ , où  $U = \text{Spec}(\mathbb{C})$  et  $M_{g,k} = M_g \times_{\mathbb{Z}} k$ ,  $k$  un corps. De même,  $M_g(\overline{\mathbb{Q}})$  est isomorphe à  $\text{Hom}_V(V, M_{g,\overline{\mathbb{Q}}})$  où  $V = \text{Spec}(\overline{\mathbb{Q}})$ . Par transitivité du changement de base,  $M_{g,\mathbb{C}} = M_{g,\mathbb{Q}} \times_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$  et  $M_{g,\overline{\mathbb{Q}}} = M_{g,\mathbb{Q}} \times_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}$ . Les deux corps  $\mathbb{C}$  et  $\overline{\mathbb{Q}}$  étant algébriquement clos,  $\mathcal{M}_g(\mathbb{C})$  est donc en bijection avec l'ensemble des points clos de  $M_{g,\mathbb{C}}$ , et  $\mathcal{M}_g(\overline{\mathbb{Q}})$  avec celui des points clos de  $M_{g,\overline{\mathbb{Q}}}$  (voir par exemple [13, §II.6], les changements de base respectant la propriété d'être de type fini [7, prop. 6.3.4, Ch. 1]). Ainsi l'orbite quotientée de  $f$  est associée naturellement à un sous-ensemble algébrique du schéma  $M_{g,\mathbb{C}}$ . Cet ensemble est stable sous l'action de  $G$ . En conséquence, l'idéal de cet ensemble (dans un ouvert affine le contenant, défini sur  $\overline{\mathbb{Q}}$ ) est défini sur  $\mathbb{Q}$ , du fait que  $\mathbb{C}^G = \mathbb{Q}$  [2, prop. 10, §14, Ch. 5] et [15, lemme 2, Ch. I, §7]. Cet ensemble est défini sur  $\overline{\mathbb{Q}}$ , ainsi que les points qui le composent puisqu'il est fini et que  $\overline{\mathbb{Q}}$  est algébriquement clos [15, cor. 1 du thm 7, Ch. IV, §4]. Il nous reste donc à voir que l'image d'un tel point, par le morphisme  $M_{g,\mathbb{C}} \rightarrow M_{g,\overline{\mathbb{Q}}}$  déduit du changement de base, est un point fermé de  $M_{g,\overline{\mathbb{Q}}}$ . Or c'est évident puisque ces deux schémas sont issus de  $M_{g,\mathbb{Q}}$  par changement de base, que  $\mathbb{C}$  est fidèlement plat sur  $\overline{\mathbb{Q}}$  [3, Ch. 1]. En se plaçant dans un  $\overline{\mathbb{Q}}$ -ouvert affine  $\text{Spec}(R)$  du point considéré. Il y a équivalence de l'exactitude des deux suites :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathcal{I} \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}} \mathbb{C} \longrightarrow R \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}} \mathbb{C} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}} \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}} \mathbb{C} \longrightarrow 0, \\ 0 \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow R \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}} \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

où  $\mathcal{I} \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}} \mathbb{C}$  est l'idéal maximal dans  $R$  du point considéré. Ainsi  $f$  est définie sur  $\overline{\mathbb{Q}}$ , et il en est de même bien entendu de la courbe  $X$ . Notons que non seulement la courbe  $X$  est définie sur un corps de nombres, mais la fonction rationnelle  $f$  elle-même est définie sur un tel corps. Ceci nous sera utile par la suite. Enfin le lemme de Belyi permet d'étendre le raisonnement précédent aux fonctions ramifiées au-dessus d'entiers algébriques en nombre quelconque, du fait que les polynômes et homographies apparaissant dans sa preuve sont à coefficients dans  $\overline{\mathbb{Q}}$ .

