11

L'algorithme de Kovačić

Michèle Loday-Richaud
Université de Paris-Sud, Orsay

[résumé par Philippe Le Chenadec]

1 Extensions liouvilliennes

1.1 Résumé de la théorie de Galois différentielle

Une extension de Picard-Vessiot du corps des fractions rationnelles $\mathbb{C}(x)$ est obtenue en lui adjoignant les solutions d'une équation différentielle ordinaire, linéaire et homogène (EDOLH), dont les coefficients appartiennent à $\mathbb{C}(x)$. Un élément d'un tel corps est liouvillien s'il est exprimable par combinaisons successives d'intégrales, d'exponentielles et d'éléments algébriques, les éléments de base appartenant à $\mathbb{C}(x)$. L'algorithme de Kovačić fournit les solutions liouvilliennes d'une EDOLH du second ordre lorsqu'il en existe. Des extensions à l'ordre quelconque ont été décrites par M. Singer dans [10]. Nous résumons ici la version originale de l'algorithme à l'ordre deux [6]. Pour des améliorations et de nombreux exemples, nous renvoyons aux travaux de A. Duval et M. Loday-Richaud dans [2].

La notion fondamentale est celle de corps différentiel : soit K un corps, supposé de caractéristique $\mathrm{car}(K)$ nulle, une application $\partial : K \to K$ est une dérivation si et seulement si $\partial(x+y) = \partial(x)+\partial(y)$ et $\partial(xy) = \partial(x)y + x\partial(y)$, $x, y \in K$. Une dérivation annule le corps premier, ici $\mathbb{Q}$, et l'ensemble C des *constantes* $x \in K$, $\partial(x) = 0$, est un sous-corps de K. Ce dernier est alors muni d'une structure de C-espace vectoriel qui fait de ∂ une application C-linéaire. Pour les EDOLH qui nous intéressent, nous avons $C = \mathbb{C}$ et $\partial = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}$, la dérivation usuelle.

Étant donnés deux corps différentiels K et L, un morphisme de corps $\sigma : K \to L$ est différentiel s'il commute avec les dérivations : $\sigma \circ \partial_K = \partial_L \circ \sigma$. Une extension K/k est dite différentielle lorsque $\partial_k = \partial_K|k$ (l'inclusion de k dans K est différentielle). On note $k\langle y_1, \ldots, y_n\rangle$ le sous-corps différentiel de K engendré par $y_1, \ldots, y_n \in K$ (qui existe puisque l'intersection de sous-corps différentiels de K est un sous-corps différentiel de K). Un opérateur différentiel D défini sur k est un polynôme non nul et non commutatif $D = a_n\partial^n + \cdots + a_0$ de $k[\partial]$. L'équation différentielle associée est l'équation $D(y) = a_n\partial^n(y) + \cdots + a_0 y = 0$, son degré est celui de D. Une solution de D dans K est un élément $x \in K$ tel que $D(x) = 0$. Dorénavant, nous supposerons D unitaire.

Définition 1 *L'extension différentielle K/k est une extension de Picard-Vessiot associée à l'opérateur différentiel $D \in k[\partial]$, de degré n, si et seulement si K et k ont même corps C de constantes, et $K = k\langle y_1, \ldots, y_n\rangle$, où les $y_i \in K$ sont des solutions de D dans K, C-linéairement indépendantes.*

Théorème 1 [5] *Si $\mathrm{car}(k) = 0$, k corps différentiel à corps de constantes algébriquement clos, il existe une extension de Picard-Vessiot associée à tout opérateur différentiel à coefficients dans k, unique à k-isomorphisme différentiel près.*

