# INRIA Algorithms Project's Seminar

## Critères pour l'intégralité des coefficients de Taylor des applications miroir

Éric Delaygue

Institut Fourier

7 Novembre 2011

# Plan de l'exposé

# Application miroir d'origine modulaire

La série hypergéométrique

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!^2}{n!^4} z^n = {}_2F_1\left( \begin{matrix} 1/2, 1/2 \\ 1 \end{matrix} ; 16z \right)$$

est solution de l'équation différentielle

$$D^2 y - 16z \left( D + \frac{1}{2} \right)^2 y = 0, \text{ avec } D := z \frac{d}{dz}.$$

Une deuxième solution linéairement indépendante de $F(z)$ est $G(z) + \log(z) F(z)$ avec

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!^2}{n!^4} \left( 4H_{2n} - 4H_n \right) z^n$$

et où $H_n := \sum_{i=1}^{n} 1/i$ est le $n$-ième nombre harmonique.

# Application miroir d'origine modulaire

La *coordonnée canonique* associée est

$$q(z) = \exp\left(\frac{G(z) + \log(z)F(z)}{F(z)}\right) = z\exp\left(\frac{G(z)}{F(z)}\right).$$

L'*application miroir* $z(q)$ correspondante est l'inverse de $q(z)$ pour la composition des séries formelles et on a

$$z(q) = \frac{\theta_2^4(q)}{16\theta_3^4(q)} = q\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-q^{4n})^8}{(1-(-q)^n)^8} \in \mathbb{Z}[[q]],$$

où $\theta_2(q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2}$ et $\theta_3(q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}$.
On a alors le développement de Taylor

$$z(q) = q - 8q^2 + 44q^3 - 192q^4 + 718q^5 - 2400q^6 + 7352q^7 - 20992q^8 + 56549q^9 + O(q^{10}).$$

# Exemple étudié par Candelas, de la Ossa, Green et Parkes

La série hypergéométrique

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5n)!}{(n!)^5} z^n = {}_4F_3\left( \begin{matrix} 1/5, 2/5, 3/5, 4/5 \\ 1, 1, 1 \end{matrix} ; 5^5 z \right)$$

est solution de l'équation différentielle

$$D^4 y - 5z\,(5D+1)\,(5D+2)\,(5D+3)\,(5D+4)\,y = 0.$$

Une deuxième solution linéairement indépendante de $F(z)$ est $G(z) + \log(z)F(z)$ avec

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5n)!}{(n!)^5}(5H_{5n} - 5H_n)z^n.$$

# Exemple étudié par Candelas, de la Ossa, Green et Parkes

L'application miroir associée est l'inverse pour la composition des applications de $q(z) = z\exp(G(z)/F(z))$.

**Lian, Yau (1995)**

$$q(z) \in z\mathbb{Z}[[z]] \quad \text{et} \quad z(q) \in q\mathbb{Z}[[q]].$$

On a

$$q(z) = z + 770z^2 + 1014275z^3 + 1703916750z^4 \\ + 3286569025625z^5 + O(z^6)$$

et

$$z(q) = q - 770q^2 + 171525q^3 - 81623000q^4 - 35423171250q^5 \\ - 54572818340154q^6 + O(q^7).$$

# Notations

Soit $e := (e_1, \ldots, e_a)$ et $f := (f_1, \ldots, f_b)$ deux suites d'entiers naturels. On note

$$|e| := \sum_{i=1}^{a} e_i,\ |f| := \sum_{j=1}^{b} f_j \quad \text{et} \quad \mathcal{Q}_{e,f}(n) := \frac{(e_1 n)! \cdots (e_a n)!}{(f_1 n)! \cdots (f_b n)!},\ (n \in \mathbb{N}),$$

$$F_{e,f}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e_1 n)! \cdots (e_a n)!}{(f_1 n)! \cdots (f_b n)!} z^n \text{ (série hypergéométrique)},$$

$$G_{e,f}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e_1 n)! \cdots (e_a n)!}{(f_1 n)! \cdots (f_b n)!} \left( \sum_{i=1}^{a} e_i H_{e_i n} - \sum_{j=1}^{b} f_j H_{f_j n} \right) z^n,$$

$$q_{e,f}(z) := z \exp\left( \frac{G_{e,f}(z)}{F_{e,f}(z)} \right) \ (\textit{Coordonnée canonique}).$$

L'*application miroir* $z_{e,f}(q)$ est l'inverse de $q_{e,f}(z)$ pour la composition des séries formelles.

