6

Approximations de séries génératrices

Simon Plouffe
UQAM, Montréal

[résumé par Paul Zimmermann]

Quelle est la suite logique de $1, 2, 4, 7$? L'exposé montre que pour un certain nombre de suites, on peut trouver automatiquement une suite logique, en utilisant le calcul formel. L'idée est d'essayer de trouver une forme explicite pour la série génératrice associée aux termes de la suite, à partir des premiers. Lorsqu'une telle forme existe, et qu'elle correspond effectivement à la suite d'entiers (ce qui n'est pas toujours facile à vérifier), un simple développement de Taylor donne n'importe quel terme. On peut même obtenir un développement asymptotique du n-ième terme en utilisant un module d'analyse asymptotique comme le programme `equivalent` de B. Salvy [4].

1 Le livre de Sloane : *A Handbook of Integer Sequences*

Pour trouver les prochains termes après $1, 2, 4, 7$, on peut remarquer que le second terme égale le premier augmenté de 1, le troisième égale le second augmenté de 2, le quatrième le troisième augmenté de 3. La suite logique est donc $7+4 = 11$, puis $11+5 = 16$, $16+6 = 22$. Une autre méthode est de consulter une table de suites, en l'occurrence le livre *A Handbook of Integer Sequences* publié en 1973 par Sloane [5]. Ce livre contient une table de 2372 entrées, chaque entrée étant constituée d'un numéro d'index, des premiers termes de la suite, d'une définition de la suite et d'une référence. La suite $1, 2, 4, 7, 11, 16, 22$ y est répertoriée sous le numéro 391. On y découvre que ces nombres sont appelés "nombres polygonaux centraux", valent $n(n-1)/2+1$, et sont aussi le nombre maximal de parts que l'on peut obtenir en coupant un gâteau $n - 1$ fois.
Mais d'autres suites commençant par $1, 2, 4, 7$ existent : il y en a en tout 25 répertoriées dans le livre de Sloane (numéros 388 à 412). Ainsi il y a 24 autres suites possibles à $1, 2, 4, 7$: par exemple $1, 2, 4, 7, 8$ (entiers qui ont un nombre impair de 1 dans leur écriture binaire) ou $1, 2, 4, 7, 12$ (nombres de Fibonacci moins un).
Depuis la parution de son livre en 1973, Sloane a reçu un courrier volumineux (près d'un mètre cube de lettres) lui indiquant de nouvelles suites; et depuis quelque temps, il a entrepris avec Simon Plouffe la réalisation d'une seconde édition du *Handbook of Integer Sequences*. Cette nouvelle édition comprendra environ 5000 suites, 92000 termes, 6200 références, et des formules.

2 La fonction `'convert/ratpoly'` de Maple

Il est en effet intéressant d'avoir un moyen simple de générer les termes d'une suite. Cela peut être une formule de récurrence, ou une série génératrice. Par exemple, les nombres polygonaux centraux sont les coefficients du développement de Taylor à l'origine de $(1 - z + z^2)/(1 - z)^3$:

```
> f:=(1-z+z^2)/(1-z)^3:
> series(f,z,7);
                         2      3       4       5       6      7
            1 + 2 z + 4 z  + 7 z  + 11 z  + 16 z  + 22 z  + O(z )

> factor(convert(",ratpoly));
                                                  2
                                         1 - z + z
                                       - ----------
                                                 3
                                          (z - 1)
```

