

# INRIA Algorithms Project's Seminar

## Critères pour l'intégralité des coefficients de Taylor des applications miroir

Éric Delaygue

Institut Fourier

7 Novembre 2011

# Plan de l'exposé

- 1 Exemples classiques d'applications miroir
- 2 Définition des applications miroir
- 3 Motivations
- 4 Résultats antérieurs
- 5 Énoncé des critères
- 6 Trame de la preuve de la condition suffisante
- 7 Résultats supplémentaires

# Application miroir d'origine modulaire

La série hypergéométrique

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!^2}{n!^4} z^n = {}_2F_1 \left( \begin{matrix} 1/2, 1/2 \\ 1 \end{matrix} ; 16z \right)$$

est solution de l'équation différentielle

$$D^2 y - 16z \left( D + \frac{1}{2} \right)^2 y = 0, \text{ avec } D := z \frac{d}{dz}.$$

Une deuxième solution linéairement indépendante de  $F(z)$  est  $G(z) + \log(z)F(z)$  avec

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!^2}{n!^4} (4H_{2n} - 4H_n) z^n$$

et où  $H_n := \sum_{i=1}^n 1/i$  est le  $n$ -ième nombre harmonique.

## Application miroir d'origine modulaire

La *coordonnée canonique* associée est

$$q(z) = \exp\left(\frac{G(z) + \log(z)F(z)}{F(z)}\right) = z \exp\left(\frac{G(z)}{F(z)}\right).$$

L'*application miroir*  $z(q)$  correspondante est l'inverse de  $q(z)$  pour la composition des séries formelles et on a

$$z(q) = \frac{\theta_2^4(q)}{16\theta_3^4(q)} = q \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{4n})^8}{(1 - (-q)^n)^8} \in \mathbb{Z}[[q]],$$

où  $\theta_2(q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2}$  et  $\theta_3(q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}$ .

On a alors le développement de Taylor

$$z(q) = q - 8q^2 + 44q^3 - 192q^4 + 718q^5 - 2400q^6 + 7352q^7 - 20992q^8 + 56549q^9 + O(q^{10}).$$

# Exemple étudié par Candelas, de la Ossa, Green et Parkes

La série hypergéométrique

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5n)!}{(n!)^5} z^n = {}_4F_3 \left( \begin{matrix} 1/5, 2/5, 3/5, 4/5 \\ 1, 1, 1 \end{matrix} ; 5^5 z \right)$$

est solution de l'équation différentielle

$$D^4 y - 5z(5D + 1)(5D + 2)(5D + 3)(5D + 4)y = 0.$$

Une deuxième solution linéairement indépendante de  $F(z)$  est  $G(z) + \log(z)F(z)$  avec

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5n)!}{(n!)^5} (5H_{5n} - 5H_n) z^n.$$

## Exemple étudié par Candelas, de la Ossa, Green et Parkes

L'application miroir associée est l'inverse pour la composition des applications de  $q(z) = z \exp(G(z)/F(z))$ .

Lian, Yau (1995)

$$q(z) \in z\mathbb{Z}[[z]] \quad \text{et} \quad z(q) \in q\mathbb{Z}[[q]].$$

On a

$$q(z) = z + 770z^2 + 1014275z^3 + 1703916750z^4 \\ + 3286569025625z^5 + O(z^6)$$

et

$$z(q) = q - 770q^2 + 171525q^3 - 81623000q^4 - 35423171250q^5 \\ - 54572818340154q^6 + O(q^7).$$

## Notations

Soit  $e := (e_1, \dots, e_a)$  et  $f := (f_1, \dots, f_b)$  deux suites d'entiers naturels. On note

$$|e| := \sum_{i=1}^a e_i, \quad |f| := \sum_{j=1}^b f_j \quad \text{et} \quad Q_{e,f}(n) := \frac{(e_1 n)! \cdots (e_a n)!}{(f_1 n)! \cdots (f_b n)!}, \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$F_{e,f}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e_1 n)! \cdots (e_a n)!}{(f_1 n)! \cdots (f_b n)!} z^n \quad (\text{série hypergéométrique}),$$

$$G_{e,f}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e_1 n)! \cdots (e_a n)!}{(f_1 n)! \cdots (f_b n)!} \left( \sum_{i=1}^a e_i H_{e_i n} - \sum_{j=1}^b f_j H_{f_j n} \right) z^n,$$

$$q_{e,f}(z) := z \exp \left( \frac{G_{e,f}(z)}{F_{e,f}(z)} \right) \quad (\text{Coordonnée canonique}).$$

L'application miroir  $z_{e,f}(q)$  est l'inverse de  $q_{e,f}(z)$  pour la composition des séries formelles.