On suppose désormais que le corps des constantes est algébriquement clos. Si $k \subset L \subset K$ sont des extensions différentielles, avec K/k de Picard-Vessiot associée à D, alors K/L est aussi de Picard-Vessiot, associée à D. Pour K/k une extension différentielle, on définit le *groupe* de Galois différentiel $\mathrm{Gal}(K/k) = \{\sigma \in Aut(K) \mid \sigma$ est un $k -$ automorphisme différentiel de $K\}$. Si de plus K/k est l'*extension* de Picard-Vessiot associée à D, de degré n, tout morphisme $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/k)$ donne par restriction un élément de $GL(V)$, où $V \subset K$ est le C-espace vectoriel de dimension n des solutions dans K de D, puisque σ commute avec ∂. De plus, l'application $\mathrm{Gal}(K/k) \to GL(V)$ ainsi définie est un morphisme injectif, K/k étant de Picard-Vessiot. Le choix d'une C-base de V fournit donc une représentation linéaire $\mathrm{Gal}(K/k) \to GL_n(C)$, définie à conjugaison près dans $GL_n(C)$. Enfin, dernier ingrédient différentiel, l'extension K/k est dite normale si et seulement si pour tout $x \in K - k$, il existe $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/k)$ qui ne fixe pas $x : \sigma(x) \neq x$. On démontre que toute extension de Picard-Vessiot à corps de constantes algébriquement clos est normale (esquisse de preuve dans l'article de M. Singer dans [10]). Rappelons qu'un sous-groupe de $GL_n(C)$ est (C-)algébrique s'il est fermé dans la topologie de Zariski de $GL_n(C)$, induite par la topologie de Zariski de l'espace affine C^{n^2+1} via le plongement usuel du groupe linéaire dans cet espace.
Si l'extension K/k est différentielle, pour tout sous-groupe $H \subset \mathrm{Gal}(K/k)$ on définit le sous-corps *différentiel* $K_H = \{x \in K \mid \forall \sigma \in H,\ \sigma(x) = x\}$, et à tout sous-corps différentiel $L \subset K$, on associe le sous-groupe $\mathrm{Gal}(K/L)$ de $\mathrm{Gal}(K/k)$.

Théorème 2 *Soit K/k une extension de Picard-Vessiot associée à l'opérateur différentiel D de degré n, de corps de constantes C algébriquement clos,* $\mathrm{car}(C) = 0$. *Le sous-groupe* $\mathrm{Gal}(K/k)$ *de $GL_n(C)$ est algébrique. Les correspondances définies ci-dessus sont des bijections naturelles réciproques entre l'ensemble des extensions différentielles intermédiaires L, $k \subset L \subset K$, et l'ensemble des sous-groupes algébriques $H \subset$* $\mathrm{Gal}(K/k)$. *L'extension L/k est normale si et seulement si H est normal dans* $\mathrm{Gal}(K/k)$, *auquel cas* $\mathrm{Gal}(L/k) = \mathrm{Gal}(K/k)/H$. *Pour tout sous-groupe H de* $\mathrm{Gal}(K/k)$, *on a* $\mathrm{Gal}(K/K_H) = \overline{H}$ *(clôture de H pour la topologie de Zariski).*

1.2 Extensions liouvilliennes et groupes résolubles

Rappelons tout d'abord quelques propriétés bien connues des groupes algébriques. Si G est un tel groupe, la composante connexe G° de l'identité est un sous-groupe normal d'indice fini. Les groupes dérivés $D^0(G) = G$, $D^{i+1}(G) = [D^i(G), D^i(G)]$ sont algébriques, ce qui permet de définir les groupes algébriques résolubles exactement comme le sont les groupes résolubles abstraits : $D^i(G)$ est trivial pour i assez grand. On a alors le théorème de Lie-Kolchin : tout groupe C-algébrique connexe résoluble G est triangularisable, i.e. si $G \subset GL_n(C)$, il existe $\sigma \in GL_n(C)$ tel que $\sigma G \sigma^{-1} \subset T_n(C)$, le groupe algébrique des matrices triangulaires supérieures inversibles.
Le groupe algébrique $SL_n(C) = \{\sigma \in GL_n(C) | d\acute{e}t(\sigma) = 1\}$, $n > 1$, n'est pas résoluble (en fait, il est algébriquement simple : il ne possède pas de sous-groupe normal connexe propre). Avec la stabilité sous décomposition multiplicative de Jordan des groupes algébriques, ces résultats suffisent pour classifier les sous-groupes algébriques de $SL_2(\mathbb{C})$. On note $D_n(C)$ le groupe algébrique des matrices diagonales inversibles d'ordre n, de déterminant égal à 1, S_n (resp. A_n) le groupe symétrique (resp. alterné) de degré n, et on pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Proposition 1 [4, 6] *Soit G un sous-groupe algébrique de $SL_2(\mathbb{C})$, on a l'une des possibilités exclusives suivantes :*

1. *G est triangularisable (dans $SL_2(\mathbb{C})$),*
2. *G est conjugué à un sous-groupe de $D_2(\mathbb{C}) \cup J.D_2(\mathbb{C})$ et le cas 1 est exclu,*
3. *G est fini et 1, 2 sont exclus,*
4. *$G = SL_2(\mathbb{C})$.*

Cette proposition fournit l'ossature de l'algorithme de Kovačić. Le cas 3 est complété par la détermination des sous-groupes finis de $SL_2(\mathbb{C})$, qui remonte pour l'essentiel à Fuchs, Jordan et Klein. La preuve donnée par Kovačić dans [6] est concise et élégante. On note D^+ le groupe $D_2(\mathbb{C}) \cup J.D_2(\mathbb{C})$, et $A(c) = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix}$.

