8

Introduction aux fonctions holonomes en une variable

Philippe Flajolet
INRIA, Rocquencourt

[résumé par Michèle Soria]

Les fonctions holonomes ou solutions d'équations différentielles linéaires à coefficients rationnels jouent un rôle dans l'analyse d'algorithmes liés aux structures ordonnées, en analyse combinatoire, dans la théorie des fonctions spéciales, et en analyse asymptotique. Cet exposé a pour objet les propriétés algébriques de base de ces fonctions, selon Stanley, Lipshitz et Zeilberger.

1 Introduction

La classe des fonctions et suites holonomes a été étudiée systématiquement depuis les années 80 par Stanley [11], Lipshitz [9] et Zeilberger [13]. Les riches propriétés du monde holonome en font un domaine central de l'analyse combinatoire et de la théorie des fonctions spéciales : propriétés de clôture, décidabilité de l'égalité et propriétés asymptotiques des suites holonomes. Les fonctions holonomes jouent un rôle important dans l'analyse d'algorithmes de recherche et de tri [2].

Une série $f(z) = \sum f_n z^n \in C[[z]]$ est dite *holonome* ("*D-finite*" dans [11]) si et seulement si elle satisfait une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels ($\in \mathbb{C}(z)$) :

$$C_0(z)D^r f(z) + C_1(z)D^{r-1}f(z) + \ldots + C_r(z)f(z) = 0,$$

où $D = \frac{d}{dz}$. On peut en fait supposer que tous les C_i sont des polynômes, ou que $C_0(z) = 1$.
A cette définition sur les séries correspond, modulo les conditions initiales, une définition équivalente sur les suites. Une suite (f_n) est dite *holonome* si et seulement si elle satisfait une récurrence linéaire à coefficients polynomiaux :

$$d_0(n)f_{n+s} + d_1(n)f_{n+s-1} + \ldots + d_s(n)f_n = 0.$$

Exemple 1. Les graphes 2-réguliers (tous sommets d'arité 2) vérifient la récurrence

$$g_n = (n-1)\, g_{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\, g_{n-3},$$

avec les conditions initiales $g_0 = 1, g_1 = g_2 = 0$. Cette récurrence se traduit sur la série génératrice $g(z) = \sum g_n \frac{z^n}{n!}$ par l'équation différentielle $g'(z)(1-z) - \frac{1}{2}z^2 g(z) = 0$. Plus généralement, il a été montré par I. Gessel [5] que la série génératrice des graphes k-réguliers est une fonction holonome.

Exemple 2. La longueur moyenne de cheminement dans les arbres-quad vérifie la récurrence

$$p_n = e_n + 4\sum_{k=0}^{n-1} \pi_{n,k}\, p_k,$$

avec $e_n = n$ et $\pi_{n,k} = \frac{1}{n}(H_n - H_k)$, où les H_n sont les nombres harmoniques.
Ce type de récurrence est caractéristique des schémas de type *diviser pour régner* probabilistes, et apparaît dans l'analyse de Quicksort et des arbres de recherche multidimensionnels [3].

EXEMPLE 3. La suite u_n utilisée par Apéry dans la démonstration de l'irrationnalité de $\zeta(3)$

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2,$$

est une suite holonome, et c'est en général le cas pour les sommes de produits de binomiaux.

2 Propriétés de clôture

La définition d'holonomie peut se traduire en termes d'espace vectoriel de dimension finie. Une série $f(z)$ est holonome si et seulement si l'ensemble infini $\{f, Df, D^2f, \ldots\}$ de ses dérivées engendre un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}(z)$. Et la suite (f_n) est holonome si et seulement si l'espace vectoriel des suites engendré sur $\mathbb{C}(n)$ par $\{f, Ef, E^2f, \ldots\}$ est fini ($Ef_n = f_{n+1}$).
Chacune des propriétés de clôture de la classe des fonctions (suites) holonomes est fondée sur la finitude d'un certain espace vectoriel, fermé par dérivation. Soit V un espace vectoriel, $(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r)$ un système de générateurs, et $\mathbf{w}_0, \ldots, \mathbf{w}_r$ un système de $r+1$ vecteurs donnés par leurs coordonnées dans la base : $\mathbf{w}_j = \sum_{k=1}^{r} x_{j,k}\mathbf{b}_k$. La dépendance des $\mathbf{w}_i$ se traduit par l'équation