## Indépendance algébrique

Pour  $e = (2, 2)$  et  $f = (1, 1, 1, 1)$ , on a

$$F_{e,f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!^2}{n!^4} z^n \in \mathbb{Z}[[z]].$$

On a

$$z_{e,f}(q) = \frac{\theta_2^4(q)}{16\theta_3^4(q)} = q \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{4n})^8}{(1 - (-q)^n)^8} \in \mathbb{Z}[[q]],$$

où  $\theta_2(q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2}$  et  $\theta_3(q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}$ .

J.M. et P.B. Borwein (1987)

$$\tilde{F}(q) := F_{e,f}(z_{e,f}(q)) = \theta_3(q)^2.$$

# Couplage de Yukawa

- Famille  $\mathcal{M}$  d'hypersurfaces quintiques de  $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$  définies par

$$\sum_{k=1}^5 x_k^5 - 5z \prod_{k=1}^5 x_k = 0 \quad (z \in \mathbb{C}).$$

- Famille miroir  $\mathcal{W}$  de variétés de Calabi-Yau (miroir de  $\mathcal{M}$ ).
- $(D^4 - 5z(5D + 1)(5D + 2)(5D + 3)(5D + 4))y = 0$ , où  $D = z \frac{d}{dz}$ .
- Solution holomorphe en 0 :  $e = (5)$  et  $f = (1, 1, 1, 1, 1)$

$$F_{e,f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5n)!}{(n!)^5} z^n.$$

## Couplage de Yukawa

Une deuxième solution linéairement indépendante de  $F_{e,f}$  est  $G_{e,f}(z) + \log(z)F_{e,f}(z)$ , où

$$G_{e,f}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5n)!}{(n!)^5} (5H_{5n} - 5H_n) z^n.$$

Dans ce cas précis, le *couplage de Yukawa*  $K(q)$  associé est

$$K(q) = \frac{5}{1 - 5^5 z_{e,f}(q)} \cdot \frac{1}{F_{e,f}(z_{e,f}(q))^2} \cdot \left( \frac{qz'_{e,f}(q)}{z_{e,f}(q)} \right)^3 \in \mathbb{Q}[[q]].$$

On écrit

$$K(q) =: \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n =: a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} k_n \frac{q^n}{1 - q^n},$$

avec  $k_n = \sum_{d|n} \mu(n/d) a_d$  où  $\mu$  est la fonction de Möbius.

## Résultats antérieurs

### Lian, Yau (1995)

Soit  $p$  un nombre premier,  $e = (p)$ ,  $f = (1, \dots, 1)$  avec  $|e| = |f|$ . Alors  $q_{e,f}(z) \in z\mathbb{Z}[[z]]$ .

Soit  $N \in \mathbb{N}$  et  $N = p_1^{a_1} \dots p_\ell^{a_\ell}$  sa décomposition en facteurs premiers.

On note

$$A_N := \left\{ N, \frac{N}{p_{j_1} p_{j_2}}, \frac{N}{p_{j_1} p_{j_2} p_{j_3} p_{j_4}}, \dots \right\}_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots \leq \ell}$$

et

$$B_N := \left\{ 1, \dots, 1, \frac{N}{p_{j_1}}, \frac{N}{p_{j_1} p_{j_2} p_{j_3}}, \dots \right\}_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots \leq \ell},$$

avec un nombre de 1 dans  $B_n$  égal à  $\varphi(N)$ , où  $\varphi$  est la fonction indicatrice d'Euler.

### Exemple

En prenant  $N = p$  premier, on obtient  $A_p = \{p\}$  et  $B_p = \{1, \dots, 1\}$  avec  $p$  occurrences de 1.

## Résultats antérieurs

### Zudilin (2002)

Si  $e$  est une suite constituée des éléments de  $\bigcup_{i=1}^k A_{N_i}$  et si  $f$  est une suite constituée des éléments de  $\bigcup_{i=1}^k B_{N_i}$ , où les  $N_i$  sont des entiers strictement positifs ayant le même ensemble de diviseurs premiers, alors  $q_{e,f}(z) \in z\mathbb{Z}[[z]]$ .

### Exemples

Pour  $k = 1$  et  $N_1 = p$  premier on retrouve le résultat de Lian et Yau.