### 3. La correspondance de Grothendieck

Soit  $X$  un dessin d'enfant. Munissons-le d'une triangulation. Identifions le dessin universel  $\perp$  avec  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ , de sorte que triangulé, son sommet soit 0, son arête le segment  $]0, 1]$ , et le centre de sa face soit  $\infty$ . L'unique morphisme  $X \rightarrow \perp$  munit l'espace topologique  $X$  d'une structure complexe qui en fait une courbe algébrique, ramifiée au-dessus de  $\{0, 1, \infty\}$  exclusivement, telle que tout point de branchement au-dessus de 1 ait un degré au plus égal à 2.

Appelons fonction ou morphisme de Belyi un morphisme  $f$  non-constant d'une courbe algébrique  $C$ , projective, lisse et définie sur  $\mathbb{C}$ , dans  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ , non ramifié en dehors de 0, 1 et  $\infty$ , et telle que le degré de branchement au-dessus de 1 soit au plus 2 en chaque point. Si ce degré est constamment égal à 2, le

morphisme de Belyi est dit propre. La paire  $(C, f)$  est dite de Belyi, propre lorsque  $f$  l'est. Deux paires de Belyi  $(C, f)$  et  $(C', f')$  sont dites isomorphes lorsqu'il existe un  $\mathbb{C}$ -isomorphisme  $g : C \rightarrow C'$  tel que  $f = f' \circ g$ .

Nous venons de voir qu'à un dessin il est possible d'associer une paire de Belyi. Réciproquement, soit  $(C, f)$  une paire de Belyi. Posons  $V = f^{-1}(0)$ ,  $X_1 = f^{-1}([0, 1])$ ,  $X_0 = V \cup \{x \mid f(x) = 1, e_f(x) = 1\}$ ,  $e_f(x)$  étant l'indice de branchement de  $f$  en  $x$ , et enfin  $X_2$  est l'espace topologique sous-jacent à  $C$ . Munissons  $X_2$  d'une structure de 2-complexe cellulaire  $X$  telle que son  $i$ -squelette soit  $X_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ . Soient  $N$  et  $S$  les hémisphères ouvertes nord et sud de  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ , i.e. les ensembles  $\{z \mid \Im(z) > 0\}$  et  $\{z \mid \Im(z) < 0\}$  respectivement lorsque  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  est identifié au compactifié de  $\mathbb{C}$ . Les ouverts  $N$  et  $S$  sont les triangles positif et négatif associés à la triangulation naturelle de  $\perp$  identifié à  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ . Définissons  $T^+(X)$  comme étant l'ensemble des composantes connexes de  $f^{-1}(N)$  (resp.  $T^-(X)$  et  $f^{-1}(S)$ ). Enfin définissons les centres d'arêtes et de faces comme éléments de  $f^{-1}(1)$  et de  $f^{-1}(\infty)$  respectivement. Les propriétés usuelles de la partition d'un revêtement ramifié en feuilletts montrent que  $(X, V)$  est un dessin d'enfant, triangulé par  $T(X) = T^+(X) \cup T^-(X)$ .

Précisons toutefois ce dernier point en des données combinatoires. Soit donc  $C$  un revêtement connexe de degré fini de la sphère de Riemann, non ramifié en dehors de  $0, 1$  et  $\infty$ . La surface  $C$  est orientable et sans bord. Si nous supposons, comme dans le cas des dessins, que le degré de branchement au-dessus de  $1$  est au plus  $2$ , le groupe de monodromie agissant sur la fibre du revêtement en un point de  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$  est un groupe de permutation transitif de degré  $d$  égal à celui du revêtement, engendré par trois permutations  $\sigma_0, \sigma_1$  et  $\sigma_\infty$  telles que  $\sigma_0\sigma_1\sigma_\infty = \sigma_1^2 = 1$ , qui sont les images des générateurs de  $\pi_1(\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\})$  correspondant à des lacets tournant en sens direct autour de  $0, 1$  et  $\infty$ .