$$\begin{vmatrix} \mathbf{w}_0 & x_{0,1} & \ldots & x_{0,r} \\ \mathbf{w}_1 & x_{1,1} & \ldots & x_{1,r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{w}_r & x_{r,1} & \ldots & x_{r,r} \end{vmatrix} = 0.$$

Ce déterminant est une forme linéaire en les vecteurs $\mathbf{w}_0, \ldots, \mathbf{w}_r$. Et dans des espaces vectoriels engendrés par des fonctions et leurs dérivées, cette dépendance se traduit par une équation différentielle.

Théorème de clôture [1, 8, 9, 11, 13]
(i) Toute fonction algébrique est holonome,
(ii) La classe des fonctions holonomes est fermée par les opérations de somme, produit de Cauchy et produit d'Hadamard,
(iii) Si f est holonome et g est algébrique, alors $f \circ g$ est holonome,
(iv) La classe des fonctions holonomes est fermée par dérivation, intégration, transformée de Laplace directe et inverse.

Les fonctions $\exp(x)$, $\log(1+x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\arcsin(x)$, $\arctan(x)$ sont holonomes ; mais ni $\tan(x)$, ni $1/\cos(x)$ ne sont holonomes : les fonctions holonomes ne sont fermées ni par composition ni par inverse.

EXEMPLE 4. Fonctions algébriques : lorsque y satisfait une équation algébrique de degré d, y et toutes ses dérivées appartiennent à l'espace vectoriel engendré sur $\mathbb{C}(z)$ par $(1, y, \ldots, y^{d-1})$, et y vérifie une équation différentielle homogène d'ordre au plus d. Par exemple la série génératrice des nombres de Motzkin vérifie l'équation algébrique $R(z, y(z)) = 0$, avec $R(z, y) = y - z(1 + y + y^2)$. En dérivant, on exprime y' comme une fonction rationnelle en z et y : $y = N(y, z)/D(y, z)$. Pour réduire le dénominateur, on applique l'algorithme de Bezout-Euclide aux polynômes R et D, ce qui donne deux polynômes en y à coefficients dans $\mathbb{C}(z)$, U et V, tels que $UD - VR = 1$. D'où $y' \equiv N.U \bmod R$. Pour les nombres de Motzkin, on obtient ainsi $y' = \big(-2z - (z-1)y\big)/\big(3z^3 + 2z^2 - z\big)$, et donc y vérifie une équation différentielle homogène d'ordre 2.

Exemple 5. Sommes et produits. Les séries $f(z) = \exp(z)$ et $g(z) = \log(1+z)$ sont holonomes :$f' - f = 0$ et $(1+z)g'' + g' = 0$. L'espace vectoriel des dérivées de la somme $h = f + g$ est engendré par la base $\{f, g, g'\}$. Le calcul de h, h', h'', h''' dans cette base, et l'équation de déterminant qui résulte de la dépendance linéaire de h, h', h'' et h''', donnent l'équation différentielle $(2+z)(1+z)h'''(z) - (-1+2z+z^2)h''(z) - (3+z)h'(z) = 0$. Pour la fonction produit $k = fg$, on utilise la base $\{fg, fg'\}$, et le calcul de k, k', k'' dans cette base donne $(1+z)k''(z) - (1+2z)k'(z) + zk(z) = 0$.