Pour  $k = 1$  et  $N_1 = 4$  :

$$Q_{e,f}(n) = \frac{(4n)!}{(2n)!(n!)^2}.$$

Pour  $k = 2$ ,  $N_1 = 6$  et  $N_2 = 12$  :

$$Q_{e,f}(n) = \frac{(12n)!}{(3n)!(4n)!(n!)^5}.$$

## Résultats antérieurs

$$A_N := \left\{ N, \frac{N}{p_{j_1} p_{j_2}}, \frac{N}{p_{j_1} p_{j_2} p_{j_3} p_{j_4}}, \dots \right\}_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots \leq \ell}$$

et

$$B_N := \left\{ 1, \dots, 1, \frac{N}{p_{j_1}}, \frac{N}{p_{j_1} p_{j_2} p_{j_3}}, \dots \right\}_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots \leq \ell}.$$

### Exemples

Pour  $k = 1$  et  $N_1 = 4$  :

$$\mathcal{Q}_{e,f}(n) = \frac{(4n)!}{(2n)!(n!)^2}.$$

Pour  $k = 2$ ,  $N_1 = 6$  et  $N_2 = 12$  :

$$\mathcal{Q}_{e,f}(n) = \frac{(12n)!}{(3n)!(4n)!(n!)^5}.$$

## Résultats antérieurs

### Krattenthaler, Rivoal (2009)

Si  $e$  est une suite constituée des éléments de  $\bigcup_{i=1}^k A_{N_i}$  et si  $f$  est une suite constituée des éléments de  $\bigcup_{i=1}^k B_{N_i}$ , où les  $N_i$  sont des entiers strictement positifs, alors  $q_{e,f}(z) \in z\mathbb{Z}[[z]]$ .

Fonction de Landau associée à  $e = (e_1, \dots, e_a)$  et  $f = (f_1, \dots, f_b)$  :

$$\Delta_{e,f}(x) := \sum_{i=1}^a \lfloor e_i x \rfloor - \sum_{j=1}^b \lfloor f_j x \rfloor, \quad (x \in \mathbb{R}),$$

où  $\lfloor \cdot \rfloor$  est la fonction partie entière.

### Krattenthaler, Rivoal (2009)

Soit  $e$  et  $f$  deux suites d'entiers positifs vérifiant  $|e| = |f|$ . Si  $\Delta_{e,f}$  est croissante sur  $[0, 1[$ , alors  $q_{e,f}(z) \in z\mathbb{Z}[[z]]$ .

## Résultats antérieurs

Pour tout  $L \in \mathbb{N}$ , on définit l'application de *type miroir*

$q_{L,e,f}(z) := \exp(G_{L,e,f}(z)/F_{e,f}(z))$ , où

$$G_{L,e,f}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e_1 n)! \cdots (e_a n)!}{(f_1 n)! \cdots (f_b n)!} H_{Ln} z^n,$$

de sorte que

$$z^{-1} q_{e,f}(z) = \left( \prod_{i=1}^a (q_{e_i, e, f}(z))^{e_i} \right) / \left( \prod_{j=1}^b (q_{f_j, e, f}(z))^{f_j} \right).$$

On note  $M_{e,f}$  le plus grand élément des suites  $e$  et  $f$ .

### Krattenthaler, Rivoal (2009)

Soit  $e$  et  $f$  deux suites d'entiers strictement positifs disjointes vérifiant  $|e| = |f|$ . Si  $\Delta_{e,f}$  est croissante sur  $[0, 1[$ , alors, pour tout  $L \in \{1, \dots, M_{e,f}\}$ , on a  $q_{L,e,f}(z) \in \mathbb{Z}[[z]]$ .

## Énoncé des critères

Fonction de Landau associée à  $e := (e_1, \dots, e_a)$  et  $f := (f_1, \dots, f_b)$  :

$$\Delta_{e,f}(x) := \sum_{i=1}^a \lfloor e_i x \rfloor - \sum_{j=1}^b \lfloor f_j x \rfloor.$$

On a

$$v_p(\mathcal{Q}_{e,f}(n)) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \Delta_{e,f} \left( \frac{n}{p^\ell} \right),$$

car

$$v_p(m!) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{m}{p^\ell} \right\rfloor$$

et donc

$$\begin{aligned} v_p(\mathcal{Q}_{e,f}(n)) &= v_p \left( \frac{(e_1 n)! \cdots (e_a n)!}{(f_1 n)! \cdots (f_b n)!} \right) \\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^a \lfloor e_i n / p^\ell \rfloor - \sum_{j=1}^b \lfloor f_j n / p^\ell \rfloor \right) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \Delta_{e,f} \left( \frac{n}{p^\ell} \right). \end{aligned}$$

## Landau (1900), Bober (2007)

- (i) Si, pour tout  $x \in [0, 1]$ , on a  $\Delta_{e,f}(x) \geq 0$ , alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $Q_{e,f}(n) \in \mathbb{N}$ .
- (ii) S'il existe  $x \in [0, 1]$  tel que  $\Delta_{e,f}(x) \leq -1$ , alors il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers  $p$  tels que tous les termes de la suite  $Q_{e,f}$  soient dans l'anneau  $\mathbb{Z}_p$  des entiers  $p$ -adiques.