# Indépendance algébrique

Pour $e = (2,2)$ et $f = (1,1,1,1)$, on a

$$F_{e,f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!^2}{n!^4} z^n \in \mathbb{Z}[[z]].$$

On a

$$z_{e,f}(q) = \frac{\theta_2^4(q)}{16\theta_3^4(q)} = q \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^{4n})^8}{(1-(-q)^n)^8} \in \mathbb{Z}[[q]],$$

où $\theta_2(q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2}$ et $\theta_3(q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}$.

**J.M. et P.B. Borwein (1987)**

$$\tilde{F}(q) := F_{e,f}(z_{e,f}(q)) = \theta_3(q)^2.$$

# Couplage de Yukawa

- Famille $\mathcal{M}$ d'hypersurfaces quintiques de $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ définies par

$$\sum_{k=1}^{5} x_k^5 - 5z \prod_{k=1}^{5} x_k = 0 \quad (z \in \mathbb{C}).$$

- Famille miroir $\mathcal{W}$ de variétés de Calabi-Yau (miroir de $\mathcal{M}$).
- $\big(D^4 - 5z(5D+1)(5D+2)(5D+3)(5D+4)\big)y = 0$, où $D = z\frac{d}{dz}$.
- Solution holomorphe en 0 : $e = (5)$ et $f = (1,1,1,1,1)$

$$F_{e,f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5n)!}{(n!)^5} z^n.$$

# Couplage de Yukawa

Une deuxième solution linéairement indépendante de $F_{e,f}$ est $G_{e,f}(z) + \log(z) F_{e,f}(z)$, où

$$G_{e,f}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5n)!}{(n!)^5} \left(5H_{5n} - 5H_n\right) z^n.$$

Dans ce cas précis, le *couplage de Yukawa* $K(q)$ associé est

$$K(q) = \frac{5}{1 - 5^5 z_{e,f}(q)} \cdot \frac{1}{F_{e,f}(z_{e,f}(q))^2} \cdot \left(\frac{q z'_{e,f}(q)}{z_{e,f}(q)}\right)^3 \in \mathbb{Q}[[q]].$$

On écrit

$$K(q) =: \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n =: a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} k_n \frac{q^n}{1 - q^n},$$

avec $k_n = \sum_{d|n} \mu(n/d) a_d$ où $\mu$ est la fonction de Möbius.

# Résultats antérieurs

## Lian, Yau (1995)

Soit $p$ un nombre premier, $e = (p)$, $f = (1, \ldots, 1)$ avec $|e| = |f|$. Alors $q_{e,f}(z) \in z\mathbb{Z}[[z]]$.

Soit $N \in \mathbb{N}$ et $N = p_1^{a_1} \ldots p_\ell^{a_\ell}$ sa décomposition en facteurs premiers.
On note

$$A_N := \left\{N, \frac{N}{p_{j_1}p_{j_2}}, \frac{N}{p_{j_1}p_{j_2}p_{j_3}p_{j_4}}, \ldots\right\}_{1\leq j_1<j_2<\cdots\leq\ell}$$

et

$$B_N := \left\{1, \ldots, 1, \frac{N}{p_{j_1}}, \frac{N}{p_{j_1}p_{j_2}p_{j_3}}, \ldots\right\}_{1\leq j_1<j_2<\cdots\leq\ell},$$

avec un nombre de 1 dans $B_n$ égal à $\varphi(N)$, où $\varphi$ est la fonction indicatrice d'Euler.

## Exemple

En prenant $N = p$ premier, on obtient $A_p = \{p\}$ et $B_p = \{1, \ldots, 1\}$ avec $p$ occurences de 1.

# Résultats antérieurs

## Zudilin (2002)

Si $e$ est une suite constituée des éléments de $\bigcup_{i=1}^{k} A_{N_i}$ et si $f$ est une suite constituée des éléments de $\bigcup_{i=1}^{k} B_{N_i}$, où les $N_i$ sont des entiers strictement positifs ayant le même ensemble de diviseurs premiers, alors
$q_{e,f}(z) \in z\mathbb{Z}[[z]]$.

## Exemples

Pour $k = 1$ et $N_1 = p$ premier on retrouve le résultat de Lian et Yau.
Pour $k = 1$ et $N_1 = 4$ :

$$\mathcal{Q}_{e,f}(n) = \frac{(4n)!}{(2n)!(n!)^2}.$$

Pour $k = 2$, $N_1 = 6$ et $N_2 = 12$ :

$$\mathcal{Q}_{e,f}(n) = \frac{(12n)!}{(3n)!(4n)!(n!)^5}.$$

# Résultats antérieurs

$$A_N := \left\{ N, \frac{N}{p_{j_1} p_{j_2}}, \frac{N}{p_{j_1} p_{j_2} p_{j_3} p_{j_4}}, \dots \right\}_{1 \le j_1 < j_2 < \cdots \le \ell}$$

et

$$B_N := \left\{ 1, \dots, 1, \frac{N}{p_{j_1}}, \frac{N}{p_{j_1} p_{j_2} p_{j_3}}, \dots \right\}_{1 \le j_1 < j_2 < \cdots \le \ell}.$$

