Réduction de Moser des réseaux à connexion

Eduardo Corel

Georg-August Universität – Göttingen
ecorel@gwdg.de

24 octobre 2011

Systèmes différentiels

Soit un système différentiel formel méromorphe

$$z\frac{dX}{dz} = AX \text{ où } A = \frac{1}{z^p}(A_0 + A_1 z + \cdots) \in M_{n\times n}(K) \qquad (1)$$

avec $K = \mathbb{C}((z))$, $p \geq 0$ et $A_0 \neq 0$ si $p > 0$.

- $p = p(A)$ rang de Poincaré de (1).
- **Transformations de jauge** : $A_{[P]} = P^{-1}AP - P^{-1}\theta P$ où $\theta = z\frac{d}{dz}$.
- Nature de la singularité $z = 0$: "vrai rang de Poincaré"

$$m(A) = \min\{p(A_{[P]}) \mid P \in \mathrm{GL}_n(K)\}$$

  - Régulière : $m(A) = 0$.
  - Irrégulière sinon.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & z^{-N} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a une singularité régulière.

Réduction de Moser d'un système différentiel

J. Moser (1960) : Algorithme de calcul du vrai rang de Poincaré.
Critère effectif de réductibilité de $r = \mathrm{rk} A_0$.

$$\text{Polynôme de Moser } B_A(\lambda) = z^r \det\left(\frac{A_0}{z} + A_1 + \lambda I_n\right)_{|z=0}.$$

Théorème de Moser

Si $p > 0$, $B_A(\lambda) \equiv 0 \iff \exists P \in \mathrm{GL}_n(K) \text{ tq } \mathrm{rk}\left(z^p A_{[P]}\right)_{|z=0} < r.$

- Il s'agit du rang de Poincaré p du système original.
- On peut choisir $P = (P_0 + P_1 z)\mathrm{diag}(1, \ldots, 1, z \ldots, z)$.

Rang de Moser $\mu(A) = p(A) + \frac{1}{n}\mathrm{rk} A_0$.

Réduction de Moser d'un système différentiel

Si $A_0 = \begin{pmatrix} 0_{n-r} & A_{12}^{(0)} \\ 0 & A_{22}^{(0)} \end{pmatrix}$ avec $r = \mathrm{rk} A_0$, alors

$$B_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} A_{11}^{(1)} + \lambda I_{n-r} & A_{12}^{(0)} \\ A_{21}^{(1)} & A_{22}^{(0)} \end{pmatrix}$$

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & z^{-N} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors $B_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv 0.$

- **Opérateur différentiel** : $D : V \simeq K^n \longrightarrow V$ tel que

$$D(fv) = \theta(f)v + fD(v).$$

Systèmes	Connexions
$\theta X = AX$ $A \in \mathrm{M}_n(K)$	base $(e) = (e_1, \ldots, e_n)$ de V $D(e_j) = -\sum_{i=1}^{n} A_{ij} e_i$. Notation : $A = \mathrm{Mat}(D, (e))$.
Transformation de jauge $A_{[P]} = P^{-1}AP - P^{-1}\theta P$	Chgt de base $P = \mathrm{Mat}(id_V, (\varepsilon), (e))$ $A_{[P]} = \mathrm{Mat}(D, (\varepsilon))$
méromorphe si $P \in \mathrm{GL}_n(K)$	(e) et (ε) K-bases de V.

Systèmes	Connexions
$P \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$ *holomorphe* ssi $P_0 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$	(e) et (ε) eng. même $\mathcal{O}$-module Λ $\Lambda = L(e)$ *réseau* de V.
Rang de Poincaré $p = \max_{i,j}(-v(A_{ij}), 0)$	$p(\Lambda) = -v_\Lambda(\Lambda + D(\Lambda))$ où $v_\Lambda(M) = \max\{q \in \mathbb{Z} \,\vert\, M \subset z^q\Lambda\}$
P holomorphe $A_0 \longrightarrow P_0^{-1} A_0 P_0$	$z^p D$ induit $\delta_\Lambda \in \mathrm{End}(\Lambda/z\Lambda)$ *rang de Moser* $\mu(\Lambda) = p(\Lambda) + \frac{\mathrm{rk}\delta_\Lambda}{n}$
$z = 0$ singularité régulière $\exists P \in \mathrm{GL}_n(K), A_{[P]} \in \mathrm{M}_n(\mathcal{O})$	D régulier : $\exists M$ réseau, $D(M) \subset M$ *i.e.* $p(M) = 0$

On pose $D_k = z^k D$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Réseaux

Soit Λ l'ensemble des réseaux de V.