Différences finies et sommes combinatoires. La clôture par substitution algébrique entraîne l'holonomie d'une grande classe de suites et de fonctions : si

$$g_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k f_k \iff g(z) = \frac{1}{1-z}\, f(-\frac{z}{1-z}),$$

alors f_n est holonome lorsque g_n est holonome. Par exemple la somme $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{1+k^2}$ est holonome d'ordre 3, car la suite $1/(1+k^2)$ est holonome d'ordre 3 (les substitutions rationnelles préservent l'ordre).

Fonctions hypergéométriques. La série hypergéométrique

$$F[a,b;c;z] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{-a}{n}\binom{-b}{n}}{\binom{-c}{n}} (-1)^n \frac{z^n}{n!}$$

vérifie l'équation différentielle $z(1-z)F''(z) + (c - (a+b+1)z)F'(z) - abF(z) = 0$.
De nombreuses identités entre coefficients binomiaux sont des traductions d'identités entre fonctions hypergéométriques. Par exemple la deuxième identité d'Euler

$$F[a,b;c;z] = (1-z)^{-a}\ F[a, c-b; c; -\frac{z}{1-z}]$$

se traduit par

$$(-1)^n \frac{\binom{-a}{n}\binom{-b}{n}}{\binom{-c}{n}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{-a}{k}\binom{b-c}{k}\binom{n+a-1}{k+a-1}}{\binom{-c}{k}}.$$

Les identités sur les fonctions sont décidables d'après les propriétés de clôture. Les identités correspondantes sur les coefficients sont donc finiment décidables [13].

3 Propriétés asymptotiques

L'asymptotique des fonctions holonomes en une variable est un problème pour l'essentiel décidable, modulo les problèmes de périodicité. Les solutions d'équations différentielles à coefficients analytiques ont des singularités qui proviennent uniquement des coefficients de l'équation. Ces singularités sont classées en deux types : régulières et irrégulières. Dans le premier cas, les solutions ont un développement local singulier de la forme

$$(z-\rho)^{\alpha}\ \log^k(z-\rho).$$

Et dans le second cas le développement est du type

$$\exp\left(Q(\frac{1}{(z-\rho)^{p/q}})\right)\ (z-\rho)^{\alpha}\ \log^k(z-\rho),$$

où Q est un polynôme.
Les méthodes d'analyse complexe, analyse de singularité [4] dans le premier cas et méthode de col [10] dans le second cas, permettent de traduire ces développements locaux en une information sur l'asymptotique des coefficients des fonctions solutions. D'où le résultat

Théorème [12] *Toute suite holonome (f_n) est asymptotiquement équivalente à une somme de termes de la forme*

$$\lambda(n!)^{r/s}e^{Q(n^{1/m})}\omega^n n^{\alpha}(\log n)^k,$$

où r, s, m, k sont des entiers, Q est un polynôme, et λ, ω, α sont des nombres complexes.

Exemple 6. La série génératrice du coût moyen d'une recherche partiellement spécifiée dans les arbres-quad [3] vérifie l'équation différentielle $(1-z)^2\ (zQ(z))'' - 4Q(z) = 2/(1-z)$. La fonction $Q(z)$ a une singularité régulière en $\rho = 1$, et un développement local équivalent à $(1-z)^{-\alpha}$, avec $\alpha = (\sqrt{17}-1)/2$. On en déduit par analyse de singularité que le coût moyen d'une recherche vaut asymptotiquement $Kn^{\alpha-1}$.

Exemple 7. Le nombre moyen de sous-suites croissantes dans les permutations [7] a une série génératrice exponentielle qui vérifie l'équation $(1-z)^2S'(z) + (z-2)S(z) = 0$. La fonction $S(z) = \frac{1}{1-z}e^{\frac{z}{1-z}}$ a une singularité irrégulière en $\rho = 1$, et l'on obtient par méthode de col que le nombre moyen de sous-suites croissantes dans une permutation de $[1\ldots n]$ est équivalent à $\frac{1}{2\sqrt{e\pi}}n^{-1/4}e^{2\sqrt{n}}$.