Montrons que, réciproquement, la donnée d'un tel groupe de permutations définit un revêtement de  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ . Soient donc deux permutations  $\sigma_0$  et  $\sigma_1$  du groupe symétrique de degré  $d$ , telles que  $\langle \sigma_0, \sigma_1 \rangle$  soit transitif dans son action naturelle, c.-à-d. sur les entiers compris entre  $1$  et  $d$ . A chaque orbite  $c$  du sous-groupe  $\langle \sigma_\infty \rangle$ ,  $\sigma_\infty = (\sigma_0\sigma_1)^{-1}$  associons un polygone régulier  $P$  à  $n$  côtés,  $n \geq 1$ ,  $n$  la taille de cette orbite. En les énumérant dans le sens direct, les côtés de  $P$  sont étiquetés successivement par les paires  $(a, \sigma_1(a))$ , puis  $(\sigma_\infty(a), \sigma_1\sigma_\infty(a)), \dots$ , où  $a$  est un élément de l'orbite  $c$ . Les polygones sont recollés entre eux par l'identification de deux côtés étiquetés  $(a, b)$  et  $(b, a)$  respectivement, ces deux côtés étant juxtaposés en sens inverse l'un de l'autre. Ainsi, si ces paires sont distinctes, deux arêtes distinctes sont identifiées, sinon une arête est repliée sur elle-même.

Chaque arête étant identifiée avec exactement une autre, puisque  $\sigma_1^2 = 1$ , l'espace ainsi obtenu est une surface compacte  $C'$ , connexe puisque les polygones le sont et que l'action est transitive, orientable car les polygones le sont et le choix du sens d'identification des arêtes respecte l'orientabilité. La partition de  $C'$  en intérieurs des polygones, intérieurs des côtés et sommets forme un dessin  $(C', V)$ ,  $V$  ensemble des images des sommets. Deux dessins  $(C, V)$  et  $(C', V')$  possédant même degré  $d$  et des fibres génériques munies d'actions de monodromie isomorphes, correspondent à des sous-groupes conjugués du groupe fondamental de  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$  [2, thm 1, §I.5] et définissent donc des revêtements de  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  isomorphes par le théorème de classification des revêtements. Il est alors immédiat que les dessins eux-mêmes sont isomorphes.

**THÉORÈME 2 (CORRESPONDANCE DE GROTHENDIECK).** *Il y a bijection entre classes d'isomorphisme de dessins et classes d'isomorphisme de paires de Belyi. De plus, chaque paire de Belyi est isomorphe à une paire définie sur  $\overline{\mathbb{Q}}$ , et donc chaque dessin est réalisable comme revêtement de la sphère de Riemann, défini sur un corps de nombres.*

**PREUVE.** A chaque classe de dessins est associée bijectivement une classe de conjugaison de sous-groupes d'indice fini de  $C_2^+$  par le premier théorème. Ce groupe  $C_2^+$  est isomorphe à  $\pi_1(\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\})$  quotienté par le sous-groupe normal  $N$  engendré par  $l_1^2$ ,  $l_1$  un lacet en sens direct autour de  $1$ , via l'isomorphisme défini par  $\rho_0 \mapsto l_0, \rho_1 \mapsto l_1, \rho_2 \mapsto l_\infty$ , où  $l_0$  et  $l_\infty$  sont des lacets autour de  $0$  et  $\infty$  en sens direct (modulo homotopie). La classe de conjugaison de sous-groupes de  $C_2^+$  est alors bijectivement associée à une classe de conjugaison de sous-groupes d'indice fini de ce  $\pi_1$ , contenant chacun  $N$ . A son tour, cette classe est bijectivement associée à une classe d'isomorphie de revêtements finis de  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ , ramifiés uniquement au-dessus de  $0, 1, \infty$ , d'indice au plus égal à deux au-dessus de  $1$ , d'après l'étude précédant le théorème. La classe de la paire de Belyi correspondant à cette classe de revêtements est donc bijectivement associée à la classe de dessins. La seconde

partie du théorème est une paraphrase de la caractérisation des courbes définies sur  $\overline{\mathbb{Q}}$  via le lemme de Belyi.  $\square$