- **Diviseurs élémentaires de M dans Λ** : $k_1 \leqslant \cdots \leqslant k_n$ tq

$$\exists \text{ base } (e) \text{ de } \Lambda : z^K(e) = (z^{k_1} e_1, \ldots, z^{k_n} e_n) \text{ base de } M.$$

- **Base de Smith de Λ pour M** : $\Lambda = L(e)$ et $M = L(z^K(e))$.
- **Distance** $d(\Lambda, M) = k_n - k_1 = -v_\Lambda(M) - v_M(\Lambda)$.

Pour $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ il existe $Q, R \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$ tel que $P = Qz^K R$

$$\begin{tikzcd}
\Lambda \arrow[r, "P"] \arrow[d, "Q"'] & M \\
\Lambda \arrow[r, "z^K"] & M \arrow[u, "R"']
\end{tikzcd}$$

- On peut choisir Q (et R) polynomiales de degré $d(\Lambda, M) - 1$.
- $|p(\Lambda) - p(M)| \leqslant d(\Lambda, M)$.

Réseaux adjacents

Bijection $\Pi : M \longmapsto M/z\Lambda$ entre $[z\Lambda, \Lambda]$ et $\{W \text{ sev de } \Lambda/z\Lambda\}$.

Pour $M \in [z\Lambda, \Lambda]$, on a $p(M) \leqslant p(\Lambda) \iff M/z\Lambda$ stable sous δ_Λ.

Lemme ("Nakayama")

Toute base de Λ dont l'image engendre $M/z\Lambda$ est de Smith pour M.

- $d_\Lambda(M) = \dim(M/z\Lambda)$ (=nb. de div.elt. égaux à 0).

Transformation de jauge de Λ vers M *adjacent* se décompose en

- $P_0 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ (Im P_0 respecte $M/z\Lambda$)
- suivie de $z^K = \begin{pmatrix} I_d & 0 \\ 0 & zI_{n-d} \end{pmatrix}$ où $d = d_\Lambda(M)$.

$$\Lambda \xrightarrow{\quad P_0 \quad} \Lambda \xrightarrow{\quad z^K \quad} M$$

Réseaux adjacents

$$\Lambda \xrightarrow{\quad P_0 \quad} \Lambda : (e) \xrightarrow{\quad z^K \quad} M \text{ avec } z^K = \begin{pmatrix} I_d & 0 \\ 0 & zI_{n-d} \end{pmatrix}.$$

$$\mathrm{Mat}(D,(e)) = A = \tfrac{1}{z^p} \begin{pmatrix} A_{11}^{(0)} & A_{12}^{(0)} \\ A_{21}^{(0)} & A_{22}^{(0)} \end{pmatrix} + \cdots \text{ en blocs } d \times (n-d)$$

$$A_{[z^K]} = \frac{1}{z^{p+1}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_{21}^{(0)} & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{z^p} \begin{pmatrix} A_{11}^{(0)} & 0 \\ A_{21}^{(1)} & A_{22}^{(0)} \end{pmatrix} + \cdots$$

- $p(M) \leqslant p \iff A_0 = \begin{pmatrix} A_{11}^{(0)} & A_{12}^{(0)} \\ 0 & A_{22}^{(0)} \end{pmatrix}$
- Si $p(M) = p$, alors $\mathrm{rk}\,\delta_M = \mathrm{rk} \begin{pmatrix} A_{11}^{(0)} & 0 \\ A_{21}^{(1)} & A_{22}^{(0)} \end{pmatrix}$