## D. (2009)

Soit  $e$  et  $f$  deux suites d'entiers strictement positifs disjointes telles que  $Q_{e,f}$  soit une suite à termes entiers (ce qui équivaut à  $\Delta_{e,f} \geq 0$  sur  $[0, 1]$ ) et vérifiant  $|e| = |f|$ . On a alors la dichotomie suivante.

- (i) Si, pour tout  $x \in [1/M_{e,f}, 1[$ , on a  $\Delta_{e,f}(x) \geq 1$ , alors  $q_{e,f}(z) \in z\mathbb{Z}[[z]]$ .
- (ii) S'il existe  $x \in [1/M_{e,f}, 1[$  tel que  $\Delta_{e,f}(x) = 0$ , alors il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers  $p$  tels que  $q_{e,f}(z) \in z\mathbb{Z}_p[[z]]$ .

# Énoncé des critères

## D. (2009)

Soit  $e$  et  $f$  deux suites d'entiers strictement positifs disjointes telles que  $\mathcal{Q}_{e,f}$  soit une suite à termes entiers (ce qui équivaut à  $\Delta_{e,f} \geq 0$  sur  $[0, 1]$ ) et vérifiant  $|e| = |f|$ . On a alors la dichotomie suivante.

- (i) Si, pour tout  $x \in [1/M_{e,f}, 1[$ , on a  $\Delta_{e,f}(x) \geq 1$ , alors, pour tout  $L \in \{1, \dots, M_{e,f}\}$ , on a  $q_{L,e,f}(z) \in z\mathbb{Z}[[z]]$ .
- (ii) S'il existe  $x \in [1/M_{e,f}, 1[$  tel que  $\Delta_{e,f}(x) = 0$ , alors, pour tout  $L \in \{1, \dots, M_{e,f}\}$ , il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers  $p$  tels que  $q_{L,e,f}(z) \in z\mathbb{Z}_p[[z]]$ .

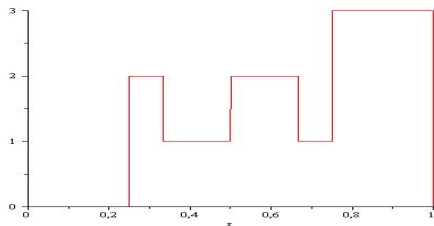
## Exemple de fonction de Landau non croissante sur $[0, 1[$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $(x)_n := x(x+1)\cdots(x+n-1)$  pour  $n \geq 1$  et  $(x)_0 := 1$  (Symbole de Pochhammer).

$e = (4, 4)$  et  $f = (3, 2, 1, 1, 1)$

$$Q_{e,f}(n) = \frac{((4n)!)^2}{(3n)!(2n)!(n!)^3} = \left(\frac{4^8}{3^3 2^2}\right)^n \frac{(1/4)_n^2 (1/2)_n (3/4)_n^2}{(1/3)_n (2/3)_n (1)_n^3}.$$

$$\Delta_{e,f}(x) = 2[4x] - [3x] - [2x] - 3[x].$$



## Une reformulation $p$ -adique

Si  $x \in \mathbb{Q}$ , alors  $x \in \mathbb{Z}$  si et seulement si, pour tout premier  $p$ ,  $x \in \mathbb{Z}_p$ .

### Dieudonné, Dwork

Soit  $F(z)$  une série formelle dans  $1 + z\mathbb{Q}[[z]]$ . Alors  $F(z) \in 1 + z\mathbb{Z}_p[[z]]$  si et seulement si  $\frac{F(z^p)}{F(z)^p} \in 1 + pz\mathbb{Z}_p[[z]]$ .

### Corollaire

Soit  $f(z) \in z\mathbb{Q}[[z]]$ . On a  $e^{f(z)} \in 1 + z\mathbb{Z}_p[[z]]$  si et seulement si  $f(z^p) - pf(z) \in pz\mathbb{Z}_p[[z]]$ .

$$q_L(z) \in z\mathbb{Z}_p[[z]] \Leftrightarrow F(z)G_L(z^p) - pF(z^p)G_L(z) \in pz\mathbb{Z}_p[[z]].$$

$$\Phi_{L,p}(a + Kp) := \sum_{j=0}^K Q(K-j)Q(a+jp) (H_{L(K-j)} - pH_{L(a+jp)}).$$

## Une réécriture de $\Phi_{L,p}$ modulo $p\mathbb{Z}_p$

$$pH_{L(a+jp)} \equiv H_{Lj} + \sum_{i=1}^{\lfloor La/p \rfloor} \frac{1}{Lj+i} \pmod{p\mathbb{Z}_p}.$$