Proposition 2 *Un sous-groupe fini de $SL_2(\mathbb{C})$, non conjugué à un sous-groupe de D^+, est conjugué à l'un des groupes G suivants, où H désigne le sous-groupe de G formé des matrices scalaires :*

1. *Cas tétraédrique, $G/H \simeq A_4$, G est engendré par les matrices $A(\xi)$ et $\phi \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, ξ racine primitive sixième de l'unité, $3\phi = 2\xi - 1$.*
2. *Cas octaédrique, $G/H \simeq S_4$, G est engendré par les matrices $A(\xi)$ et $\phi \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, ξ racine primitive huitième de l'unité, $2\phi = \xi(\xi^2 - 1)$.*
3. *Cas icosaédrique, $G/H \simeq A_5$, G est engendré par les matrices $A(\xi)$, $\begin{pmatrix} \phi & \psi \\ \psi & -\phi \end{pmatrix}$, ξ racine primitive dixième de l'unité, $5\phi = 3\xi^3 - \xi^2 + 4\xi - 2$, $5\psi = \xi^3 + 3\xi^2 - 2\xi + 1$.*

Soit K/k une extension différentielle. Un élément $x \in K$ est dit primitif sur k si $\partial(x) \in k$, il est dit exponentiel sur k si $x^{-1}\partial(x) \in k$. Une extension K/k est liouvillienne lorsque $K = k\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, avec x_{i+1} algébrique, primitif ou exponentiel sur $k\langle x_1, \ldots, x_i \rangle$, $i = 1, \ldots, n-1$.

Proposition 3 [5] *Soit K/k une extension de Picard-Vessiot,* $\mathrm{car}(k) = 0$, *et C algébriquement clos. Le corps K est liouvillien sur k si et seulement si la composante connexe de l'identité de* $\mathrm{Gal}(K/k)$ *est résoluble.*

Considérons une EDOLH à coefficients dans $\mathbb{C}(x)$:

$$y'' + ay' + by = 0. \tag{E}$$

Si η est une solution non nulle, la méthode de variation des constantes en fournit une seconde $\zeta = \eta \int (e^{-\int a}/\eta^2)$, $\mathbb{C}$-linéairement indépendante de la première. Si η est liouvillienne sur $\mathbb{C}(x)$, ζ l'est aussi, et toutes les solutions sont liouvilliennes (sur $\mathbb{C}(x)$). Enfin, le changement de variable $z = e^{\frac{1}{2}\int a} y$ transforme (E) en (E') $z'' + (b - \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}a')z = 0$, et respecte la propriété d'être liouvillien sur $\mathbb{C}(x)$. Nous supposerons donc dorénavant que l'EDOLH du second degré considérée est de la forme :

$$y'' = ry, \quad r \in \mathbb{C}(x), r \neq 0, \tag{D}$$

et que η, ξ forment une base des solutions de (D) (dans une extension différentielle de $\mathbb{C}(x)$, unique à isomorphisme différentiel près). Soit alors $K = \mathbb{C}(x)\langle \eta, \xi \rangle$ l'extension de Picard-Vessiot de $\mathbb{C}(x)$ associée à (D). Soit $W = \begin{vmatrix} \eta & \xi \\ \eta' & \xi' \end{vmatrix} \in K$ le wronskien de η et ξ. Un calcul montre que $W' = 0$ et que $\sigma(W) = (d\acute{e}t(\rho(\sigma)))W$, où $\rho : \mathrm{Gal}(K/\mathbb{C}(x)) \to GL_2(\mathbb{C})$ est la représentation associée à la base (η, ξ) de solutions de (D). Ces deux égalités entraînent l'inclusion $\rho(\mathrm{Gal}(K/\mathbb{C}(x))) \subset SL_2(\mathbb{C})$ et la classification des sous-groupes fournit les différents cas suivants pour (D) :