Réseaux adjacents

On se restreint au voisinage $[z\Lambda, \Lambda]$, et on définit

- $\kappa(\Lambda) = \Pi^{-1}(\ker \delta_\Lambda) = \{x \in \Lambda \,|\, D_p x \in z\Lambda\}$,
- $\iota(\Lambda) = \Pi^{-1}(\mathrm{Im}\ \delta_\Lambda) = D_p\Lambda + z\Lambda$,
- $T(M) = D_{p-1}M + z\Lambda$,
- (e) de Λ *adaptée à* M si de Smith à la fois pour $\kappa(\Lambda)$ et M.
- $d_\Lambda(M) = \dim(M/z\Lambda)$ (=nb. de div.elt. égaux à 0).

Convention : l'ordre $(e_1, \ldots, e_d, \ldots, e_{n-r}, \ldots, e_n)$, où $d = d_\Lambda(M)$ induit une base du drapeau

$$0 \subset M/z\Lambda \subset \kappa(\Lambda)/z\Lambda \subset \Lambda/z\Lambda.$$

$$\begin{array}{rcccc}
M & (e_1, \ldots\ldots\ldots, e_d, & ze_{d+1}, \ldots, ze_{n-r}, & ze_{n-r+1}, \ldots\ldots, ze_n) \\
\kappa(\Lambda) & (e_1, \ldots\ldots\ldots, e_d, & e_{d+1}, \ldots, e_{n-r}, & ze_{n-r+1}, \ldots\ldots, ze_n) \\
T(M) & (D_{p-1}e_1, \ldots, D_{p-1}e_d, & & D_pe_{n-r+1}, \ldots, D_pe_n, ze) \\
\iota(\Lambda) & & & (D_pe_{n-r+1}, \ldots, D_pe_n, ze)
\end{array}$$

$$\Lambda \xrightarrow{P_0} \Lambda:(e) \xrightarrow{z^K} \kappa(\Lambda)$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0_{n-r} & A_{12}^{(0)} \\ 0 & A_{22}^{(0)} \end{pmatrix} \text{ avec } r = \mathrm{rk} A_0 \iff (e) \text{ adaptée à } \kappa(\Lambda).$$

Alors

- $T(\kappa(\Lambda)) = L(D_{p-1}e_1, \ldots, D_{p-1}e_{n-r}, D_p e_{n-r+1}, \ldots, D_p e_n, ze)$
- $T(\kappa(\Lambda))$ dans $(\overline{e})$ de $\Lambda/z\Lambda$: $\begin{pmatrix} A_{11}^{(1)} & A_{12}^{(0)} \\ A_{21}^{(1)} & A_{22}^{(0)} \end{pmatrix}$
- $\mathrm{rk}\delta_{\kappa(\Lambda)} = \mathrm{rk} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_{21}^{(1)} & A_{22}^{(0)} \end{pmatrix} \leqslant r$

Soit $M(\lambda) = (D_{p-1} + \lambda \mathrm{id}_V)(\kappa(\Lambda)) + z\Lambda$.

Corollaire

Λ est Moser-réductible $\iff$ $M(\lambda) \neq \Lambda$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

En effet, soit $(e_1, \dots, e_{n-r}, ze_{n-r+1}, \dots, ze_n)$ une base de $\kappa(\Lambda)$. Alors

$$\begin{pmatrix} A_{11}^{(1)} + \lambda I_{n-r} & A_{12}^{(0)} \\ A_{21}^{(1)} & A_{22}^{(0)} \end{pmatrix}$$

est l'expression d'une famille génératrice de $M(\lambda)/z\Lambda$ dans $(\overline{e})$.

Soit Λ réseau de V, et $p = p(\Lambda) \geqslant 1$.

