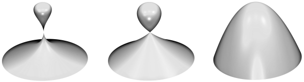


Résolution algorithmique des singularités

d'après E. Bierstone & P. Milman

Pierre Lairez

Séminaire Algo, le 30 janvier 2012

Inria Rocquencourt

Historique bref, incomplet et partial

Précurseurs

XVII^e s.	Isaac Newton
1939–1944	Oscar Zariski

Résolution forte

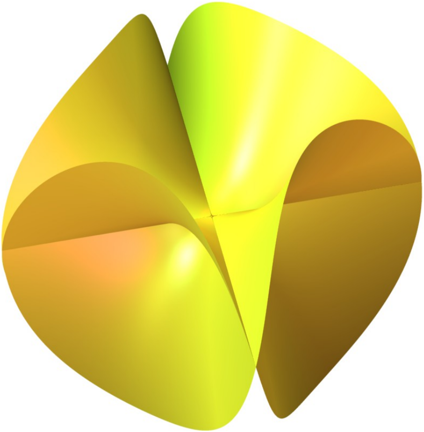
1964	Heisuke Hironaka
1997	**Edward Bierstone & Pierre Milman**

Définition

X une variété algébrique sur $\mathbb{C}$
Par exemple, $X = \{f = 0\}$ pour un $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$
$x \in X$

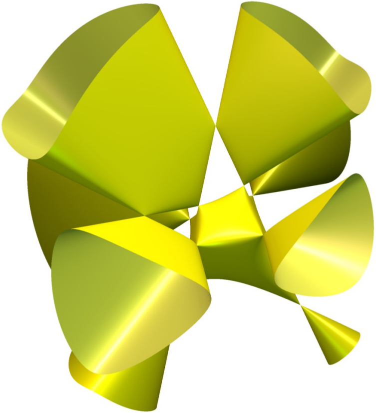
Lissité en x	X isomorphe à un ouvert de $\mathbb{C}^n$ au voisinage de x
Critères	$\nabla_x f \neq 0$ $\operatorname{ord}_x f = 1$

Exemple



$$x^2 - y^2 z^2 = 0$$

Exemple



$$25(x^3(y+z)+y^3(x+z)+z^3(x+y))+50(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)$$
$$-125(x^2yz+y^2xz+z^2xy)+60xyz-4(xy+xz+yz)=0$$

Tore Nordstrand

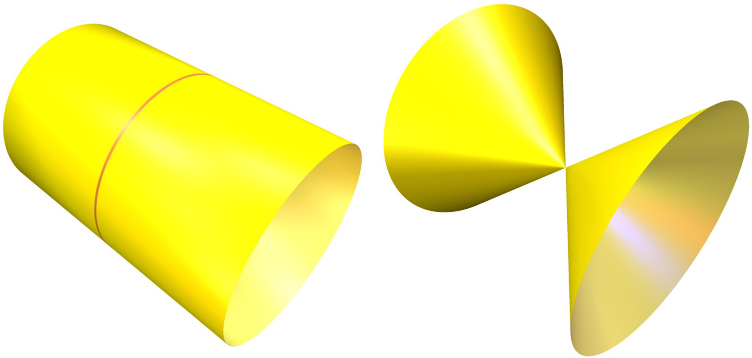
Résolution des singularités

Résoudre c'est paramétriser

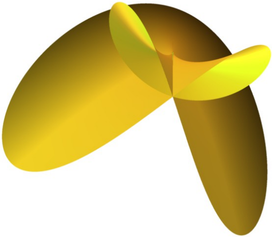
X une variété algébrique

Résolution de X	Paramétrisation de X par une variété lisse *i.e.* un morphisme $X' \to X$ birationnel et propre, avec X' lisse
Résolution locale	Pour $x \in X$, résolution d'un voisinage de x

Exemple



Exemple



Motivations

La première question qui se présente dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables est l'étude de ses singularités.