## Exemples

Pour $k = 1$ et $N_1 = 4$ :

$$\mathcal{Q}_{e,f}(n) = \frac{(4n)!}{(2n)!(n!)^2}.$$

Pour $k = 2$, $N_1 = 6$ et $N_2 = 12$ :

$$\mathcal{Q}_{e,f}(n) = \frac{(12n)!}{(3n)!(4n)!(n!)^5}.$$

# Résultats antérieurs

## Krattenthaler, Rivoal (2009)

Si $e$ est une suite constituée des éléments de $\bigcup_{i=1}^{k} A_{N_i}$ et si $f$ est une suite constituée des éléments de $\bigcup_{i=1}^{k} B_{N_i}$, où les $N_i$ sont des entiers strictement positifs, alors $q_{e,f}(z) \in z\mathbb{Z}[[z]]$.

Fonction de Landau associée à $e = (e_1, \ldots, e_a)$ et $f = (f_1, \ldots, f_b)$ :

$$\Delta_{e,f}(x) := \sum_{i=1}^{a} \lfloor e_i x \rfloor - \sum_{j=1}^{b} \lfloor f_j x \rfloor, \; (x \in \mathbb{R}),$$

où $\lfloor \cdot \rfloor$ est la fonction partie entière.

## Krattenthaler, Rivoal (2009)

Soit $e$ et $f$ deux suites d'entiers positifs vérifiant $|e| = |f|$. Si $\Delta_{e,f}$ est croissante sur $[0, 1[$, alors $q_{e,f}(z) \in z\mathbb{Z}[[z]]$.

# Résultats antérieurs

Pour tout $L \in \mathbb{N}$, on définit l'application de *type miroir* $q_{L,e,f}(z) := \exp(G_{L,e,f}(z)/F_{e,f}(z))$, où

$$G_{L,e,f}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e_1 n)! \cdots (e_a n)!}{(f_1 n)! \cdots (f_b n)!} H_{Ln} z^n,$$

de sorte que

$$z^{-1} q_{e,f}(z) = \left( \prod_{i=1}^{a} \left( q_{e_i,e,f}(z) \right)^{e_i} \right) / \left( \prod_{j=1}^{b} \left( q_{f_j,e,f}(z) \right)^{f_j} \right).$$

On note $M_{e,f}$ le plus grand élément des suites $e$ et $f$.

**Krattenthaler, Rivoal (2009)**

Soit $e$ et $f$ deux suites d'entiers strictement positifs disjointes vérifiant $|e| = |f|$. Si $\Delta_{e,f}$ est croissante sur $[0,1[$, alors, pour tout $L \in \{1, \dots, M_{e,f}\}$, on a $q_{L,e,f}(z) \in \mathbb{Z}[[z]]$.

# Énoncé des critères

Fonction de Landau associée à $e := (e_1, \ldots, e_a)$ et $f := (f_1, \ldots, f_b)$ :

$$\Delta_{e,f}(x) := \sum_{i=1}^{a} \lfloor e_i x \rfloor - \sum_{j=1}^{b} \lfloor f_j x \rfloor.$$

On a

$$v_p\left(\mathcal{Q}_{e,f}(n)\right) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \Delta_{e,f}\left(\frac{n}{p^\ell}\right),$$

car

$$v_p(m!) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{m}{p^\ell} \right\rfloor$$

et donc

$$\begin{aligned} v_p\left(\mathcal{Q}_{e,f}(n)\right) &= v_p\left(\frac{(e_1 n)! \cdots (e_a n)!}{(f_1 n)! \cdots (f_b n)!}\right) \\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^{a} \lfloor e_i n / p^\ell \rfloor - \sum_{j=1}^{b} \lfloor f_j n / p^\ell \rfloor \right) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \Delta_{e,f}\left(\frac{n}{p^\ell}\right). \end{aligned}$$

### Landau (1900), Bober (2007)

$(i)$ Si, pour tout $x \in [0,1]$, on a $\Delta_{e,f}(x) \geq 0$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathcal{Q}_{e,f}(n) \in \mathbb{N}$.

$(ii)$ S'il existe $x \in [0,1]$ tel que $\Delta_{e,f}(x) \leq -1$, alors il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers $p$ tels que tous les termes de la suite $\mathcal{Q}_{e,f}$ soient dans l'anneau $\mathbb{Z}_p$ des entiers $p$-adiques.