Théorème 3 [6] *Soit G le groupe de Galois de l'extension K associée à (D) :*

1. *si G est triangularisable, l'équation (D) admet une solution de la forme $e^{\int \omega}$, $\omega \in \mathbb{C}(x)$;*
2. *si G est conjugué à un sous-groupe de D^+ et n'est pas triangularisable, l'équation (D) admet une solution de la forme $e^{\int \omega}$, où ω est algébrique de degré 2 sur $\mathbb{C}(x)$;*
3. *si G est fini et n'est ni triangularisable ni conjugué à un sous-groupe de D^+, l'équation (D) possède toutes ses solutions algébriques sur $\mathbb{C}(x)$;*
4. *sinon $G = SL_2(\mathbb{C})$ et aucune solution de (D) n'est liouvillienne.*

Les références pour les groupes algébriques sont [1, 9, 3], pour l'algèbre différentielle [4, 5]. Voir aussi les deux volumes [10, 8], orientés calcul formel, et [7] pour la théorie de Galois différentielle.

2 L'algorithme de Kovačić

Afin de résoudre l'équation (D), l'algorithme de Kovačić examine successivement les cas 1-3 ci-dessus. Dans chaque cas, la solution est recherchée sous la forme $\eta = e^{\int \omega}$, le comportement des pôles de la fraction rationnelle r fournissant une partie du développement fractionnaire de la dérivée logarithmique ω de η, le comportement de ω en ses autres pôles étant déterminé par un polynôme satisfaisant une équation différentielle déduite de (D), et de degré défini par l'ordre des pôles de r. L'observation que (D) possède toutes ses solutions liouvilliennes si et seulement si elle en possède une, jointe à la non-résolubilité de $SL_2(\mathbb{C})$, établit la complétude de l'algorithme. Celui-ci reposant sur l'analyse des pôles de cette fonction, la proposition suivante serre au plus près leur comportement dans chacun des cas. Si $r = P/Q$, $P, Q \in \mathbb{C}[x]$, l'ordre de r à l'infini est par définition $deg(Q) - deg(P)$.

Proposition 4 *Soit $G = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{C}(x))$ le groupe de Galois de l'équation (D) :*

1. *si G est triangularisable, chaque pôle de r est soit d'ordre 1 soit d'ordre pair. L'ordre de r à l'infini est soit pair, soit plus grand que 2;*
2. *si G est conjugué à un sous-groupe non triangularisable de D^+, la fraction rationnelle r possède au moins un pôle qui est soit d'ordre 2, soit d'ordre impair supérieur à 2.*
3. *si G est fini et 1, 2 sont exclus, alors l'ordre d'un pôle de r est inférieur ou égal à 2, et son ordre à l'infini est au moins égal à 2.*

Le cas 1 est établi par examen du comportement des séries de Laurent de r et de la solution cherchée η en chaque pôle de r, ainsi qu'à l'infini. Le cas 2 examine l'équation différentielle déduite de (D) satisfaite par la dérivée logarithmique de l'invariant $(\eta\xi)^2$ du groupe de Galois. Enfin le cas 3 examine le comportement des séries de Puiseux des solutions de (D) en tout point de $\mathbb{C}$.
Nous détaillons à présent le cas 1 de l'algorithme : il est représentatif des deux autres cas, qui diffèrent toutefois de façon essentielle par leurs preuves de correction. Chaque cas repose sur les conditions nécessaires introduites ci-dessus. Soit Γ l'ensemble des pôles de r.

- Si $c \in \Gamma$ est d'ordre 1, on pose $\theta_c = 0$, $\alpha_c^+ = \alpha_c^- = 1$.
- Si $c \in \Gamma$ est d'ordre 2, on pose $\theta_c = 0$. Soit a le coefficient de $1/(x-c)^2$ dans la série de Laurent de r en c, on pose $\alpha_c^\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1+4a})$.