Résultat impliqué par  $\Delta_{e,f} \geq 1$  sur  $[1/M_{e,f}, 1[$

$\forall L \in \{1, \dots, M_{(e,f)}\}$ ,  $\forall a \in \{0, \dots, p-1\}$ ,  $\forall j \in \mathbb{N}$ , on a

$$Q(a+jp) \sum_{i=1}^{\lfloor La/p \rfloor} \frac{1}{Lj+i} \in p\mathbb{Z}_p.$$

$$\begin{aligned} \Phi_{L,p}(a + Kp) &\equiv \sum_{j=0}^K Q(K-j)Q(a+jp)(H_{L(K-j)} - H_{Lj}) \pmod{p\mathbb{Z}_p} \\ &\equiv \sum_{j=0}^K H_{Lj} (Q(a+jp)Q(K-j) - Q(j)Q(a+(K-j)p)) \pmod{p\mathbb{Z}_p}. \end{aligned}$$

## Nouvelle reformulation du problème

$$S(a, K, s, p, m) := \sum_{j=mp^s}^{(m+1)p^s-1} (\mathcal{Q}(a+jp)\mathcal{Q}(K-j) - \mathcal{Q}(j)\mathcal{Q}(a+(K-j)p)),$$

Dwork (1973)

Si  $p^r > K$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^K H_{Lj} (\mathcal{Q}(a+jp)\mathcal{Q}(K-j) - \mathcal{Q}(j)\mathcal{Q}(a+(K-j)p)) \\ = \sum_{s=0}^r \sum_{m=0}^{p^{r+1-s}-1} W_L(a, K, s, p, m), \end{aligned}$$

où  $W_L(a, K, s, p, m) := (H_{Lmp^s} - H_{L\lfloor m/p \rfloor p^{s+1}})S(a, K, s, p, m)$ .

## Nouvelle reformulation du problème

Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , on pose

$$\mu_p(m) := \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbf{1}_{[1/M_{e,f}, 1[}(\{m/p^\ell\}) \quad \text{et} \quad g_p(m) := p^{\mu_p(m)},$$

où  $\mathbf{1}_{[1/M_{e,f}, 1[}$  est la fonction caractéristique de  $[1/M_{e,f}, 1[$ .

On montre alors que

$$S(a, K, s, p, m) \in p^{s+1} g_p(m) \mathbb{Z}_p$$

et

$$p^{s+1} g_p(m) (H_{Lmp^s} - H_{L\lfloor m/p \rfloor p^{s+1}}) \in p \mathbb{Z}_p.$$

Ce qui donne bien

$$W_L(a, K, s, p, m) := (H_{Lmp^s} - H_{L\lfloor m/p \rfloor p^{s+1}}) S(a, K, s, p, m) \in p \mathbb{Z}_p.$$

Soit  $p$  un nombre premier. Soit,  $\forall r \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{A}_r : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ,

$\mathbf{g}_r : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$  t.q.,  $\forall r \geq 0$ , on ait

(i)  $|\mathbf{A}_r(0)|_p = 1$ ;

(ii)  $\forall m \in \mathbb{N}$ , on a  $\mathbf{A}_r(m) \in \mathbf{g}_r(m)\mathbb{Z}_p$ ;

et telles que  $\exists k_0 \in \mathbb{N}$  tel que

(iii)  $\forall m \in \mathbb{N}$ ,  $\forall r \geq 0$ ,

si  $v_p(m) \geq k_0$  alors,  $\forall v, u, s \in \mathbb{N}$  t.q.  $v < p$ ,  $u < p^s$ , on a

$$\frac{\mathbf{A}_r(v + up + mp^{s+1})}{\mathbf{A}_r(v + up)} - \frac{\mathbf{A}_{r+1}(u + mp^s)}{\mathbf{A}_{r+1}(u)} \in p^{s+1+k_0} \frac{\mathbf{g}_{r+s+1}(m)}{\mathbf{g}_r(v + up)} \mathbb{Z}_p;$$

si  $v_p(m) \leq k_0 - 1$ , alors  $\frac{\mathbf{A}_r(mp)}{\mathbf{A}_r(0)} - \frac{\mathbf{A}_{r+1}(m)}{\mathbf{A}_{r+1}(0)} \in p^{v_p(m)+1} \mathbf{g}_{r+1}(m)\mathbb{Z}_p$ ;

(iv)  $\forall k \in \{1, \dots, k_0\}$ ,  $\forall v \in \{1, \dots, p-1\}$ ,  $\forall m, r \in \mathbb{N}$ , on a

$$\mathbf{g}_r(v + mp^k) \in p^k \mathbf{g}_r(mp^k)\mathbb{Z}_p \text{ et } \mathbf{g}_r(mp^k) \in \mathbf{g}_{r+k}(m)\mathbb{Z}_p.$$

Alors,  $\forall a \in \{0, \dots, p-1\}$ ,  $\forall m, s, r \in \mathbb{N}$ ,  $\forall K \in \mathbb{Z}$ , on a

$$\sum_{j=mp^s}^{(m+1)p^s-1} \left( \mathbf{A}_r(a + p(K-j))\mathbf{A}_{r+1}(j) - \mathbf{A}_{r+1}(K-j)\mathbf{A}_r(a + jp) \right) \in p^{s+1} \mathbf{g}_{s+r+1}(m)\mathbb{Z}_p,$$

où  $\mathbf{A}_r(\ell) = 0$  si  $\ell < 0$ .