### D. (2009)

Soit $e$ et $f$ deux suites d'entiers strictement positifs disjointes telles que $\mathcal{Q}_{e,f}$ soit une suite à termes entiers (ce qui équivaut à $\Delta_{e,f} \geq 0$ sur $[0,1]$) et vérifiant $|e| = |f|$. On a alors la dichotomie suivante.

$(i)$ Si, pour tout $x \in [1/M_{e,f}, 1[$, on a $\Delta_{e,f}(x) \geq 1$, alors $q_{e,f}(z) \in z\mathbb{Z}[[z]]$.

$(ii)$ S'il existe $x \in [1/M_{e,f}, 1[$ tel que $\Delta_{e,f}(x) = 0$, alors il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers $p$ tels que $q_{e,f}(z) \in z\mathbb{Z}_p[[z]]$.

# Énoncé des critères

**D. (2009)**

Soit $e$ et $f$ deux suites d'entiers strictement positifs disjointes telles que $\mathcal{Q}_{e,f}$ soit une suite à termes entiers (ce qui équivaut à $\Delta_{e,f} \geq 0$ sur $[0,1]$) et vérifiant $|e| = |f|$. On a alors la dichotomie suivante.

(*i*) Si, pour tout $x \in [1/M_{e,f}, 1[$, on a $\Delta_{e,f}(x) \geq 1$, alors, pour tout $L \in \{1, \dots, M_{e,f}\}$, on a $q_{L,e,f}(z) \in z\mathbb{Z}[[z]]$.

(*ii*) S'il existe $x \in [1/M_{e,f}, 1[$ tel que $\Delta_{e,f}(x) = 0$, alors, pour tout $L \in \{1, \dots, M_{e,f}\}$, il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers $p$ tels que $q_{L,e,f}(z) \in z\mathbb{Z}_p[[z]]$.

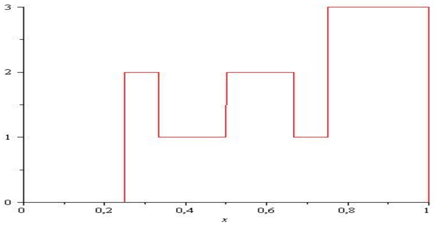
# Exemple de fonction de Landau non croissante sur $[0, 1[$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $(x)_n := x(x+1)\cdots(x+n-1)$ pour $n \geq 1$ et $(x)_0 := 1$ (Symbole de Pochhammer).

$e = (4, 4)$ et $f = (3, 2, 1, 1, 1)$

$$\mathcal{Q}_{e,f}(n) = \frac{((4n)!)^2}{(3n)!(2n)!(n!)^3} = \left(\frac{4^8}{3^3 2^2}\right)^n \frac{(1/4)_n^2 (1/2)_n (3/4)_n^2}{(1/3)_n (2/3)_n (1)_n^3}.$$

$$\Delta_{e,f}(x) = 2\lfloor 4x \rfloor - \lfloor 3x \rfloor - \lfloor 2x \rfloor - 3\lfloor x \rfloor.$$



# Une reformulation $p$-adique

Si $x \in \mathbb{Q}$, alors $x \in \mathbb{Z}$ si et seulement si, pour tout premier $p$, $x \in \mathbb{Z}_p$.

## Dieudonné, Dwork

Soit $F(z)$ une série formelle dans $1 + z\mathbb{Q}[[z]]$. Alors $F(z) \in 1 + z\mathbb{Z}_p[[z]]$ si et seulement si $\frac{F(z^p)}{F(z)^p} \in 1 + pz\mathbb{Z}_p[[z]]$.

## Corollaire

Soit $f(z) \in z\mathbb{Q}[[z]]$. On a $e^{f(z)} \in 1 + z\mathbb{Z}_p[[z]]$ si et seulement si $f(z^p) - pf(z) \in pz\mathbb{Z}_p[[z]]$.

$$q_L(z) \in z\mathbb{Z}_p[[z]] \Leftrightarrow F(z)G_L(z^p) - pF(z^p)G_L(z) \in pz\mathbb{Z}_p[[z]].$$

$$\Phi_{L,p}(a + Kp) := \sum_{j=0}^{K} \mathcal{Q}(K-j)\mathcal{Q}(a+jp)\left(H_{L(K-j)} - pH_{L(a+jp)}\right).$$

# Une réécriture de $\Phi_{\mathbf{L},p}$ modulo $p\mathbb{Z}_p$

$$pH_{L(a+jp)} \equiv H_{Lj} + \sum_{i=1}^{\lfloor La/p \rfloor} \frac{1}{Lj+i} \mod p\mathbb{Z}_p.$$