- Si $c \in \Gamma$ est d'ordre $2n$, $n \geq 2$, θ_c est la somme des termes de la forme $b_i/(x-c)^i$, $i = 2, \ldots, n$, dans la série de Laurent de $\sqrt{r}$ en c. Soit a le coefficient de $1/(x-c)^{n+1}$ dans la série de Laurent de r en c, diminué du coefficient de $1/(x-c)^{n+1}$ dans θ_c^2, et soit b celui de $1/(x-c)^n$ dans θ_c. On pose $\alpha_c^{\pm} = \frac{1}{2}(\pm\frac{a}{b} + n)$.
- Si l'ordre de r à l'infini est 2, alors $\theta_\infty = 0$. Soit a le coefficient de $1/x^2$ dans la série de Laurent de r a l'infini, on pose $\alpha_\infty^{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1+4a})$.
- Si l'ordre de r à l'infini est $-2n \leq 0$, θ_∞ est la somme des termes $b_i x^i$, $i = 0, \ldots, n$, dans la série de Laurent de $\sqrt{r}$ à l'infini. Soit a le coefficient de x^{n-1} dans la série de Laurent de r à l'infini, diminué de celui de x^{n-1} dans θ_∞^2, et b celui de x^n dans θ_∞. On pose $\alpha_\infty^{\pm} = \frac{1}{2}(\pm\frac{a}{b}+n)$.
- Une suite $s = (\epsilon_c)_{c\in\Gamma\cup\{\infty\}}$ telle que $d = \alpha_\infty^{\epsilon_\infty} - \sum_\Gamma \alpha_c^{\epsilon_c} \in \mathbb{N}$ définit une fraction rationnelle :
$$\theta = \sum_\Gamma (\epsilon_c\theta_c + \frac{\alpha_c^{\epsilon_c}}{x-c}) + \epsilon_\infty\theta_\infty.$$
- Pour chaque fraction θ ainsi obtenue, on recherche un polynôme unitaire P de degré d tel que $P'' + 2\theta P' + (\theta' + \theta^2 - r)P = 0$.

Si θ et P ainsi définis existent, $\eta = Pe^{\int\theta} = e^{\int(\frac{P'}{P}+\theta)}$ est solution de (D), sinon le groupe de Galois de (D) n'est pas triangularisable. La preuve de correction de cette étape repose sur l'équation de Riccati associée à (D) : $(R)\quad \omega' + \omega^2 = r$. Si $\eta = e^{\int\omega}$, la fonction ω est solution de (R) si et seulement si η est solution de (D). Comme pour la recherche des conditions nécessaires, il suffit d'examiner les séries de Laurent de ω et de r.
Le cas 2 repose sur l'invariant $(\eta\zeta)^2 \in \mathbb{C}(x)$, et sur l'équation différentielle satisfaite par sa dérivée logarithmique en conséquence de (D). Enfin, le cas 3 repose sur l'existence des invariants suivants du groupe de Galois de (D) (Fuchs, Klein) :

- Cas tétraédrique, $T = \eta^4 + 8\eta\zeta^3$, $T^3 \in \mathbb{C}(x)$, on pose $n = 4$.
- Cas octaédrique, $O = \eta^5\zeta - \eta\zeta^5$, $O^2 \in \mathbb{C}(x)$, on pose $n = 6$.
- Cas icosaédrique, $I = \eta^{11}\zeta - 11\eta^6\zeta^6 - \eta\zeta^{11}$, $I \in \mathbb{C}(x)$, on pose $n = 12$.

Ceci s'établit en factorisant ces polynômes dans $\mathbb{Q}(\xi)$, ξ racine de l'unité adéquate, et en utilisant la représentation de ces groupes définie plus haut. Si η est algébrique, sa dérivée logarithmique ω l'est aussi. Le degré de cette dernière est minoré par n, par considérations des sous-groupes cycliques de A_4, S_4 et A_5. De plus, si ω est suppose fixé par les sous-groupes cycliques engendrés par $A(\xi)$, ce qui est possible par conjugaison, ω est exactement de degré n. La fin de la preuve consiste à trouver une équation différentielle satisfaite par le polynôme minimal de ω.
Pour cela, on introduit le système différentiel sur $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ suivant, où $z \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$, $r \in \mathbb{C}(x)$ étant le coefficient rationnel de (D) :

$$(E_n)\quad \left\{\begin{array}{rcl} a_n & = & -1, \\ a_{i-1} & = & -a_i' - za_i - (n-i)(i+1)a_{i+1}r, \quad i = n, \ldots, 0,\ z \in \mathcal{M}(\mathbb{C}), \end{array}\right.$$