Notons que si  $f$  est un isomorphisme entre les paires de Belyi  $(C, h)$  et  $(C', h')$ , et si les dessins associés à ces deux paires sont respectivement  $(X, V)$  et  $(X', V')$ , nous avons  $f(X_1) = X'_1$ ,  $f(V) = V'$  et  $f(F) = F'$ , où  $F, F'$  désignent les ensembles des centres d'arêtes de  $X$  et  $X'$ .

#### 4. Action galoisienne sur les dessins

La propriété d'être définie sur  $\overline{\mathbb{Q}}$  permet d'introduire une action galoisienne sur les morphismes de Belyi, et donc sur les dessins par la correspondance de Grothendieck. Soit en effet une paire  $(C, f)$  définie sur  $\overline{\mathbb{Q}}$ , de dessin associé  $X$ . Si  $\sigma \in \mathbb{G}$ , la paire  $(C^\sigma, f^\sigma)$  est de Belyi. En effet, la courbe  $C^\sigma$  est de même genre que  $C$ ,  $f^\sigma$  a même degré que  $f$  (prop. 27, F-IV<sub>7</sub>). De plus les points de branchement de  $f$  et  $f^\sigma$  se correspondent par  $\sigma$ , et comme  $0, 1, \infty$  sont  $\mathbb{Q}$ -rationnels,  $f^\sigma$  est ramifiée uniquement au-dessus de ces trois points. Si  $P$  est un point de branchement de  $f$ ,  $P^\sigma$  l'est pour  $f^\sigma$  et de plus les indices de branchement  $e_f(P)$  et  $e_{f^\sigma}(P^\sigma)$  sont égaux. Pour voir ce dernier point, il suffit d'appliquer l'équivalence [15, Ch. IX, §4] :

$$f^*(Q) = \sum_i e_f(P_i)P_i \quad \iff \quad (f^\sigma)^*(Q^\sigma) = \sum_i e_{f^\sigma}(P_i^\sigma)P_i^\sigma,$$

aux diviseurs égaux aux points de ramification, et à leurs images réciproques par  $f$ , égales à la somme des points de branchement au-dessus du point de ramification considéré, comptés avec leur multiplicité, tous ces diviseurs étant  $\overline{\mathbb{Q}}$ -rationnels. L'action de Galois préserve les points de branchement et leur degré. La paire  $(C^\sigma, f^\sigma)$  est donc de Belyi, et est propre ssi  $(C, f)$  l'est. Elle détermine un dessin qui est indépendant du choix de la paire  $(C, f)$  représentant  $X$ . En effet, si  $(C', f')$  est une autre paire de Belyi définie sur  $\overline{\mathbb{Q}}$ , et associée à  $X$ , il existe, par la correspondance de Grothendieck, un isomorphisme  $g : C \rightarrow C'$  tel que  $f = f' \circ g$ . D'après le cor. 1 à la prop. 8, Ch. 5, [2], il existe, pour tout  $\sigma \in \mathbb{G}$ , au moins un automorphisme  $\tau$  de  $\text{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$  prolongeant  $\sigma$ . On a alors  $f^\sigma = f'^\sigma \circ g^\tau$ , et  $g^\tau$  est un isomorphisme entre  $C^\sigma$  et  $C'^\sigma$ . Les deux dessins ainsi définis sont donc isomorphes, ce qui conduit à définir un dessin abstrait comme étant une classe d'isomorphisme de dessins d'enfants. Il existe alors une action galoisienne sur les dessins abstraits.