Ainsi, la fonction `convert/ratpoly` permet de retrouver la fraction rationnelle f à partir des premiers termes, et est en quelque sorte l'inverse de `series` pour les fractions rationnelles.
Autre exemple : les nombres merveilleux de Demlo (suite 2339 de [5]) sont 1, $11^2 = 121$, $111^2 = 12321, 1234321, 123454321, 12345654321, 1234567654321, \ldots$ Avec ces seuls sept termes, la fonction `convert/ratpoly` de Maple trouve la série $(1+10z)/((1-z)(1-10z)(1-100z))$. Lorsqu'on trouve une forme rationnelle $P(x)/Q(x)$, le polynôme P traduit les conditions initiales et Q la récurrence.
La fonction `convert/ratpoly` de Maple, qui a été écrite par K. Geddes, utilise la méthode de Cabay-Choi pour calculer les approximants de Padé [2]. C'est l'un des meilleurs algorithmes connus, et le résultat est réduit au maximum. Cet algorithme donne toujours une approximation sous forme de fraction rationnelle, dont la somme des degrés du numérateur et du dénominateur est au plus égale au nombre de termes donnés. Ainsi, pour s'assurer que l'on a obtenu la "bonne" forme, on recommence avec quelques termes supplémentaires et on vérifie que le résultat est le même.
Sur 4568 suites, la seule utilisation de `convert/ratpoly` a permis de trouver 600 séries génératrices rationnelles! Par exemple, les nombres de Delaunay ($1, 7, 25, 63, 129, \ldots$, suite 1844) ont pour série génératrice $(1+x)^3/(1-x)^4$, les permanents des matrices $(0,1)$ cycliques ($1, 24, 44, 80, 144, 264, \ldots$, suite 2232) ont pour série $4(6-x-2x^2-4x^3)/((1-x)(1-x-x^2-x^3))$, le nombre de façons de remplir une boîte avec des dominos ($1, 2, 2, 4, 5, 9, \ldots$, suite 117) a pour série $(1+x-2x^2-x^3-x^4-x^5)/((1-x-x^2)(1-x^2-x^4))$.
Le principal avantage de la représentation par séries génératrices est que cela permet de générer facilement des termes supplémentaires. D'autre part, la complexité de la formule permet d'apprécier la "généricité" de la suite (en effet, si les coefficients sont petits, alors la suite s'exprime simplement en tant que série génératrice). Cela permet de regrouper les suites par classes de formules (rationnelles, algébriques, etc), de déduire une formule générale pour une famille de suites semblables (par exemples les nombres de Delaunay).
Le principal problème est justement de trouver la forme de la série génératrice associée à une suite, lorsqu'elle existe. La fonction `convert/ratpoly` de Maple reconnaît les fractions rationnelles, mais cela ne représente que 600 suites sur 4568, soit seulement 13%.

3 Extension à d'autres classes de formules

Lorsque `convert/ratpoly`(f) ne donne pas de forme simple, l'idée (due à F. Bergeron) est alors de regarder si $\log(f)$, $\exp(f)$, la dérivée de f, sa dérivée logarithmique, son inverse fonctionnel, et d'autres transformées de f ont une forme rationnelle. On "récupère" ainsi les formules du type

$\log(P/Q)$, $\exp(P/Q)$, $\sqrt{P/Q}$, $\int P/Q$ et leurs combinaisons. En fait, il est apparu à l'expérience que trois transformations attrapent à elles seules la plupart des formules : la dérivée, la dérivée logarithmique et l'inverse pour la substitution.
Ces transformations permettent de trouver un plus grand nombre de séries : près de 1000 sur 4568, soit environ 22%. Par exemple le nombre de nuées de n points $(1, 3, 12, 70, 465, \ldots$, suite 1181) a pour série $\exp(-z/2 - z^2/4)/(1-z)^{1/2}$, la seconde colonne des nombres de Stirling de première espèce $(1, 3, 11, 50, 274, \ldots$, suite 1165) a pour série génératrice exponentielle $(1 - \log(1-z))/(1-z)^2$, le nombre de permutations de n éléments sans cycle de longueur 3 (suite 496) a pour série $\exp(-z^3/3)/(1-z)$.
S'il est facile d'utiliser la fonction `convert/ratpoly` de Maple pour trouver une formule, il n'est pas toujours aussi simple de prouver que cette formule correspond réellement à la suite en question. Prolonger la suite n'est pas évident dans certains cas. Par exemple, la suite correspondant au nombre de graphes enracinés de genre 2 sur n points, dont les termes connus sont 21, 483, 6468, 66066, 570570, 4390386, 31039008, 205633428, 1293938646, 7808250450, 45510945480, semble avoir comme série génératrice $21(1+z)/(1-4z)^{11/2}$, mais ce n'est qu'une conjecture.