et le polynôme associé $P_n = \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{(n-i)!}w^i \in \mathcal{M}(\mathbb{C})[w]$. Par une solution de (E_n), on entend une fonction méromorphe $z \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ telle que $a_{-1} = 0$. Si z est solution de (E_n), alors toute racine $\theta \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ de P_n donne une solution $e^{\int \theta}$ de (D). Si de plus $z \in \mathbb{C}(x)$, alors $a_i \in \mathbb{C}(x)$, $i = n, \ldots, 1$, et θ est algébrique sur $\mathbb{C}(x)$. On prouve réciproquement que si θ algébrique de degré n est dérivée logarithmique d'une solution de (D), alors son polynôme minimal est de la forme P_n, et le coefficient de x^{n-1} dans P_n fournit une solution rationnelle de (E_n). Mais alors, compte tenu des bornes sur les degrés des dérivées logarithmiques des solutions de (D), lorsque (E_4) (resp. (E_6)) possède une solution rationnelle, le polynôme P_4 (resp. P_6) est irréductible sur $\mathbb{C}(x)$. Ceci est également vrai de (E_{12}) et P_{12}, lorsque (E_4) et (E_6) n'ont pas de solutions rationnelles. En fait, le système (E_n) exprime la nullité des coefficients du polynôme $B \in \mathbb{C}(x)[w]$, $B = \frac{1}{X^n u}(X^n u A(Y, X))'$, lorsque $w = X/Y$, $u = e^{\int a_{n-1}}$, $A(w)$ polynôme minimal de $\theta = \frac{\nu'}{\nu}$, ν solution algébrique de (D), et $A(X, Y)$ est l'homogénéisé de $A \in \mathbb{C}(x)[w]$. En effet, A et B s'annulent tous deux en θ, ce qui implique $B = 0$, A étant minimal. La dernière observation est que toute forme homogène F de degré n en les solutions de (D), algébriques ou non, a sa dérivée logarithmique solution de (E_n). C'est là un exercice classique sur les fonctions symétriques : on se ramène par linéarité à $F = \prod_{i=1}^{n} \eta_i$, puis, pour $1 \leq m \leq n$, on définit :

$$\begin{aligned} \sigma_{m,k} &= 0 \quad \text{si } k < 0 \text{ ou } k > m, \qquad \sigma_{m,1} = 1, \\ \sigma_{m,k} &= \textstyle\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m} \omega_{i_1} \cdots \omega_{i_k}, \quad \omega_j = \frac{\eta_j'}{\eta_j}. \end{aligned}$$

L'identité $\sigma_{m,k} = \sigma_{m-1,k} + \sigma_{m-1,k-1}\omega_m$ donne les dérivées de ces fonctions symétriques :

$$\sigma_{m,k}' = (m + 1 - k) r \sigma_{m,k-1} - \sigma_{m,1}\sigma_{m,k} + (k+1)\sigma_{m,k+1},$$

qui permettent d'établir par induction que :

$$a_i = (-1)^{n-i+1}(n-i)!\sigma_{n,n-1}, \quad a_i \text{ coefficient de } (E_n).$$

D'où $a_{n-1} = \frac{F'}{F}$ et $a_{-1} = 0$. Il suffit alors de prendre pour F les invariants rationnels T^3, O^2 et I. Comme pour les cas 1 et 2, la comparaison des séries de Laurent de r et F'/F, via (E_n), F l'un des semi-invariants T, O ou I, permet de calculer la partie fractionnaire de ω relative aux pôles de r, la partie fractionnaire manquante étant déduite de (E_n), via une équation différentielle linéaire dont on recherche une solution polynomiale, de degré donné par les premiers coefficients des séries de Laurent de r en ses pôles et à l'infini.

Références

[1] A. Borel. *Linear Algebraic Groups*, volume 126 of *Graduate Text in Mathematics*. Springer-Verlag, 1991.

[2] A. Duval and M. Loday-Richaud. Kovačić's algorithm and application to some special functions. *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, 3(3), 1992. To appear.

[3] J. E. Humphreys. *Linear Algebraic Groups*, volume 21 of *Graduate Text in Mathematics*. Springer-Verlag, 1981.

[4] I. Kaplansky. *An Introduction to Differential Algebra*. Hermann, 1957.

[5] E. R. Kolchin. *Differential Algebra and Algebraic Groups*, volume 54 of *Pure and Applied Math.* Academic Press, New York, 1973.

[6] J. J. Kovačić. An Algorithm for Solving Second Order Linear Homogeneous Differential Equations. *Journal of Symbolic Computation*, 2:3–43, 1986.

[7] A. H. M. Levelt. Differential Galois theory and tensor products. *Indagationes Mathematicae*, 1(4):439–450, 1990.

[8] M. F. Singer, editor. *Differential Equations and Computer Algebra*, Computational Mathematics and Applications. Academic Press, 1991.

[9] T. A. Springer. *Linear Algebraic Groups*, volume 9 of *Progress in Math.* Birkhäuser, 1981.

[10] E. Tournier, editor. *Computer Algebra and Differential Equations*, Computational Mathematics and Applications. Academic Press, 1989.