**Résultat impliqué par $\Delta_{e,f} \geq 1$ sur $[1/M_{e,f}, 1[$**

$\forall L \in \{1, \ldots, M_{(\mathbf{e},\mathbf{f})}\}$, $\forall a \in \{0, \ldots, p-1\}$, $\forall j \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathcal{Q}(a+jp) \sum_{i=1}^{\lfloor La/p \rfloor} \frac{1}{Lj+i} \in p\mathbb{Z}_p.$$

$$\begin{aligned}\Phi_{L,p}(a+Kp) &\equiv \sum_{j=0}^{K} \mathcal{Q}(K-j)\mathcal{Q}(a+jp)(H_{L(K-j)} - H_{Lj}) \mod p\mathbb{Z}_p \\ &\equiv \sum_{j=0}^{K} H_{Lj}\big(\mathcal{Q}(a+jp)\mathcal{Q}(K-j) - \mathcal{Q}(j)\mathcal{Q}(a+(K-j)p)\big) \mod p\mathbb{Z}_p.\end{aligned}$$

# Nouvelle reformulation du problème

$$S(a,K,s,p,m) := \sum_{j=mp^s}^{(m+1)p^s-1} \left(\mathcal{Q}(a+jp)\mathcal{Q}(K-j) - \mathcal{Q}(j)\mathcal{Q}(a+(K-j)p)\right),$$

## Dwork (1973)

Si $p^r > K$,

$$\sum_{j=0}^{K} H_{Lj}\left(\mathcal{Q}(a+jp)\mathcal{Q}(K-j) - \mathcal{Q}(j)\mathcal{Q}(a+(K-j)p)\right)$$

$$= \sum_{s=0}^{r} \sum_{m=0}^{p^{r+1-s}-1} W_L(a,K,s,p,m),$$

où $W_L(a,K,s,p,m) := (H_{Lmp^s} - H_{L\lfloor m/p\rfloor p^{s+1}})S(a,K,s,p,m)$.

# Nouvelle reformulation du problème

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mu_p(m) := \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbf{1}_{[1/M_{e,f},1[}\big(\{m/p^\ell\}\big) \quad \text{et} \quad g_p(m) := p^{\mu_p(m)},$$

où $\mathbf{1}_{[1/M_{e,f},1[}$ est la fonction caractéristique de $[1/M_{e,f}, 1[$.
On montre alors que

$$S(a, K, s, p, m) \in p^{s+1} g_p(m)\mathbb{Z}_p$$

et

$$p^{s+1} g_p(m)(H_{Lmp^s} - H_{L\lfloor m/p \rfloor p^{s+1}}) \in p\mathbb{Z}_p.$$

Ce qui donne bien

$$W_L(a, K, s, p, m) := (H_{Lmp^s} - H_{L\lfloor m/p \rfloor p^{s+1}}) S(a, K, s, p, m) \in p\mathbb{Z}_p.$$

Soit $p$ un nombre premier. Soit, $\forall r \in \mathbb{N}$, $\mathbf{A}_r : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\mathbf{g}_r : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ t.q., $\forall r \geq 0$, on ait
$(i)$ $|\mathbf{A}_r(0)|_p = 1$ ;
$(ii)$ $\forall m \in \mathbb{N}$, on a $\mathbf{A}_r(m) \in \mathbf{g}_r(m)\mathbb{Z}_p$ ;
et telles que $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tel que
$(iii)$ $\forall m \in \mathbb{N}$, $\forall r \geq 0$,
si $v_p(m) \geq k_0$ alors, $\forall v, u, s \in \mathbb{N}$ t.q. $v < p$, $u < p^s$, on a

$$\frac{\mathbf{A}_r(v + up + mp^{s+1})}{\mathbf{A}_r(v + up)} - \frac{\mathbf{A}_{r+1}(u + mp^s)}{\mathbf{A}_{r+1}(u)} \in p^{s+1+k_0} \frac{\mathbf{g}_{r+s+1}(m)}{\mathbf{g}_r(v + up)} \mathbb{Z}_p;$$

si $v_p(m) \leq k_0 - 1$, alors $\frac{\mathbf{A}_r(mp)}{\mathbf{A}_r(0)} - \frac{\mathbf{A}_{r+1}(m)}{\mathbf{A}_{r+1}(0)} \in p^{v_p(m)+1}\mathbf{g}_{r+1}(m)\mathbb{Z}_p$;
$(iv)$ $\forall k \in \{1, \ldots, k_0\}$, $\forall v \in \{1, \ldots, p-1\}$, $\forall m, r \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbf{g}_r(v + mp^k) \in p^k \mathbf{g}_r(mp^k)\mathbb{Z}_p \text{ et } \mathbf{g}_r(mp^k) \in \mathbf{g}_{r+k}(m)\mathbb{Z}_p.$$

Alors, $\forall a \in \{0, \ldots, p-1\}$, $\forall m, s, r \in \mathbb{N}$, $\forall K \in \mathbb{Z}$, on a

$$\sum_{j=mp^s}^{(m+1)p^s-1} \Big(\mathbf{A}_r(a+p(K-j))\mathbf{A}_{r+1}(j) - \mathbf{A}_{r+1}(K-j)\mathbf{A}_r(a+jp)\Big) \in p^{s+1}\mathbf{g}_{s+r+1}(m)\mathbb{Z}_p,$$

où $\mathbf{A}_r(\ell) = 0$ si $\ell < 0$.