Émile Picard, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, 1897

This brings us up against one of the outstanding problems of Algebraic Geometry — whether it is always possible to resolve the singularities of an algebraic variety. As yet there is no answer to this question except in the lower dimensions, but recent work on the subject strongly suggests that a complete answer is likely in the near future. We shall therefore assume that the resolution problem has been solved.

W. Hodge & M. Atiyah,
« Integrals of the second kind on an algebraic variety », 1955

Éclatements

X une variété algébrique
C une sous-variété $\{f_0 = \cdots = f_d = 0\}$

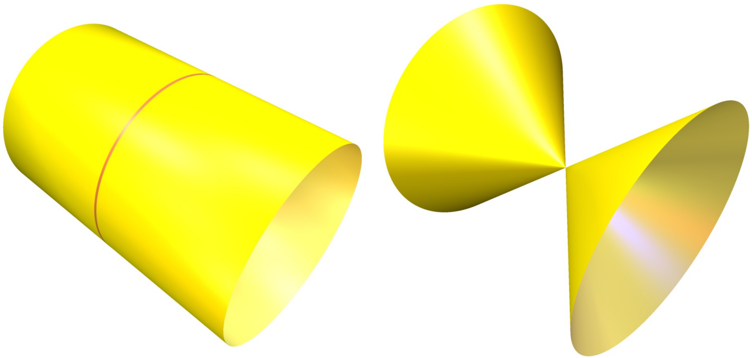
Éclatement de X en C

$$\widetilde{X} = \overline{\left\{(x, [f_0(x) : \cdots : f_d(x)]) \in (X \setminus C) \times \mathbb{P}^d\right\}} \subset X \times \mathbb{P}^d$$

Globalise le comportement infinitésimal

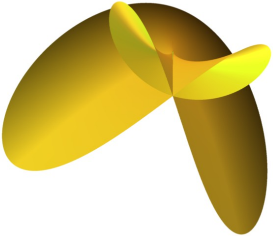
Résout les indéterminations des fractions du type f_i/f_j
Remplace C par une hypersurface

Exemple



$$X : x^2 + y^2 = z^2 \qquad C : x = y = z = 0$$

Exemple



$$X : z^3 = x^2yz + x^4 \qquad C : x = z = 0$$

Calcul en coordoonées d'un éclatement à centre lisse

X une hypersurface $\{f = 0\}$, contenant $C = \{x_1 = \cdots = x_d = 0\}$
$\widetilde{X}$, l'éclatement de X en C

Recouvrement de $\widetilde{X}$, ou *cartes* de l'éclaté

Fixons $p \in \{1, \ldots, d\}$

$$x_i' = \begin{cases} x_i x_p & \text{si } i > d \text{ ou } i = p \\ x_i & \text{sinon} \end{cases}$$

$$f_p = x_p^{-*} f(x_1', \ldots, x_n') \in \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$$

Les variétés $\{f_p = 0\}$ sont isomorphes à des ouverts recouvrant $\widetilde{X}$.

Exemple

$f = x^2 + y^2 - z^2$, $C = 0$

$$\begin{aligned} f_z &= z^{-2}((xz)^2 + (yz)^2 - z^2) \\ &= x^2 + y^2 - 1 \end{aligned}$$

Uniformisation locale

Jeu

X une variété

Alice choisit un point a de X.
Bob éclate une sous-variété lisse en a.
Alice choisit un point a' au-dessus de a.
Bob éclate une sous-variété lisse en a'.
&c.

Alice perd si elle ne peut choisir un point singulier.

Théorème (Zariski 1940, Hironaka 1964)

Bob a toujours une stratégie gagnante.

Le recollement

Le recollement de l’unifomisation locale : un problème difficile

Philosophie [B&M]

Si la stratégie pour l’uniformisation locale est fonctorielle, alors le recollement est automatique.

Contact maximal

X une hypersurface $\{f = 0\}$, l'origine est un point d'ordre d de f.

