9

Fonctions holonomes à plusieurs variables

Kevin Compton
University of Michigan and INRIA, Rocquencourt

[résumé par Philippe Robert]

RÉSUMÉ. Cet exposé est la suite de celui sur les fonctions holonomes à une variable (page 41). Une série à plusieurs variables est dite holonome (ou D-finie) lorsque ses dérivées partielles engendrent un espace vectoriel de dimension finie sur le corps des fonctions rationnelles complexes. La plupart des fonctions spéciales rencontrées en analyse d'algorithmes sont holonomes. Les travaux de L. Lipshitz et D. Zeilberger sur les propriétés de clôture des fonctions holonomes sont exposés, ainsi qu'un algorithme dû à Zeilberger pour décider d'identités entre séries. Cet algorithme est basé sur une forme normale des fonctions holonomes.

1 Les suites et les fonctions holonomes à une variable

Dans le cas d'une variable (cf. l'exposé de Ph. Flajolet sur les fonctions holonomes), la correspondance suite-fonction holonome est résumée par le tableau suivant :

	Suites	**Fonctions**
Représentation	$f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$	$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n z^n$
Opérations	$E(f) = (f_{n+1})_n$	$Z(f)(z) = \sum f_n z^{n+1}$
	$N(f) = (nf_n)_n$	$D(f)(z) = \sum nf_n z^n$
Propriétés	P-récursivité	D-finitude
	$P(E,N)(f) = 0$	$Q(Z,D)(f) = 0$

P, Q polynômes sur $\mathbb{C}$

De façon équivalente, une fonction $f(z)$ est D-finie si et seulement si le sous espace vectoriel sur le corps des fractions rationnelles $\mathbb{C}(Z)$ engendré par les $D^n(f), n \in \mathbb{N}$ est de dimension finie. Cette propriété-définition donne la clé de la plupart des propriétés de clôture de l'ensemble des fonctions holonomes à une variable. Dans le cas des fonctions à plusieurs variables, elle permet en outre une extension naturelle de la définition de D-finitude.

2 Séries génératrices holonomes à plusieurs variables

Définition 1 *Une fonction $f(z_1, \ldots, z_n)$ est holonome (ou D-finie) si le sous espace vectoriel sur $\mathbb{C}(Z)$ engendré par les $D^\alpha(f)$, $\alpha \in \mathbb{N}^k$ est de dimension finie, avec*

$$D^\alpha(f) = D_1^{\alpha_1} \ldots D_k^{\alpha_k} f(z_1, \ldots, z_k), \qquad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), D_i = \frac{\partial}{\partial z_i}.$$

Si $f = (f_\alpha)_\alpha$ est une suite de $\mathbb{C}^k$ et $f(z) = \sum_\alpha f_\alpha z^\alpha$ sa fonction génératrice (avec $z^\alpha = \prod z_i^{\alpha_i}$), alors f est D-finie si et seulement si f vérifie un système d'équations différentielles non triviales,

$$P_i(Z_1, \ldots, Z_k, D_i)(f) = 0, i = 1, \ldots, k.$$

les P_i étant des polynômes et Z_i l'opérateur défini par $Z_i(f)(z) = z_i f(z)$.
La plupart des propriétés de clôture valables en dimension 1 s'étendent de la même manière au cas à plusieurs variables :

Proposition 1

(i) *Les fonctions algébriques sont D-finies.*

(ii) *Si f, g sont D-finies, il en va de même pour $f+g$ et fg.*

(iii) *Si*

$$f(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^j,\ \beta,\gamma\in\mathbb{N}^k} f_{\alpha\beta\gamma} z^{\alpha\beta\gamma}$$

est D-finie (avec $\alpha\beta\gamma$ la concaténation de α, β, γ), alors

$$g(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^j,\ \beta\in\mathbb{N}^k} f_{\alpha\beta\beta} z^{\alpha\beta\beta}$$

l'est aussi (g est appelée une diagonale de f).

(iv) *Si $f(z_1, \ldots, z_k)$ est D-finie et les fonctions $g_1, \ldots, g_k$ algébriques alors $f(g_1, \ldots, g_k)$ est D-finie.*

L'assertion *(iii)* du théorème précédent entraîne en particulier la propriété de clôture par produit de Hadamard des fonctions holonomes :

$$\left(\sum_n f_n z_1^n\right)\left(\sum_n g_n z_2^n\right) = \sum_{mn} f_m g_n z_1^m z_2^n = F(z_1, z_2),$$

il suffit de remarquer que le produit de Hadamard de f et g, $\sum_n f_n g_n z^n$ est une diagonale de F. Lipshitz (1988) a montré de cette façon que le produit de Hadamard est D-fini quand chacune des deux fonctions l'est, sa procédure algorithmique pour déterminer le polynôme annulateur est toutefois assez lourde. Une autre solution consiste à suivre la procédure de Stanley pour le cas à une dimension : utiliser la partie discrète (avec les opérateurs E et N) de la définition d'holonomie pour montrer la clôture par produit d'Hadamard.

3 Suites holonomes à plusieurs variables

Définition 2 *Une m-section d'une suite $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^k}$ est une sous-suite de f, $(f_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ avec $\Delta = \{\alpha \in \mathbb{N}^k / \alpha_{i_1} = n_1, \ldots, \alpha_{i_p} = n_p\}$ et $i_1, \ldots, i_p \leq m$.*

Définition 3 *Une suite $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^k}$ est dite holonome (ou P-récursive) si il existe un entier m et un système d'équations polynomiales non triviales,*

$$P_i(N_i, E_1, \ldots, E_k)(f) = 0, \quad i = 1, \ldots, k$$

vérifiant

(i) le degré en E_j de P_i est $\leq m$.

(ii) Toutes les m-sections de f sont P-récursives.

La correspondance entre suites et fonctions est assurée par la proposition suivante due à Lipshitz,

Proposition 2 *La suite $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^k}$ est P-récursive si et seulement si $\sum f_\alpha z^\alpha$ est D-finie.*

References

[1] L. Lipshitz. The diagonal of a D-finite power series is D-finite. *J. Algebra*, 113:373–378, 1988.

[2] L. Lipshitz. D-finite power series. *J. Algebra*, 122:353–373, 1989.

[3] R. P. Stanley. Differentiably finite power series. *European Journal of Combinatorics*, 1:175–188, 1980.

[4] D. Zeilberger. A holonomic approach to special functions identities. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 32:321–368, 1990.