Soit  $p$  un nombre premier. Soit,  $\forall r \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{A}_r : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ,

$\mathbf{g}_r : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$  t.q.,  $\forall r \geq 0$ , on ait

(i)  $|\mathbf{A}_r(0)|_p = 1$ ;

(ii)  $\forall m \in \mathbb{N}$ , on a  $\mathbf{A}_r(m) \in \mathbf{g}_r(m)\mathbb{Z}_p$ ;

et telles que  $\exists k_0 \in \mathbb{N}$  tel que

(iii)  $\forall m \in \mathbb{N}$ ,  $\forall r \geq 0$ ,

si  $v_p(m) \geq k_0$  alors,  $\forall v, u, s \in \mathbb{N}$  t.q.  $v < p$ ,  $u < p^s$ , on a

$$\frac{\mathbf{A}_r(v + up + mp^{s+1})}{\mathbf{A}_r(v + up)} - \frac{\mathbf{A}_{r+1}(u + mp^s)}{\mathbf{A}_{r+1}(u)} \in p^{s+1+k_0} \frac{\mathbf{g}_{r+s+1}(m)}{\mathbf{g}_r(v + up)} \mathbb{Z}_p;$$

si  $v_p(m) \leq k_0 - 1$ , alors  $\frac{\mathbf{A}_r(mp)}{\mathbf{A}_r(0)} - \frac{\mathbf{A}_{r+1}(m)}{\mathbf{A}_{r+1}(0)} \in p^{v_p(m)+1} \mathbf{g}_{r+1}(m)\mathbb{Z}_p$ ;

(iv)  $\forall k \in \{1, \dots, k_0\}$ ,  $\forall v \in \{1, \dots, p-1\}$ ,  $\forall m, r \in \mathbb{N}$ , on a

$$\mathbf{g}_r(v + mp^k) \in p^k \mathbf{g}_r(mp^k)\mathbb{Z}_p \text{ et } \mathbf{g}_r(mp^k) \in \mathbf{g}_{r+k}(m)\mathbb{Z}_p.$$

Alors,  $\forall a \in \{0, \dots, p-1\}$ ,  $\forall m, s, r \in \mathbb{N}$ ,  $\forall K \in \mathbb{Z}$ , on a

$$\sum_{j=mp^s}^{(m+1)p^s-1} \left( \mathbf{A}_r(a + p(K-j))\mathbf{A}_{r+1}(j) - \mathbf{A}_{r+1}(K-j)\mathbf{A}_r(a + jp) \right) \in p^{s+1} \mathbf{g}_{s+r+1}(m)\mathbb{Z}_p,$$

où  $\mathbf{A}_r(\ell) = 0$  si  $\ell < 0$ .

## Applications miroir en plusieurs variables

Soit  $e := (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_a)$  et  $f := (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_b)$  deux suites de vecteurs de  $\mathbb{N}^d$ .

$$|e| := \sum_{i=1}^a \mathbf{e}_i, \quad |f| := \sum_{i=1}^b \mathbf{f}_i \in \mathbb{N}^d,$$

$$Q_{e,f}(\mathbf{n}) := \frac{(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n})! \cdots (\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{n})!}{(\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{n})! \cdots (\mathbf{f}_b \cdot \mathbf{n})!}, \quad (\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d),$$

$$F_{e,f}(\mathbf{z}) := \sum_{\mathbf{n} \geq 0} \frac{(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n})! \cdots (\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{n})!}{(\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{n})! \cdots (\mathbf{f}_b \cdot \mathbf{n})!} \mathbf{z}^{\mathbf{n}},$$

$$G_{e,f,k}(\mathbf{z}) := \sum_{\mathbf{n} \geq 0} \frac{(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n})! \cdots (\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{n})!}{(\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{n})! \cdots (\mathbf{f}_b \cdot \mathbf{n})!} \left( \sum_{i=1}^a \mathbf{e}_i^{(k)} H_{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n}} - \sum_{j=1}^b \mathbf{f}_j^{(k)} H_{\mathbf{f}_j \cdot \mathbf{n}} \right) \mathbf{z}^{\mathbf{n}},$$

$$q_{e,f,k}(\mathbf{z}) := z_k \exp(G_{e,f,k}(\mathbf{z})/F_{e,f}(\mathbf{z})), \quad k \in \{1, \dots, d\},$$

L'inverse pour la composition de l'application  $\mathbf{z} \mapsto (q_{e,f,1}(\mathbf{z}), \dots, q_{e,f,d}(\mathbf{z}))$  définit le vecteur  $(z_{e,f,1}(\mathbf{q}), \dots, z_{e,f,d}(\mathbf{q}))$  d'applications miroir.