4 Extensions

La notion d'holonomie s'étend aux fonctions à plusieurs variables : une fonction $f(z_1,\ldots,z_r)$ dans $C[[z_1,z_2,\ldots,z_r]]$ est dite *holonome* si l'ensemble de ses dérivées partielles

$$\frac{\partial^{j_1}}{\partial z^{j_1}}\frac{\partial^{j_2}}{\partial z^{j_2}}\cdots\frac{\partial^{j_r}}{\partial z^{j_r}}f(z_1,z_2,\ldots,z_r)$$

engendre un espace vectoriel de dimension finie sur le corps $\mathbb{C}(z_1,z_2,\ldots,z_r)$ des fractions rationnelles. De nombreuses propriétés de clôture sont conservées (voir le résumé de l'exposé de K. Compton page 47 et suivantes).

La théorie des fonctions holonomes permet de décider (et de découvrir) des identités sur les fonctions spéciales. Par exemple l'identité de Ramanujan

$$\frac{1}{4!}\ (\arcsin x)^4\ \equiv\ \sum_{k=2}^{\infty}\frac{4^{k-1}}{\binom{2k}{k}}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{(k-1)^2}\right)\frac{x^{2k}}{(2k)^2}.$$

Les membres gauche et droit sont des fonctions appartenant à un espace vectoriel de dimension finie (ici 24), et il suffit de vérifier l'identité pour un nombre fini de conditions initiales.
Une telle vérification peut être faite de façon automatique : des algorithmes ont été donnés par Zeilberger [13] et Gosper [6] dans le cas des sommes hypergéométriques.

Du point de vue de l'asymptotique, la théorie des fonctions holonomes fournit une équation d-ifférentielle de série génératrice sous une forme normalisée. L'analyse asymptotique se développe alors à partir d'une analyse de singularité (cas d'une singularité régulière) ou d'une analyse de col (cas d'une singularité irrégulière).

Références

[1] L. Comtet. Calcul pratique des coefficients de Taylor d'une fonction algébrique. *Enseignement Math.*, 10:267–270, 1964.

[2] Ph. Flajolet. Analytic analysis of algorithms. In W. Kuich, editor, *Automata, Languages and Programming*, number 623 in Lecture Notes in Computer Science, pages 186–210, 1992. Proceedings of the 19th International Colloquium, Vienna, July 1992.

[3] Ph. Flajolet, G. Gonnet, C. Puech, and J. M. Robson. The analysis of multidimensional searching in quad–trees. In *Proceedings of the Second Annual ACM–SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pages 100–109, Philadelphia, 1991. SIAM Press.

[4] Ph. Flajolet and A. M. Odlyzko. Singularity analysis of generating functions. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 3(2):216–240, 1990.

[5] I. M. Gessel. Symmetric functions and P–recursiveness. *Journal of Combinatorial Theory,* Series A, 53:257–285, 1990.

[6] R. W. Gosper. Decision procedure for indefinite hypergeometric summation. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*, 75(1):40–42, January 1978.

[7] V. Lifschitz and B. Pittel. The number of increasing subsequences of the random permutation. *Journal of Combinatorial Theory,* Series A, 31:1–20, 1981.

[8] L. Lipshitz. The diagonal of a D-finite power series is D-finite. *J. Algebra*, 113:373–378, 1988.

[9] L. Lipshitz. D-finite power series. *J. Algebra*, 122:353–373, 1989.

[10] L. Sirovich. *Techniques of Asymptotic Analysis.* Springer Verlag, 1971.

[11] R. P. Stanley. Differentiably finite power series. *European Journal of Combinatorics*, 1:175–188, 1980.

[12] J. Wimp and D. Zeilberger. Resurrecting the asymptotics of linear recurrences. *J. Math. Anal. Appl.*, 111:162–176, 1985.

[13] D. Zeilberger. A holonomic approach to special functions identities. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 32:321–368, 1990.