17

Asymptotique de récurrences et dénombrement de partitions

Philippe Dumas
INRIA, Rocquencourt

[résumé par François Lassner]

1 Position du problème général

Sous ce titre se cache une étude fine de relations de récurrence issues de méthodes "diviser pour régner" d'une part dont le prototype est $u_n = u_{n-1} + u_{\lfloor n/2 \rfloor}$ mais aussi de travaux déjà anciens de K. Mahler en théorie des nombres; il s'agissait d'étudier les fonctions analytiques $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ telles qu'il existe des polynômes $c_k(z)$, $0 \leq k \leq N$, N étant fixé, vérifiant

$$\sum_{k=0}^{N} c_k(z) f(z^{2^k}) = b(z). \tag{1}$$

Une identification donne $c_{00}a_n + c_{01}a_{n-1} + c_{02}a_{n-2} + \cdots + c_{10}a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + c_{11}a_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} + \cdots + \cdots = b_n$. Ce sont d'ailleurs les termes $c_{10}a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + c_{11}a_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} + \cdots$ qui rappellent la méthode "diviser pour régner". La question est l'évaluation asymptotique des a_n.

2 Un problème plus particulier et une classification

Philippe Dumas suggère de particulariser (1) en imposant d'abord $b(z) = c_2(z) = c_3(z) = \cdots = c_N(z) = 0$, $c_1(z) = -1$, $c_0(z) = \varphi(z)$ et que l'ensemble $Z(\varphi)$ des racines de φ se place simplement par rapport au disque unité. La relation (1) se réduit alors à

$$\varphi(z) f(z) = f(z^2)$$

dont une solution formelle est $f(z) = \prod_{k \geq 0} \frac{1}{\varphi(z^{2^k})}$. Quelques exemples suggèrent une classification.

Cas 1 : les racines de φ sont dans le disque unité. Si $\varphi(z) = 1 - 2z$ i.e. $Z(\varphi) = \{1/2\}$ alors $Z(\varphi(z^2)) = \{\pm 1/\sqrt{2}\}$ et les racines > 0 de $\varphi(z^{2^n})$ forment une suite de réels tendant vers 1 et < 1. Un calcul banal donne alors $a_n = 2^n + O(2^{n/2})$.

Cas 2 : les racines de φ sont de module 1.

- 1^er cas particulier : $\varphi(z) = z + 1$ alors $f(z) = \prod_{k \geq 0} \frac{1}{1+z^{2^k}} = 1 - z$ car, d'après une remarque ancienne d'Euler, $\frac{1}{1-z} = \prod_{k \geq 0}(1 + z^{2^k})$ pour $|z| < 1$. Dans ce cas $a_n = 0$ pour $n \geq 2$.

- $2^{\text{ème}}$ cas particulier : les racines de φ situées sur le cercle unité sont d'ordre pair au sens de la théorie des groupes, par exemple $\varphi(z) = 1 + z^2$ alors $f(z) = \prod_{k\geq 0} \frac{1}{1+z^{2^k}}$; dans ce cas on sait montrer qu'il existe un réel c avec $a_n = O(n^c)$.
- $3^{\text{ème}}$ cas particulier : $\varphi(z) = 1 + z + z^2 = (z - j)(z - j^2)$ alors $f(z) = \prod_{k\geq 0} \frac{1}{1+z^{2^k}+z^{2.2^k}}$. La réunion $\bigcup_{k\geq 0} Z(\varphi(z^{2^k}))$ forme un sous-ensemble dense du cercle unité et $|z| = 1$ est une frontière naturelle de $f(z)$. L'étude des a_n est exposée plus loin et la méthode s'applique plus généralement à $\varphi(z) = \Phi_a(z)$ avec a impair.

Cas 3 : les racines de φ sont à l'extérieur du cercle unité, par exemple $\varphi(z) = 1 - z/2$ alors $Z(\varphi) = \{2\}$ et $\bigcup Z(\varphi(z^{2^k})) = \cup_{k\geq 0}\{2^{1/2^k}\}$. On obtient un ensemble de points qui s'accumulent sur le cercle unité par l'extérieur. Ph. Dumas conjecture que a_n est plus petit dans ce cas que dans celui qui est présenté ci-dessous.
On voit bien que le comportement de $f(z)$ et des a_n est intimement lié à la géométrie des zéros de φ i.e. à $Z(\varphi)$.