Soit $p$ un nombre premier. Soit, $\forall r \in \mathbb{N}$, $\mathbf{A}_r : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\mathbf{g}_r : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ t.q., $\forall r \geq 0$, on ait

$(i)$ $|\mathbf{A}_r(0)|_p = 1$ ;

$(ii)$ $\forall m \in \mathbb{N}$, on a $\mathbf{A}_r(m) \in \mathbf{g}_r(m)\mathbb{Z}_p$ ;

et telles que $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$(iii)$ $\forall m \in \mathbb{N}$, $\forall r \geq 0$,

si $v_p(m) \geq k_0$ alors, $\forall v, u, s \in \mathbb{N}$ t.q. $v < p$, $u < p^s$, on a

$$\frac{\mathbf{A}_r(v + up + mp^{s+1})}{\mathbf{A}_r(v + up)} - \frac{\mathbf{A}_{r+1}(u + mp^s)}{\mathbf{A}_{r+1}(u)} \in p^{s+1+k_0} \frac{\mathbf{g}_{r+s+1}(m)}{\mathbf{g}_r(v + up)} \mathbb{Z}_p;$$

si $v_p(m) \leq k_0 - 1$, alors $\frac{\mathbf{A}_r(mp)}{\mathbf{A}_r(0)} - \frac{\mathbf{A}_{r+1}(m)}{\mathbf{A}_{r+1}(0)} \in p^{v_p(m)+1}\mathbf{g}_{r+1}(m)\mathbb{Z}_p$;

$(iv)$ $\forall k \in \{1, \dots, k_0\}$, $\forall v \in \{1, \dots, p-1\}$, $\forall m, r \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbf{g}_r(v + mp^k) \in p^k \mathbf{g}_r(mp^k)\mathbb{Z}_p \text{ et } \mathbf{g}_r(mp^k) \in \mathbf{g}_{r+k}(m)\mathbb{Z}_p.$$

Alors, $\forall a \in \{0, \dots, p-1\}$, $\forall m, s, r \in \mathbb{N}$, $\forall K \in \mathbb{Z}$, on a

$$\sum_{j=mp^s}^{(m+1)p^s-1} \Big(\mathbf{A}_r(a+p(K-j))\mathbf{A}_{r+1}(j) - \mathbf{A}_{r+1}(K-j)\mathbf{A}_r(a+jp)\Big) \in p^{s+1}\mathbf{g}_{s+r+1}(m)\mathbb{Z}_p,$$

où $\mathbf{A}_r(\ell) = 0$ si $\ell < 0$.

# Applications miroir en plusieurs variables

Soit $e := (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_a)$ et $f := (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_b)$ deux suites de vecteurs de $\mathbb{N}^d$.

$$|e| := \textstyle\sum_{i=1}^{a} \mathbf{e}_i,\ |f| := \sum_{i=1}^{b} \mathbf{f}_i \in \mathbb{N}^d,$$

$$\mathcal{Q}_{e,f}(\mathbf{n}) := \frac{(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n})! \cdots (\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{n})!}{(\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{n})! \cdots (\mathbf{f}_b \cdot \mathbf{n})!},\ (\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d),$$

$$F_{e,f}(\mathbf{z}) := \sum_{\mathbf{n} \geq \mathbf{0}} \frac{(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n})! \cdots (\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{n})!}{(\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{n})! \cdots (\mathbf{f}_b \cdot \mathbf{n})!} \mathbf{z}^{\mathbf{n}},$$

$$G_{e,f,k}(\mathbf{z}) := \sum_{\mathbf{n} \geq \mathbf{0}} \frac{(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n})! \cdots (\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{n})!}{(\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{n})! \cdots (\mathbf{f}_b \cdot \mathbf{n})!} \left( \sum_{i=1}^{a} \mathbf{e}_i^{(k)} H_{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n}} - \sum_{j=1}^{b} \mathbf{f}_j^{(k)} H_{\mathbf{f}_j \cdot \mathbf{n}} \right) \mathbf{z}^{\mathbf{n}},$$

$$q_{e,f,k}(\mathbf{z}) := z_k \exp(G_{e,f,k}(\mathbf{z}) / F_{e,f}(\mathbf{z})),\ k \in \{1, \dots, d\},$$