C'est bien une action de groupe, puisqu'elle est définie en dernière analyse par l'action naturelle de  $\mathbb{G}$ . Cette action conserve le genre, le degré ainsi que les listes de valence des sommets et des centres de face et d'arêtes du dessin. C'est sur cette propriété que se fonde la recherche de fractions rationnelles de Belyi en genre 0 développée par L. Schneps et J.-M. Couveignes. Pour  $X$  un tel dessin, on note  $\mathbb{G}(X)$  le sous-groupe de stabilité de  $X : \mathbb{G}(X) = \{\sigma \in \mathbb{G} \mid X^\sigma = X\}$ . De même, si  $(C, f)$  est une paire de Belyi associée à  $X$ , que nous supposons désormais définie sur un corps de nombres, on note  $\mathbb{G}(C, f)$ , ou plus simplement  $\mathbb{G}(f)$ , le sous-groupe de  $\mathbb{G}(X)$  formé des éléments  $\sigma$  tels que  $f^\sigma = f$ . Le groupe  $\mathbb{G}(X)$  est ouvert, puisque défini à partir d'une extension de degré fini de  $\mathbb{Q}$  (un corps de définition d'une paire de Belyi pour  $X$ ). Il est fermé puisque c'est le stabilisateur d'un point de l'ensemble des dessins abstraits, muni de la topologie discrète, où opère le groupe compact  $\mathbb{G}$  [4, prop. 2 et 4, §4, Ch. 3]. On peut donc définir le corps du dessin comme étant le corps des invariants de  $\mathbb{G}(X)$  (pour  $f$ , on retrouve la définition usuelle). Le corps de définition de  $X$  est donc de degré fini égal à  $[\mathbb{G} : \mathbb{G}(X)]$  [2, cor. 5 au thm 4, §10, Ch. 5], et est inclus dans le corps de définition de  $f$ , puisque  $\mathbb{G}(f) \subset \mathbb{G}(X)$ . Naturellement, les orbites d'un dessin et d'une paire de Belyi sous  $\mathbb{G}$  sont finies.

L'indice de minimalité d'un dessin est le nombre minimal de  $\mathbb{G}$ -conjugués de  $f$ , lorsque  $f$  parcourt l'ensemble des morphismes de Belyi associés à  $X$ . C'est aussi le minimum des degrés des extensions (corps de  $f$ )/(corps de  $X$ ), par la correspondance de Galois.

Rappelons le formulaire suivant, où, pour un dessin  $(X, V)$ ,  $v$  est le cardinal de  $X_0$ ,  $e$  le nombre d'arêtes,  $f$  celui de faces,  $g$  le genre de  $X$  :

$$v - e + f = 2 - 2g \quad (\text{formule d'Euler-Poincaré}).$$

Nous avons défini la valence  $v(a)$  d'un sommet ou centre d'arête  $a$ . On peut de même définir la valence du centre d'une face comme étant le nombre d'arêtes bordant cette face. La valence d'une arête ou d'une face



est celle de son centre. Soit  $d$  le degré du dessin  $X$  :

$$d = \sum_{\text{sommets } s} v(s) = \sum_{\text{arêtes } e} v(e) = \sum_{\text{faces } f} v(f).$$

Enfin, si les  $e_{i,j}$ ,  $i = 0, 1, \infty$ ,  $j = 1, \dots, k_i$ , désignent les longueurs des orbites dans  $\pi_1(\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\})/B$  de  $l_0, l_1, l_\infty$  respectivement, où  $B$  est le stabilisateur d'un triangle de  $X$ , et si  $n_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ , est le nombre de cycles de  $\sigma_i$  agissant comme permutation de  $T(X)$ , la formule de Riemann-Hurwitz donne :

$$2g - 2 = -2d + \sum_{i \in \{0, 1, \infty\}} \sum_j (e_{i,j} - 1) = d - n_0 - n_1 - n_2.$$

Si le dessin  $X$  est propre, on a  $l = 2e$ .