On peut supposer [Weierstrass + Tchirnhausen] que pour des coordonnées $(z, x_1, \ldots, x_n)$ bien choisies

$$f = z^d + a_1(\mathbf{x})z^{d-1} + a_2(\mathbf{x})z^{d-2} + \cdots + a_d(\mathbf{x}).$$

Le lieu d'ordre d de f, noté $\mathrm{V}_d(f)$ est

$$\mathrm{V}_d(f) = \mathrm{V}_1(z) \cap \bigcap_i \mathrm{V}_i(a_i).$$

Contact maximal

Soit $C = \{z = x_1 = \cdots = x_p = 0\}$. Supposons $C \subset V_d(f)$.
Éclatons C. Étudions la carte x_1.
Notons $\mathbf{x}' = (x_1, x_2x_1 \ldots, x_px_1, x_{p+1}, \ldots, x_n)$

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(z, \mathbf{x}) &= x_1^{-d} f(zx_1, \mathbf{x}') \\ &= z^d + \sum_i \underbrace{x_1^{-i} a_i(\mathbf{x}')}_{\widetilde{a}_i(\mathbf{x})} z^{d-i}\end{aligned}$$

Où sont désormais les points d'ordre d ?

$$V_d(\widetilde{f}) = V_1(z) \cap \bigcap_i V_i(\widetilde{a}_i)$$

Proposition

La sous-variété $V(z)$ *contient* $V_d(f)$ *; il en est encore ainsi après éclatement d'un centre contenu dans* $V_d(f)$.

$V(z)$ est un *contact maximal* de X en l'origine.

Idéaux marqués

Definition	$\mathcal{I} = (\mathrm{W}, \mathrm{I}, d)$ Une variété W ; un idéal I sur W ; un entier d
Support	$\mathrm{V}(\mathcal{I}) = \mathrm{V}_d(\mathrm{I})$
Éclatement admissible	Centre lisse inclus dans dans $\mathrm{V}(\mathcal{I})$
Transformation	$\widetilde{\mathrm{W}} \to \mathrm{W}$ un éclatement admissible, $\mathbf{x}'$ les nouvelles coordonnées, x_1 le diviseur exceptionnel

$$\widetilde{\mathcal{I}} = (\widetilde{\mathrm{W}}, \underbrace{x_1^{-d}\mathrm{I}(\mathbf{x}')}_{\left(x_1^{-d}f(\mathbf{x}')\right)_{f\in\mathrm{I}}}, d)$$

Addition	$(\mathrm{W}, \mathrm{I}, d) + (\mathrm{W}, \mathrm{J}, e) = (\mathrm{W}, \mathrm{I}^e + \mathrm{J}^d, ed)$
Multiplication	$(\mathrm{W}, \mathrm{I}, d) \cdot (\mathrm{W}, \mathrm{J}, e) = (\mathrm{W}, \mathrm{I}\cdot\mathrm{J}, e + d)$
Équivalence	Même arbre des éclatements admissibles Exemple : $(\mathrm{W}, \mathrm{I}, d) \sim (\mathrm{W}, \mathrm{I}^e, ed)$
Résolution	$\mathrm{V}(\mathcal{I}_{\mathrm{final}}) = \varnothing$

Retour sur le contact maximal

Rappel de la situation

$$f = z^d + \sum_i a_i(\mathbf{x}) z^{d-i} \qquad \mathrm{V}_d(f) = \mathrm{V}_1(z) \cap \bigcap_i \mathrm{V}_i(a_i)$$

Éclatement de $(z, x_1, \ldots, x_p)$, carte x_1

$$\widetilde{f} = z^d + \sum_i \underbrace{x_1^{-i} a_i(\mathbf{x}')}_{\widetilde{a}_i(\mathbf{x})} z^{d-i} \qquad \mathrm{V}_d(\widetilde{f}) = \mathrm{V}_1(z) \cap \bigcap_i \mathrm{V}_i(\widetilde{a}_i)$$