L'inverse pour la composition de l'application $\mathbf{z} \mapsto (q_{e,f,1}(\mathbf{z}), \dots, q_{e,f,d}(\mathbf{z}))$ définit le vecteur $(z_{e,f,1}(\mathbf{q}), \dots, z_{e,f,d}(\mathbf{q}))$ *d'applications miroir.*

# Fonction de Landau en plusieurs variables

Fonction de Landau associée à $e := (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_a)$ et $f := (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_b)$ :

$$\Delta_{e,f}(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^{a} \lfloor \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{x} \rfloor - \sum_{j=1}^{b} \lfloor \mathbf{f}_j \cdot \mathbf{x} \rfloor, \; (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d).$$

On a

$$v_p(\mathcal{Q}_{e,f}(\mathbf{n})) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \Delta_{e,f}\left(\frac{\mathbf{n}}{p^\ell}\right),$$

car

$$v_p(m!) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{m}{p^\ell} \right\rfloor$$

et donc

$$\begin{aligned} v_p(\mathcal{Q}_{e,f}(\mathbf{n})) &= v_p\left(\frac{(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n})! \cdots (\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{n})!}{(\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{n})! \cdots (\mathbf{f}_b \cdot \mathbf{n})!}\right) \\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^{a} \lfloor \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n}/p^\ell \rfloor - \sum_{j=1}^{b} \lfloor \mathbf{f}_j \cdot \mathbf{n}/p^\ell \rfloor \right) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \Delta_{e,f}\left(\frac{\mathbf{n}}{p^\ell}\right). \end{aligned}$$

# Fonction de Landau en plusieurs variables

**Landau (1900), D. (2011)**

($i$) Si, pour tout $\mathbf{x} \in [0,1]^d$, on a $\Delta_{e,f}(\mathbf{x}) \geq 0$, alors, pour tout $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, on a $\mathcal{Q}_{e,f}(\mathbf{n}) \in \mathbb{N}$.

($ii$) S'il existe $\mathbf{x} \in [0,1]^d$ tel que $\Delta_{e,f}(\mathbf{x}) \leq -1$, alors il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers $p$ tels que tous les termes de la famille $\mathcal{Q}_{e,f}$ soient dans l'anneau $\mathbb{Z}_p$ des entiers $p$-adiques.

# Critère pour les applications miroir de plusieurs variables

On note $\mathcal{D}_{e,f}$ l'ensemble des $\mathbf{x} \in [0,1[^d$ tels qu'il existe un élément $\mathbf{d}$ de $e$ ou $f$ tel que $\mathbf{d} \cdot \mathbf{x} \geq 1$.

## D. (2011)

Soit $e$ et $f$ deux suites de vecteurs non nuls de $\mathbb{N}^d$ disjointes telles que $\mathcal{Q}_{e,f}$ soit une famille à termes entiers (ce qui équivaut à $\Delta_{e,f} \geq 0$ sur $[0,1]^d$) et vérifiant $|e| = |f|$. On a alors la dichotomie suivante.

*(i)* Si, pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_{e,f}$, on a $\Delta_{e,f}(\mathbf{x}) \geq 1$, alors, pour tout $k \in \{1, \dots, d\}$, on a $q_{e,f,k}(\mathbf{z}) \in z_k\mathbb{Z}[[\mathbf{z}]]$.

*(ii)* S'il existe $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_{e,f}$ tel que $\Delta_{e,f}(\mathbf{x}) = 0$, alors il existe $k \in \{1, \dots, d\}$ tel qu'il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers $p$ tels que $q_{e,f,k}(\mathbf{z}) \in z_k\mathbb{Z}_p[[\mathbf{z}]]$.

# Applications de type miroir de plusieurs variables

Pour tout $\mathbf{L} \in \mathbb{N}^d$, on définit l'application de *type miroir* $q_{\mathbf{L},e,f}(\mathbf{z}) := \exp(G_{\mathbf{L},e,f}(\mathbf{z})/F_{e,f}(\mathbf{z}))$, où

$$G_{\mathbf{L},e,f}(\mathbf{z}) := \sum_{\mathbf{n}\geq\mathbf{0}} \frac{(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{n})!\cdots(\mathbf{e}_a\cdot\mathbf{n})!}{(\mathbf{f}_1\cdot\mathbf{n})!\cdots(\mathbf{f}_b\cdot\mathbf{n})!} H_{\mathbf{L}\cdot\mathbf{n}}\, \mathbf{z}^{\mathbf{n}},$$

de sorte que

$$z_k^{-1} q_{e,f,k}(\mathbf{z}) = \left(\prod_{i=1}^{a} \left(q_{\mathbf{e}_i,e,f}(\mathbf{z})\right)^{\mathbf{e}_i^{(k)}}\right) \Big/ \left(\prod_{j=1}^{b} \left(q_{\mathbf{f}_j,e,f}(\mathbf{z})\right)^{\mathbf{f}_j^{(k)}}\right).$$

On note $\mathcal{E}_{e,f}$ l'ensemble des $\mathbf{L} \in \mathbb{N}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ tels qu'il existe $\mathbf{d} \in \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_a, \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_b\}$ vérifiant $\mathbf{L} \leq \mathbf{d}$.

