16

Transformée de Mellin et asymptotique : le tri-fusion

Mordecai Golin
INRIA, Rocquencourt

[résumé par Philippe Dumas]

Le tri-fusion est l'archétype des algorithmes du type "diviser pour régner" et sa complexité, mesurée en nombre de comparaisons, est depuis longtemps étudiée [4, 5]. Si $T(n)$ et $U(n)$ désignent respectivement la complexité dans le cas le pire et dans le cas moyen, l'utilisation des récurrences

$$\begin{aligned} T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + n - 1, \\ U(n) &= U(\lfloor n/2 \rfloor) + U(\lceil n/2 \rceil) + n - \gamma_n, \end{aligned}$$

avec les conditions initiales $T(1) = U(1) = 0$, et $\gamma_n = \dfrac{\lfloor n/2 \rfloor}{\lceil n/2 \rceil + 1} + \dfrac{\lceil n/2 \rceil}{\lfloor n/2 \rfloor + 1}$, permet de montrer que

$$T(n) = n \lg n + nA(\lg n) + 1,$$

où $A(u)$ est la fonction 1-périodique $1 - \{u\} - 2^{1-\{u\}}$, et

$$U(n) = n \lg n + \beta n + O(1),$$

si $n = 2^k$, avec $\beta = -\sum_{j \geq 0} \dfrac{1}{2^j + 1} = -1{,}26449$.

La première formule est satisfaisante, mais il n'en est pas de même de la seconde qui ne concerne que les puissances de 2. De plus on se contente souvent de prouver que $U(n)$ est en $O(n \lg n)$ [1]. Le but de cet exposé est de montrer comment obtenir un développement asymptotique plus précis de $U(n)$, par des méthodes de théorie des nombres, qui sont applicables à beaucoup de récurrences de la forme "diviser pour régner".

Formule de Perron. L'outil de base est la formule de Perron [6, p. 151], dans une version adaptée au problème. Elle concerne la série de Dirichlet associée à une suite (w_n),

$$W(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{n^s}.$$

Lemme 1 *Si la série de Dirichlet $W(s)$ converge absolument pour $\Re(s) > 2$, alors*

$$\frac{n}{2i\pi} \int_{3-i\infty}^{3+i\infty} W(s) n^s \frac{ds}{s(s+1)} = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) w_k.$$

Cette formule permet d'étudier des fonctions arithmétiques liées à l'écriture des entiers dans une base donnée suivant les méthodes exposées ici [2]. En l'appliquant à la suite $w_n = \Delta\nabla f_n$, où Δ et ∇ sont respectivement les opérateurs de différence avant et arrière, on obtient le lemme de base qui va permettre d'étudier la complexité du tri-fusion.

Lemme 2 *Si la suite (f_n) vérifie la récurrence*

$$f_n = f_{\lfloor n/2 \rfloor} + f_{\lceil n/2 \rceil} + e_n,$$

pour $n \geq 2$, avec f_1 donné et $e_n = O(n)$, alors f_n admet l'expression intégrale

$$f_n = nf_1 + \frac{n}{2i\pi} \int_{3-i\infty}^{3+i\infty} \frac{\Xi(s)n^s}{1-2^{-s}} \frac{ds}{s(s+1)},$$

où

$$\Xi(s) = \Delta\nabla f_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Delta\nabla e_n}{n^s}.$$

Cas le pire. Ce résultat permet de revenir sur la complexité dans le cas le pire. On a alors $f_n = T(n)$ et

$$\frac{f_n}{n} = \frac{1}{2i\pi} \int_{3-i\infty}^{3+i\infty} \frac{n^s}{1-2^{-s}} \frac{ds}{s(s+1)}.$$

L'intégrande est une fonction méromorphe dans le plan complexe dont les pôles sont 0, -1 et les $\chi_k = 2ik\pi/\ln 2$ $(k \neq 0)$. Le premier est double alors que les autres sont simples. En poussant la droite d'intégration vers la gauche la collecte des résidus donne l'énoncé suivant. Dans ce cas particulier f_n/n est exactement égal à la somme de tous les résidus.

Théorème 1 *La complexité du tri-fusion dans le cas le pire, $T(n)$, satisfait*

$$T(n) = n \lg n + nA(\lg n) + 1$$

où $A(u)$ est une fonction 1-périodique de valeur moyenne

$$a_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\log 2} \simeq -0,94269\,50408$$

et $A(u)$ a un développement de Fourier explicite,

$$A(u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{2ik\pi u},$$

où pour $k \neq 0$

$$a_k = \frac{1}{\log 2} \frac{1}{\chi_k(\chi_k + 1)}, \quad \chi_k = \frac{2ik\pi}{\log 2}.$$

Cas moyen. Le cas moyen se traite de la même façon et donne un résultat non élémentaire, contrairement au précédent.