Théorème

$$(\mathrm{W}, (f), d) \sim \sum_i (\mathrm{V}(z), a_i, i)$$

Contact maximal

Proposition

Si $(\mathrm{W}, \mathrm{I}, d)$ *est un idéal marqué, avec* $\mathrm{ord}_x \mathrm{I} = d$*, alors il existe :*

- U *un voisinage de* x*,*
- Z *une hypersurface lisse de* U *contenant* x*,*
- J *un idéal de* $\mathcal{O}_{\mathrm{Z}}$*,*
- e *un entier,*

tels que $(\mathrm{U}, \mathrm{I} \restriction \mathrm{U}, d) \sim (\mathrm{Z}, \mathrm{J}, e)$.

Corollaire

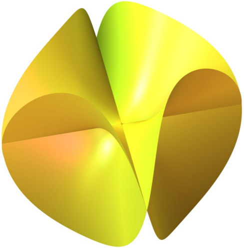
L'uniformisation locale des idéaux marqués en dimension n *implique l'uniformisation locale des idéaux marqués d'ordre maximal en dimension* $n+1$*.*
La résolution fonctorielle des idéaux marqués en dimension n *implique la résolution fonctorielle des idéaux marqués d'ordre maximal en dimension* $n+1$*.*

Proposition

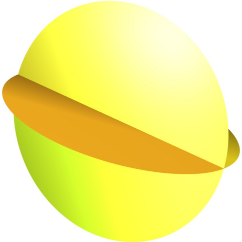
Si $\mathcal{I} \sim (\mathrm{X}, \mathrm{I}, d) \sim (\mathrm{Y}, \mathrm{J}, e)$*, avec* $\dim \mathrm{X} = \dim \mathrm{Y}$*, alors pour tout* $a \in \mathrm{V}(\mathcal{I})$

$$\frac{\mathrm{ord}_a \mathrm{I}}{d} = \frac{\mathrm{ord}_a \mathrm{J}}{e}$$

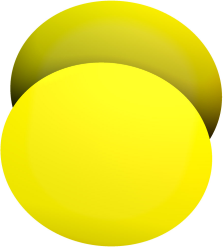
Essayons



$X = \{z^2 - x^2y^2 = 0\}$



$\{z^2 - y^2 = 0\}$



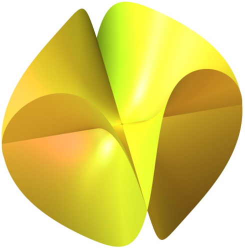
$\{z^2 - 1 = 0\}$

	1er tour		2e tour		
Alice	$(0,0,0)$		carte x, $(0,0,0)$		PERDU
Bob	$(\mathbb{A}^3, (z^2 - x^2y^2), 2)$ $(V(z), (x^2y^2), 2)$ $V(z,x)$	$\rightsquigarrow$ $\rightsquigarrow$	$(\mathbb{A}^3, (z^2 - y^2), 2)$ $(V(z), (y^2), 2)$ $V(z,y)$	 $\rightsquigarrow$	 $(V(z), (1), 2)$ GAGNÉ !

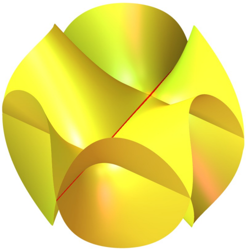
Alice **0** **1** Bob

et la fonctorialité ?

Revanche



$X = \{z^2 - x^2y^2 = 0\}$



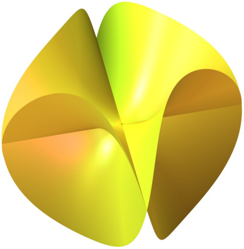
après éclatement de $(0,0,0)$

	1$^{\text{er}}$ tour		2$^{\text{e}}$ tour
Alice	$(0,0,0)$		carte x, $(0,0,0)$
	$(\mathbb{A}^3, (z^2 - x^2y^2), 2)$	$\rightsquigarrow$	$(\mathbb{A}^3, (z^2 - x^2y^2), 2)$
	$(V(z), (x^2y^2), 2)$	$\rightsquigarrow$	$(V(z), (x^2y^2), 2)$
Bob	$V(z, x, y)$		ABANDON