## Fonction de Landau en plusieurs variables

Fonction de Landau associée à  $e := (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_a)$  et  $f := (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_b)$  :

$$\Delta_{e,f}(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^a \lfloor \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{x} \rfloor - \sum_{j=1}^b \lfloor \mathbf{f}_j \cdot \mathbf{x} \rfloor, \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d).$$

On a

$$v_p(\mathcal{Q}_{e,f}(\mathbf{n})) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \Delta_{e,f} \left( \frac{\mathbf{n}}{p^\ell} \right),$$

car

$$v_p(m!) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{m}{p^\ell} \right\rfloor$$

et donc

$$\begin{aligned} v_p(\mathcal{Q}_{e,f}(\mathbf{n})) &= v_p \left( \frac{(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n})! \cdots (\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{n})!}{(\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{n})! \cdots (\mathbf{f}_b \cdot \mathbf{n})!} \right) \\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^a \lfloor \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n} / p^\ell \rfloor - \sum_{j=1}^b \lfloor \mathbf{f}_j \cdot \mathbf{n} / p^\ell \rfloor \right) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \Delta_{e,f} \left( \frac{\mathbf{n}}{p^\ell} \right). \end{aligned}$$

# Fonction de Landau en plusieurs variables

Landau (1900), D. (2011)

- (i) Si, pour tout  $\mathbf{x} \in [0, 1]^d$ , on a  $\Delta_{e,f}(\mathbf{x}) \geq 0$ , alors, pour tout  $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ , on a  $Q_{e,f}(\mathbf{n}) \in \mathbb{N}$ .
- (ii) S'il existe  $\mathbf{x} \in [0, 1]^d$  tel que  $\Delta_{e,f}(\mathbf{x}) \leq -1$ , alors il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers  $p$  tels que tous les termes de la famille  $Q_{e,f}$  soient dans l'anneau  $\mathbb{Z}_p$  des entiers  $p$ -adiques.

## Critère pour les applications miroir de plusieurs variables

On note  $\mathcal{D}_{e,f}$  l'ensemble des  $\mathbf{x} \in [0, 1]^d$  tels qu'il existe un élément  $\mathbf{d}$  de  $e$  ou  $f$  tel que  $\mathbf{d} \cdot \mathbf{x} \geq 1$ .

### D. (2011)

Soit  $e$  et  $f$  deux suites de vecteurs non nuls de  $\mathbb{N}^d$  disjointes telles que  $\mathcal{Q}_{e,f}$  soit une famille à termes entiers (ce qui équivaut à  $\Delta_{e,f} \geq 0$  sur  $[0, 1]^d$ ) et vérifiant  $|e| = |f|$ . On a alors la dichotomie suivante.

- (i) Si, pour tout  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_{e,f}$ , on a  $\Delta_{e,f}(\mathbf{x}) \geq 1$ , alors, pour tout  $k \in \{1, \dots, d\}$ , on a  $q_{e,f,k}(\mathbf{z}) \in z_k \mathbb{Z}[[\mathbf{z}]]$ .
- (ii) S'il existe  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_{e,f}$  tel que  $\Delta_{e,f}(\mathbf{x}) = 0$ , alors il existe  $k \in \{1, \dots, d\}$  tel qu'il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers  $p$  tels que  $q_{e,f,k}(\mathbf{z}) \in z_k \mathbb{Z}_p[[\mathbf{z}]]$ .

# Applications de type miroir de plusieurs variables

Pour tout  $\mathbf{L} \in \mathbb{N}^d$ , on définit l'application de *type miroir*  
 $q_{\mathbf{L},e,f}(\mathbf{z}) := \exp(G_{\mathbf{L},e,f}(\mathbf{z})/F_{e,f}(\mathbf{z}))$ , où

$$G_{\mathbf{L},e,f}(\mathbf{z}) := \sum_{\mathbf{n} \geq \mathbf{0}} \frac{(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n})! \cdots (\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{n})!}{(\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{n})! \cdots (\mathbf{f}_b \cdot \mathbf{n})!} H_{\mathbf{L} \cdot \mathbf{n}} \mathbf{z}^{\mathbf{n}},$$

de sorte que

$$z_k^{-1} q_{e,f,k}(\mathbf{z}) = \left( \prod_{i=1}^a (q_{\mathbf{e}_i,e,f}(\mathbf{z}))^{\mathbf{e}_i^{(k)}} \right) / \left( \prod_{j=1}^b (q_{\mathbf{f}_j,e,f}(\mathbf{z}))^{\mathbf{f}_j^{(k)}} \right).$$

On note  $\mathcal{E}_{e,f}$  l'ensemble des  $\mathbf{L} \in \mathbb{N}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$  tels qu'il existe  $\mathbf{d} \in \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_a, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_b\}$  vérifiant  $\mathbf{L} \leq \mathbf{d}$ .