Théorème 2 *Le coût moyen du tri-fusion, $U(n)$, est donné par*

$$U(n) = n \lg n + nB(\lg n) + O\left(n^{\epsilon}\right),$$

pour tout $\epsilon > 0$. La fonction $B(u)$ est continue non dérivable et 1-périodique. De plus

1. *la valeur moyenne de $B(u)$ est*

$$b_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log 2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{(m+1)(m+2)} \log\left(\frac{2m+1}{2m}\right) \simeq -1{,}24815;$$

2. *les coefficients de Fourier de $B(u)$ sont pour $k \neq 0$*

$$b_k = \frac{1}{\log 2} \frac{1 + \Psi(\chi_k)}{\chi_k(\chi_k + 1)}$$

avec $\chi_k = \dfrac{2ik\pi}{\log 2}$ *et* $\Psi(s) = \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{(m+1)(m+2)} \left[\frac{-1}{(2m)^s} + \frac{1}{(2m+1)^s}\right]$ *;*

3. *la série de Fourier est uniformément convergente vers $B(u)$;*

4. *les valeurs extrêmes de $B(u)$ sont $\beta \simeq -1{,}26449$ et $-1{,}24075 \pm 10^{-5}$.*

Ici on ne peut pousser la droite d'intégration que jusqu'à l'abscisse $-1+\epsilon$, d'où la présence du terme $O(n^{\epsilon})$.
Les deux fonctions périodiques $A(u)$ et $B(u)$ sont reliées d'une jolie façon. En effet, en posant $A^*(u) = A(u) - a_0$ et $B^*(u) = B(u) - b_0$, on a

$$B^*(u) = A^*(u) + \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m A^*(u - \lg m),$$

où les ψ_m sont les coefficients de la série de Dirichlet $\Psi(s)$, $-\psi_{2m} = \psi_{2m+1} = \dfrac{2}{(m+1)(m+2)}$. La fonction $A^*(u)$ possède un point de rebroussement en $u = 0$, qui se reproduit dans $B^*(u)$ par la présence de $A^*(u)$ mais aussi des pseudo-harmoniques $A^*(u - \lg 2)$, $A^*(u - \lg 3)$, *etc*, ce qui donne à la partie périodique de $U(n)$ son aspect fractal que l'on peut constater sur la figure 1.

Conclusion. La formule de Perron permet d'étudier le comportement asymptotique des suites récurrentes du type "diviser pour régner". Cependant la série de Dirichlet n'est pas toujours explicite et le niveau de sommation à employer, de façon à assurer la convergence des intégrales, dépend de la suite.

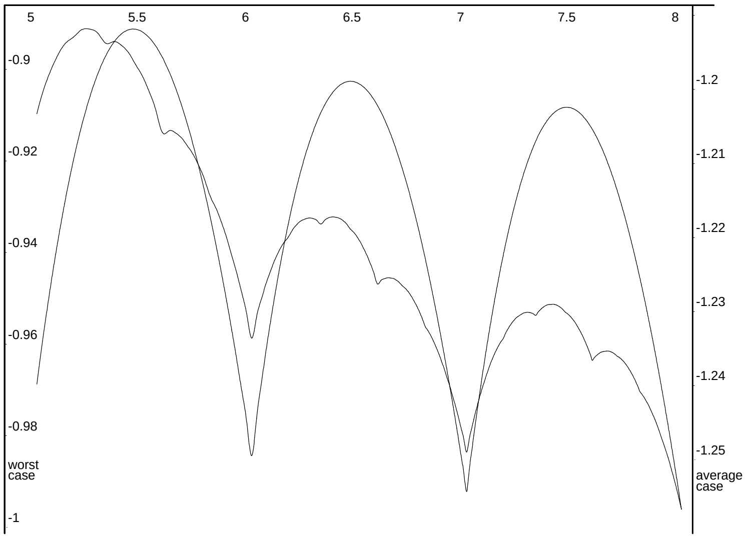

Figure 1 : Les complexités du tri-fusion dans le cas le pire et dans le cas moyen cachent des fonctions périodiques en $\lg n$, qui apparaissent quand on considère les suites $f_n/n - \lg n$ en fonction de $\lg n$. Le tracé le plus lisse correspond au cas le pire. Pour le cas moyen on a une courbe de nature fractale que l'on peut obtenir en superposant des copies réduites de la précédente décalées de $\lg 2$, $\lg 3$, *etc.*

Références

[1] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, and R. L. Rivest. *Introduction to Algorithms.* McGraw-Hill, New York, 1990.

[2] P. Flajolet, P. Grabner, P. Kirschenhofer, H. Prodinger, and R. Tichy. Mellin transforms and asymptotics: digital sums. Technical Report 1498, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, 1991. To appear in *Theoretical Computer Science*, December 1993.

[3] Ph. Flajolet and M. Golin. Mellin transforms and asymptotics: The mergesort recurrence. Research Report 1612, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, January 1992.

[4] D. E. Knuth. *The Art of Computer Programming*, volume 3 : Sorting and Searching. Addison-Wesley, 1973.

[5] R. Sedgewick. *Algorithms.* Addison-Wesley, Reading, Mass., second edition, 1988.

[6] G. Tenenbaum. *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres.* Institut Élie Cartan, Nancy, 1992.