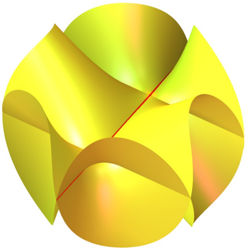
Alice **1** **1** Bob

il faut plus de mémoire

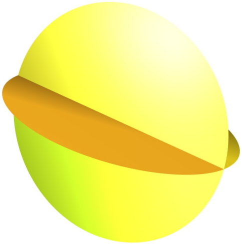
Belle



$X = \{z^2 - x^2y^2 = 0\}$



après éclatement
de $(0, 0, 0)$



$\{z^2 - y^2 = 0\}$

	1^{er} tour		2^{e} tour		
Alice	$(0, 0, 0)$		carte x, $(0, 0, 0)$		Abandon
Bob	$(\mathbb{A}^3, (z^2 - x^2y^2), 2)$ $(V(z), (x^2y^2), 2)$ $V(z, x, y)$	$\rightsquigarrow$ $\rightsquigarrow$	$(\mathbb{A}^3, (z^2 - x^2y^2), 2)$ $(V(z), (x^2) \cdot (y^2), 2)$ $V(z, y)$	 $\rightsquigarrow$	 $(V(z), (x^2), 2)$

Alice **1** **2** Bob

Un *vrai* idéal marqué est un quadruplet (W, I, d, E), où E représente le diviseur exceptionnel.

Théorème (Bierstone & Milman)

La résolution fonctorielle des idéaux marqués d'ordre maximal implique la résolution fonctorielle de tous les idéaux marqués.

Hiérarchie de Grzegorczyk

$\mathcal{F}_r$, les fonctions $\mathbb{N}^r \to \mathbb{N}$

Composition	$f \in \mathcal{F}_r, h \in \mathcal{F}^r \rightsquigarrow f(h_1, \ldots, h_r) \in \mathcal{F}$
Récursion primitive	$g \in \mathcal{F}_r, h \in \mathcal{F}_{r+2} \rightsquigarrow f = \mathrm{rec}(g, h) \in \mathcal{F}_r$: $f(\bar{u}, 0) = g(\bar{u})$ et $f(\bar{u}, n+1) = h(\bar{u}, n, f(\bar{u}, n))$
Clôture	Pour $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, Clôt $\mathcal{G}$ est la plus petite partie de $\mathcal{F}$ stable par composition et récursion primitive bornée : si h, g et q sont dans Clôt $\mathcal{G}$ et si $\mathrm{rec}(g, h) \leqslant q$, alors $\mathrm{rec}(g, h)$ est dans Clôt $\mathcal{G}$.

- $\mathcal{E}_0 = \text{Clôt}\{x \mapsto c, x \mapsto x + c, \bar{x} \mapsto x_k\}$
- $\mathcal{E}_1 = \text{Clôt}\{x \mapsto cx, (x, y) \mapsto x + y\}$
- $\mathcal{E}_2 = \text{Clôt}\{\text{polynômes}\}$
- $\mathcal{E}_{l+1} = \text{Clôt}\{\mathrm{rec}(g, h) \mid g, h \in \mathcal{E}_l\}$

Complexité

Théorème (Bierstone, Grigoriev, Milman & Włodarczyk, 2011)

La complexité de la résolution des hypersurfaces affines de dimension m est majorée par

$$b^{\mathcal{O}(1)}\mathrm{F}(d),$$

avec :

- *b, taille binaire du polynôme*
- *d, son degré*
- F, *une fonction de $\mathcal{E}_{m+3}$*

?

E. Bierstone & P. Milman
Functoriality in resolution of singularities
Publ. Res. Inst. Math. Sci., 2008.