# Critère pour les applications de type miroir de plusieurs variables

D. (2011)

Soit  $e$  et  $f$  deux suites de vecteurs non nuls de  $\mathbb{N}^d$  disjointes telles que  $\mathcal{Q}_{e,f}$  soit une famille à termes entiers (ce qui équivaut à  $\Delta_{e,f} \geq 0$  sur  $[0, 1]^d$ ) et vérifiant  $|e| = |f|$ . On a alors la dichotomie suivante.

- (i) Si, pour tout  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_{e,f}$ , on a  $\Delta_{e,f}(\mathbf{x}) \geq 1$ , alors, pour tout  $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_{e,f}$ , on a  $q_{\mathbf{L},e,f}(\mathbf{z}) \in \mathbb{Z}[[\mathbf{z}]]$ .
- (ii) S'il existe  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_{e,f}$  tel que  $\Delta_{e,f}(\mathbf{x}) = 0$ , alors il existe  $k \in \{1, \dots, d\}$  tel que, si  $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_{e,f}$  vérifie  $\mathbf{L}^{(k)} \geq 1$ , alors il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers  $p$  tels que  $q_{\mathbf{L},e,f}(\mathbf{z}) \in \mathbb{Z}_p[[\mathbf{z}]]$ . De plus, il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers  $p$  tels que  $q_{e,f,k}(\mathbf{z}) \in z_k \mathbb{Z}_p[[\mathbf{z}]]$ .

$$z_k^{-1} q_{e,f,k}(\mathbf{z}) = \left( \prod_{i=1}^a (q_{e_i,e,f}(\mathbf{z}))^{e_i^{(k)}} \right) / \left( \prod_{j=1}^b (q_{f_j,e,f}(\mathbf{z}))^{f_j^{(k)}} \right).$$

## Spécialisations

$$\theta^4 - 2^4 z(4\theta + 1)(4\theta + 3)(8\theta^2 + 8\theta + 3) + 2^{12} z^2(4\theta + 1)(4\theta + 3)(4\theta + 5)(4\theta + 7),$$

$$\text{où } \theta = z \frac{d}{dz}.$$

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{(4n)!}{(n!)^2(2n)!} \sum_{k=0}^n 2^{2k} \binom{2(n-k)}{n-k}^2 \binom{2k}{k}.$$

Il existe une unique série sans terme constant  $G(z) \in \mathbb{C}[[z]]$  telle que  $G(z) + \log(z)F(z)$  soit une solution de l'équation différentielle linéairement indépendante de  $F$ .

On peut alors définir le  $q$ -paramètre de l'équation

$$q(z) := z \exp(G(z)/F(z)).$$

## Spécialisations

En prenant  $e = ((4, 4), (2, 0), (2, 0), (0, 2))$  et

$$f = ((2, 2), (1, 1), (1, 1), (1, 0), (1, 0), (1, 0), (1, 0), (0, 1), (0, 1)),$$

on obtient que  $|e| = |f|$  et

$$\begin{aligned} F_{e,f}(z, 2^2 z) &= \sum_{k,m \geq 0} \frac{(4k + 4m)!}{(2k + 2m)!((k + m)!)^2} \cdot \frac{((2k)!)^2}{(k!)^4} \cdot \frac{((2m)!)^2}{(m!)^4} 2^{2m} z^{k+m} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{k+m=n} \frac{(4n)!}{(2n)!(n!)^2} 2^{2m} \binom{2k}{k}^2 \binom{2m}{m} = F(z). \end{aligned}$$

$$\Delta_{e,f}(x, y) = [4x + 4y] + 2[2x] + [2y] - [2x + 2y] - 2[x + y]$$

et  $\Delta_{e,f} \geq 1$  sur  $\mathcal{D}_{e,f}$ .

# Spécialisations

- On montre alors, *via* la méthode de Frobenius, que  $G_{e,f,1}(z, 4z) + \log(z)F(z)$  est une solution de l'équation.
- Par unicité de  $G$ , on obtient que  $G = G_{e,f,1}(z, 4z)$ .
- Ainsi

$$q(z) = z \exp \left( G_{e,f,1}(z, 4z) / F_{e,f}(z, 4z) \right) = q_{e,f,1}(z, 4z) \in z\mathbb{Z}[[z]].$$