La méthode proposée par L. Schneps et développée par J.-M. Couveignes pour rechercher une fonction de Belyi d'un dessin propre est la suivante. Les points du dessin au-dessus d'un même point de ramification et de même indice de branchement sont regroupés comme ensemble des zéros, qu'on impose simples, d'un polynôme, à coefficients dans  $\overline{\mathbb{Q}}$  puisque ces points sont  $\overline{\mathbb{Q}}$ -rationnels. Soient  $S_i$ ,  $A_i$  et  $F_i$  les polynômes dont les racines sont respectivement les sommets, les centres d'arêtes et les centres de faces de valence égale à  $i$  ( $A_i = 1$  si  $i \neq 2$  lorsque le dessin est propre). La fraction rationnelle  $f$  recherchée vérifie :

$$f(z) = a \prod_i S_i(z)^i / \prod_j F_j(z)^j, \quad \text{et}$$

$$f(z) - 1 = b \prod_k A_k(z)^k / \prod_j F_j(z)^j, \quad a, b \in \overline{\mathbb{Q}}.$$

Il en résulte une identité de la forme :

$$a \prod_i S_i^i - \prod_j F_j^j = b \prod_k A_k^k.$$

Cette dernière fournit des équations algébriques entre  $a$ ,  $b$  et les coefficients des polynômes  $S_i$ ,  $A_k$  et  $F_j$ , qu'une spécialisation adéquate basée sur la 3-transitivité de  $\text{PSL}_2$  transforme en un système à nombre fini de solutions, nécessairement dans  $\overline{\mathbb{Q}}$ . On trouvera dans leurs articles à paraître (resp. *Dessins d'enfants on the Riemann sphere* et *Calcul et rationalité de fonctions de Belyi en genre 0*) de nombreux exemples, des résultats relatifs aux indices de minimalité, à la fidélité de l'action de  $\mathbb{G}$  sur les dessins, aux fonctions de Belyi des arbres, qu'on peut supposer polynômiales, et enfin aux automorphismes des dessins.

Le présent résumé n'est qu'une reformulation des préliminaires de ces deux articles, abâtardie par les laborieux démêlés de son auteur qui tient à remercier Marc Hindry et Jean-Marc Couveignes de leurs remarques et commentaires, ainsi que Philippe Flajolet et Bruno Salvy dont l'insistance a permis la rédaction de ce résumé.

### Bibliographie

- [1] Belyi (G. V.). – On Galois extensions of the maximal cyclotomic field. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR*, vol. 43, n° 2, 1979, pp. 269–276.
- [2] Bourbaki (N.). – *Algèbre*. – Masson, 1981.
- [3] Bourbaki (N.). – *Algèbre commutative*. – Masson, 1985.
- [4] Bourbaki (N.). – *Topologie générale*. – Masson, 1990.
- [5] Forster (O.). – *Riemannsche Flächen*. – Springer-Verlag, 1977.
- [6] Godbillon (C.). – *Éléments de Topologie Algébrique*. – Hermann, 1971.
- [7] Grothendieck (A.) et Dieudonné (J.). – *Éléments de Géométrie Algébrique*. – Springer-Verlag, 1971.
- [8] Hartshorne (R.). – *Algebraic Geometry*. – Springer-Verlag, 1987.
- [9] Lang (S.). – *Elliptic Functions*. – Springer-Verlag, 1987.
- [10] Mumford (D.). – The structure of the moduli spaces of curves and Abelian varieties. *In: Actes CIM*, pp. 457–465. – Gauthier-Villars, 1971.

- [11] Mumford (D.). – *Algebraic Geometry I: Complex Projective Varieties*. – Springer-Verlag, 1981.
- [12] Mumford (D.). – *Geometric Invariant Theory*. – Springer-Verlag, 1982.
- [13] Mumford (D.). – *The red book of varieties and schemes*. – Springer-Verlag, 1988.
- [14] Spanier (E. H.). – *Algebraic Topology*. – McGraw-Hill, 1966.
- [15] Weil (A.). – *Foundations of Algebraic Geometry*. – AMS, 1967.