# Critère pour les applications de type miroir de plusieurs variables

## D. (2011)

Soit $e$ et $f$ deux suites de vecteurs non nuls de $\mathbb{N}^d$ disjointes telles que $\mathcal{Q}_{e,f}$ soit une famille à termes entiers (ce qui équivaut à $\Delta_{e,f} \geq 0$ sur $[0,1]^d$) et vérifiant $|e| = |f|$. On a alors la dichotomie suivante.

*(i)* Si, pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_{e,f}$, on a $\Delta_{e,f}(\mathbf{x}) \geq 1$, alors, pour tout $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_{e,f}$, on a $q_{\mathbf{L},e,f}(\mathbf{z}) \in \mathbb{Z}[[\mathbf{z}]]$.

*(ii)* S'il existe $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_{e,f}$ tel que $\Delta_{e,f}(\mathbf{x}) = 0$, alors il existe $k \in \{1, \dots, d\}$ tel que, si $\mathbf{L} \in \mathcal{E}_{e,f}$ vérifie $\mathbf{L}^{(k)} \geq 1$, alors il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers $p$ tels que $q_{\mathbf{L},e,f}(\mathbf{z}) \in \mathbb{Z}_p[[\mathbf{z}]]$. De plus, il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers $p$ tels que $q_{e,f,k}(\mathbf{z}) \in z_k\mathbb{Z}_p[[\mathbf{z}]]$.

$$z_k^{-1} q_{e,f,k}(\mathbf{z}) = \left( \prod_{i=1}^{a} \left( q_{\mathbf{e}_i,e,f}(\mathbf{z}) \right)^{\mathbf{e}_i^{(k)}} \right) \Big/ \left( \prod_{j=1}^{b} \left( q_{\mathbf{f}_j,e,f}(\mathbf{z}) \right)^{\mathbf{f}_j^{(k)}} \right).$$

# Spécialisations

$$\theta^4-2^4z(4\theta+1)(4\theta+3)(8\theta^2+8\theta+3)+2^{12}z^2(4\theta+1)(4\theta+3)(4\theta+5)(4\theta+7),$$

où $\theta = z\frac{d}{dz}$.

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{(4n)!}{(n!)^2(2n)!}\sum_{k=0}^{n} 2^{2k}\binom{2(n-k)}{n-k}^2\binom{2k}{k}.$$

Il existe une unique série sans terme constant $G(z)\in\mathbb{C}[[z]]$ telle que $G(z)+\log(z)F(z)$ soit une solution de l'équation différentielle linéairement indépendante de $F$.
On peut alors définir le $q$-paramètre de l'équation

$$q(z) := z\exp(G(z)/F(z)).$$

# Spécialisations

En prenant $e = ((4,4),(2,0),(2,0),(0,2))$ et

$$f = ((2,2),(1,1),(1,1),(1,0),(1,0),(1,0),(1,0),(0,1),(0,1)),$$

on obtient que $|e| = |f|$ et

$$F_{e,f}(z, 2^2 z) = \sum_{k,m\geq 0} \frac{(4k+4m)!}{(2k+2m)!((k+m)!)^2} \cdot \frac{((2k)!)^2}{(k!)^4} \cdot \frac{((2m)!)}{(m!)^2} 2^{2m} z^{k+m}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{k+m=n} \frac{(4n)!}{(2n)!(n!)^2} 2^{2m} \binom{2k}{k}^2 \binom{2m}{m} = F(z).$$

$$\Delta_{e,f}(x,y) = \lfloor 4x+4y \rfloor + 2\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor - \lfloor 2x+2y \rfloor - 2\lfloor x+y \rfloor$$

et $\Delta_{e,f} \geq 1$ sur $\mathcal{D}_{e,f}$.

# Spécialisations

- On montre alors, *via* la méthode de Frobenius, que $G_{e,f,1}(z,4z)+\log(z)F(z)$ est une solution de l'équation.
- Par unicité de $G$, on obtient que $G=G_{e,f,1}(z,4z)$.
- Ainsi

$$q(z)=z\exp\big(G_{e,f,1}(z,4z)/F_{e,f}(z,4z)\big)=q_{e,f,1}(z,4z)\in z\mathbb{Z}[[z]].$$