4 Remarques finales

La fonction `convert/ratpoly` n'est pas limitée aux séries à une variable. Par exemple, elle permet de trouver la série bivariée des polynômes de Tchébychev :

```
> 1 + x*t + (2*x^2-1)*t^2 + (4*x^3-3*x)*t^3 + (8*x^4-8*x^2+1)*t^4:
> convert(series(",t),ratpoly);
                         - t x + 1
                     ----------------
                                   2
                     - 2 t x + t  + 1
```

Au lieu de chercher une formule close pour la série génératrice associée à une suite, on peut chercher une équation qu'elle vérifie (équation algébrique ou différentielle). B. Salvy a écrit un programme Maple qui cherche soit une équation algébrique à coefficients polynomiaux, soit une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux également, par la méthode des coefficients indéterminés. Ce programme trouve par exemple la forme suivante pour les graphes polyédraux enracinés :

```
                     3/2                  2      3      4       5
    (1 + x) ((- 4 x + 1)    - 1 + 6 x - 6 x  - 4 x  - 6 x ) + 4 x
1/2 --------------------------------------------------------------
                         5        3
                        x  (x + 2)  (1 + x)
```

et pour les dénominateurs des convergents du nombre e (suite 1240) :

```
                     1/2
exp(1/2 - 1/2 (1 - 4 x)   )
---------------------------
                  1/2
        (1 - 4 x)
```

En conclusion, il a été réalisé par Simon Plouffe et François Bergeron [1] un programme Maple qui, à partir des premiers coefficients d'une suite, cherche une forme simple pour la série génératrice ordinaire (ou exponentielle) associée, en utilisant éventuellement des transformations élémentaires sur la suite. Ce programme trouve une formule pour environ 22% des suites de la nouvelle édition, soit 1000 suites sur 4568. Parmi les suites qui restent, le programme `guessgf` de B. Salvy détecte 20 suites algébriques et 194 suites holonomes. Enfin, en combinant le programme de Simon Plouffe et le programme `equivalent` de Bruno Salvy, on obtient une fonction Maple qui donne le développement asymptotique d'une suite à partir des premiers coefficients :

```
> Asympt(21,483,6468,66066,570570,4390386);

                              9/2  n
                             n    4
                        (8/9 -------)
                                1/2
                              Pi
```

Pour envoyer de nouvelles suites : Les adresses électroniques de N. J. A. Sloane et Simon Plouffe sont respectivement `njas@research.att.com` et `plouffe@lacim.uqam.ca`.

Références

[1] F. Bergeron and S. Plouffe. Computing the Generating Function of a Series given its First Terms. *Journal of experimental mathematics*, 1992. Existe aussi en rapport technique numéro 164 du Département de Mathématiques et d'Informatique de l'Université du Québec à Montréal.

[2] S. Cabay and D.-K. Choi. Algebraic Computations of Scaled Padé Fractions. *SIAM Journal on Computing*, 15(1):243–270, February 1986.

[3] S. Plouffe. Approximations de séries génératrices et quelques conjectures. Rapport de recherche 61, Laboratoire Bordelais de Recherche en Informatique, 1992. Mémoire présenté à l'Université du Québec à Montréal comme exigence partielle de la maîtrise en Mathématiques.

[4] B. Salvy. *Asymptotique automatique et fonctions génératrices.* Thèse de doctorat, École Polytechnique, 1991.

[5] N. J. A. Sloane. *A Handbook of Integer Sequences.* Academic Press, 1973.