18

Minorations de $\|(3/2)^k\|$

Laurent Habsieger
Université de Bordeaux I

[résumé par Luc Albert]

L'exposé consiste en une minoration de la distance de $(3/2)^k$ à l'entier le plus proche, notée $\|(3/2)^k\|$. L'origine de cette question est le problème de Waring c'est-à-dire trouver $g(k)$ minimal tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists n_1, \ldots, n_{g(k)} \in \mathbb{N}, n = n_1^k + \cdots + n_{g(k)}^k.$$

En effet il a été prouvé que le $g(k)$ minimal est donné par la formule

$$g(k) = 2^k + \left[(3/2)^k\right] - 2$$

dès que

$$\left\{(3/2)^k\right\} \leq 1 - (3/4)^k \tag{1}$$

($[x]$ et $\{x\}$ dénotent respectivement la partie entière et la partie fractionnaire du réel x). Le problème revient donc à minorer $\|(3/2)^k\|$.
Historiquement, mis à part la minoration triviale $\|(3/2)^k\| \geq 1/2^k$ pour $k \geq 1$, on a attendu 1981 et Beukers pour montrer que $\|(3/2)^k\| \geq 1/2^{0.9k}$ pour $k \geq 5000$. Depuis, Dubitskas (1991) a obtenu $\|(3/2)^k\| \geq 0.5769^k \simeq 2^{-0.7936k}$ pour $k \geq k_0$ avec k_0 non explicite. Les résultats présentés ici sont les suivants.

Théorème 1 *Pour k assez grand (mais effectif) on a :*

$$\|(3/2)^k\| \geq 2^{-0.8471k}$$

et pour $k \geq 5$, on a $\|(3/2)^k\| > 2^{-0.852k}$.

Ces deux résultats, s'ils sont certes un progrès, restent encore éloignés du but idéal à atteindre qui serait d'obtenir l'inégalité (1) pour $k \geq 5$.
Les idées de preuve sont les suivantes: $3/2 = 1 + 1/2$, ou mieux $3/2 = 2 - 1/2$ et surtout $(3/2)^2 = 2 + 1/4$ (dans cette dernière expression, élevée à une puissance entière, de nombreuses simplifications vont en effet se produire).
La preuve du résultat utilise des approximants de Padé de $(1-t)^a$ en faisant varier le degré. Ceci met en jeu la fonction hypergéométrique de Gauss

$$F(\alpha, \beta, \gamma; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{n! (\gamma)_n} t^n$$

(solution d'une équation différentielle du second ordre), la fonction $\Theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$ (p premier) et le résultat $\Theta(x) \sim x$ au voisinage de l'infini. Les paramètres α et β seront choisis afin d'optimiser le résultat.

La preuve du résultat comporte deux étapes avant l'obtention du théorème annoncé : une étude arithmétique et une étude asymptotique.
On commence par exprimer l'approximation de Padé pour la fonction $H(a,b,t)$ définie par

$$t^b H(a,b,t) = (1-t)^{a+b} - \sum_{n=0}^{b-1} \binom{a+b}{n} (-t)^n$$

avec $(a,b) \in \mathbb{N}^2$. L'approximation permet d'introduire les polynômes $Q_{p,q}, E_{p,q}, P_{p,q}$ tels que

$$P_{p,q}(a,b,t) - H(a,b,t)Q_{p,q}(a,b,t) = (-1)^{p+b} t^{p+q+1} E_{p,q}(a,b,t)$$

expression qui donne lieu à l'étude arithmétique. En plus de cette expression "binomiale" pour Q et E, on a aussi l'expression intégrale de $Q_{p,q}(a,b,t)$ et $E_{p,q}(a,b,t)$ qui permet une étude asymptotique.
On considère le nombre premier π tel que

$$\begin{aligned} \max(\frac{p+m+1}{2}, 2m-p, q+1) &\leq \pi \leq \quad m + \frac{q}{3} \\ \text{ou } \max(p+m+1, 2m-p, q+1) &\leq \pi \leq \quad \frac{3m+q}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi on obtient que les polynômes $Q_{p,q}(2m,m,t)$, $P_{p,q}(2m,m,t)$ et $E_{p,q}(2m,m,t)$ appartiennent à l'idéal de $\mathbb{Z}[t]$ engendré par le produit Π_m de ces tels π.
L'étude asymptotique nécessite des considérations de divisibilité, la connaissance du comportement de $\log \Pi_m$ et de majorations de $|Q_{p,q}(2m,m,-1/8)|$ et $|E_{p,q}(2m,m,-1/8)|$ obtenues à l'aide de leur expression intégrale.
La première partie du théorème est ainsi obtenue. Il est à noter que le choix optimal des paramètres α et β est obtenu par essais en MAPLE.
La deuxième partie du théorème est obtenue pour des choix particuliers des paramètres α et β qui permettent d'expliciter la borne du théorème précédent et d'affiner celle-ci en faisant une étude exhaustive pour les "quelques" cas restant (quand même de l'ordre de la centaine de mille).
Cette étude nous permet d'entrevoir le dur chemin à parcourir avant de clore le débat sur le problème de Waring.

Références

[1] A. Baker and J. Coates. Fractional parts of powers of rationals. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 15:375–383, 1964.

[2] F. Beukers. Fractional parts of powers of rationals. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 90:13–20, 1981.

[3] F. Delmer and J.-M. Deshouillers. On the computation of $g(k)$ in Waring's problem. *Math. Comp.*, 54(190):885–893, 1990.

[4] A. Erdélyi. *Higher Trancendental Functions*, volume 1-2-3. R. E. Krieger publishing Company, Inc., Malabar, Florida, 2nd edition, 1981.

[5] J. Kubina and M. Wunderlich. Extending Waring's conjecture up to 471,600,000. *Math. Comp.*, 55(192):815–820, 1990.

[6] K. Mahler. On the fractional parts of powers of real numbers. *Mathematika*, 4:122–124, 1957.

[7] H. Rademacher. *Topics in Analytic Number Theory*. Springer-Verlag, 1973.

[8] J. B. Rosser and L. Schoenfeld. Approximate formulas for some functions of prime numbers. *Illinois Journal of Mathematics*, 6:64–94, 1962.

[9] J. B. Rosser and L. Schoenfeld. Sharper Bounds for the Chebyshev Functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$. *Math. Comp.*, 29(129):243–269, 1975.

[10] L. Schoenfeld. Sharper Bounds for the Chebyshev Functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$ II. *Math. Comp.*, 30(134):337–360, 1976.