3 Étude détaillée de $f(z) = \prod_{k\geq 0} \frac{1}{1+z^{2^k}+z^{2.2^k}} = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$

On découvre aisément la nécessité de distinguer trois cas $n \equiv 0, 1, 2 \pmod 3$. L'étude devient beaucoup plus technique et utilise une variante de la méthode du col fondée sur la représentation $a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz$ où C désigne un chemin fermé bien choisi, i.e. un cercle de rayon convenable $R = e^{-\rho}$. Ph. Dumas suggère plaisamment d'appeler la collecte approximative qu'il utilise la "méthode du faux-col". Un autre outil utilisé est la classique transformée de Mellin $M[\varphi(s)] = \int_0^\infty \varphi(t)t^{s-1}dt$ et en particulier $M[e^{-s}] = \Gamma(s)$. Citons aussi les séries de Dirichlet, la fonction de Möbius, les polynômes cyclotomiques. Par un mélange habile et complexe de ces outils, Ph. Dumas met en évidence un cercle de rayon ρ tel que $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ donne

$$a_n \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{\ln^2\rho}{2\ln 2} + (1+K)\ln\rho + n\rho + \frac{1}{2}\ln\rho\right]\omega_0(\frac{\ln\rho}{2\ln 2})$$

et le bon choix de ρ est donné par $\frac{\ln\rho}{\ln 2} + n\rho + K = 0$ ce qui donne sans mal $\rho = -\frac{\ln n}{n\ln 2} + \frac{\ln\ln n}{n\ln 2} + O(1/n)$ (ω_0 désigne une fonction 1-périodique).
Cette étude, très technique, suggère que ce sous-problème de (1) a déjà des solutions très variées et laisse peu d'espoir d'obtention de résultats globaux simples pour (1).
A la fin de l'exposé, Ph. Dumas montre l'existence de questions combinatoires connexes et des motivations informatiques liées, citant entre autres des travaux de De Bruijn; puis il signale des essais qu'il a menés sous Maple pour étudier empiriquement a_n.
Note de F. Lassner : Il me paraît utile de signaler une étude, assez complémentaire des travaux de Ph. Dumas, due à Erdős et assez ancienne (1941) portant sur $a_n = 1 + \sum_k a_{\lfloor n/\alpha_k\rfloor}$ et établissant que $a_n = \Theta(n^\rho)$ où ρ vérifie $\sum_k \frac{1}{\alpha_k^\rho} = 1$; étude poursuivie en 1943 par l'étude de $P_r(n)$ nombre de partitions de n en puissances de r (obtenu aussi par Mahler en 1940) et plus près de nous la belle réponse au problème 1185 du journal Math. Mag. 58 (1984); la question étant l'étude de la suite $a_0 = 0$, $a_n = a_{\lfloor n/2\rfloor} + a_{\lfloor n/3\rfloor} + a_{\lfloor n/6\rfloor}$ et la réponse, due à Erdős, Hildebrand, Odlyzko, Pudaite, Reznick est $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \frac{12}{\ln 432}$. La méthode est une série de transformations menant de manière

non banale à une équation de renouvellement c'est-à-dire à des méthodes taubériennes [théorèmes de Wiener et Ikehara].

Références

[1] P. Erdős. On some asymptotic formulas in the theory of the "Factorisatio Numerorum". *Annals of Mathematics*, 42(4), October 1941.

[2] P. Erdős. Elementary proof of some asymptotic formulas in the theory of partitions. *Annals of Mathematics*, 43, 1942.

[3] P. Erdős. Corrections to two of my papers. *Annals of Mathematics*, 44(40), October 1943.

[4] P. Erdős and A. Odlyzko *et al.* Answer to problem 1185. *Math. Magazine*, 1985 and 1990.

[5] K. Mahler. On a special functional equation. *Journal of the London Mathematical Society*, 15, 1940.

[6] Rawsthorne. Problem 1185. *Math. Magazine*, page 42, 1984.