Lemme

Soit $M \in [z\Lambda, \kappa(\Lambda)]$ et $T = T(M)$. Alors $z\Lambda \subset \iota(\Lambda) \subset T \subset \Lambda$, et l'on a seulement les deux cas suivants :

i) $p(M) = p - 1$, *auquel cas* $\iota(\Lambda) \subset T \subset M \subset \kappa(\Lambda)$ *et*

$$\mathrm{rk}\delta_M \geqslant d_\Lambda(T) \geqslant \mathrm{rk}\delta_\Lambda,$$

ii) $p(M) = p$, *auquel cas* $\kappa(M) \notin [z\Lambda, \Lambda]$ *et*

$$\mathrm{rk}\delta_M = d_\Lambda(T + M) - d_\Lambda(M) = d_\Lambda(T) - d_\Lambda(M \cap T).$$

Réduction de Moser de réseaux

Démonstration.

$$\delta_\Lambda : \begin{pmatrix} 0_d & 0 & A_{13}^0 \\ 0 & 0_{n-r-d} & A_{23}^0 \\ 0 & 0 & A_{33}^0 \end{pmatrix} \quad T/z\Lambda : \begin{pmatrix} A_{11}^1 & 0 & A_{13}^0 \\ A_{21}^1 & 0_{n-r-d} & A_{23}^0 \\ A_{31}^1 & 0 & A_{33}^0 \end{pmatrix}.$$

$$D_p : \frac{1}{z^p} \begin{pmatrix} 0_d & 0 & 0 \\ A_{21}^1 & 0_{n-r-d} & A_{23}^0 \\ A_{31}^1 & 0 & A_{33}^0 \end{pmatrix} + \frac{1}{z^{p-1}} \begin{pmatrix} A_{11}^1 & 0 & A_{13}^0 \\ A_{21}^2 & A_{22}^1 & A_{23}^1 \\ A_{31}^2 & A_{32}^1 & A_{33}^1 \end{pmatrix} + \cdots$$

Réduction de Moser de réseaux

Démonstration.

$$\delta_\Lambda : \begin{pmatrix} 0_d & 0 & A_{13}^0 \\ 0 & 0_{n-r-d} & 0 \\ 0 & 0 & 0_r \end{pmatrix} \quad T/z\Lambda : \begin{pmatrix} A_{11}^1 & 0 & A_{13}^0 \\ 0 & 0_{n-r-d} & 0 \\ 0 & 0 & 0_r \end{pmatrix}.$$

$$D_p : \frac{1}{z^p} \begin{pmatrix} 0_d & 0 & 0 \\ 0 & 0_{n-r-d} & 0 \\ 0 & 0 & 0_r \end{pmatrix} + \frac{1}{z^{p-1}} \begin{pmatrix} A_{11}^1 & 0 & A_{13}^0 \\ A_{21}^2 & A_{22}^1 & A_{23}^1 \\ A_{31}^2 & A_{32}^1 & A_{33}^1 \end{pmatrix} + \cdots$$

- $p(M) = p - 1$:

$$\mathrm{rk}\delta_M = \mathrm{rk} \begin{pmatrix} A_{11}^1 & 0 & A_{13}^0 \\ A_{21}^2 & A_{22}^1 & A_{23}^1 \\ A_{31}^2 & A_{32}^1 & A_{33}^1 \end{pmatrix} \geqslant d_\Lambda(T) \geqslant \mathrm{rk}\delta_\Lambda$$

Démonstration.

$$\delta_\Lambda : \begin{pmatrix} 0_d & 0 & A^0_{13} \\ 0 & 0_{n-r-d} & A^0_{23} \\ 0 & 0 & A^0_{33} \end{pmatrix} \quad T/z\Lambda : \begin{pmatrix} A^1_{11} & 0 & A^0_{13} \\ A^1_{21} & 0_{n-r-d} & A^0_{23} \\ A^1_{31} & 0 & A^0_{33} \end{pmatrix}.$$

$$D_p : \frac{1}{z^p}\begin{pmatrix} 0_d & 0 & 0 \\ A^1_{21} & 0_{n-r-d} & A^0_{23} \\ A^1_{31} & 0 & A^0_{33} \end{pmatrix} + \frac{1}{z^{p-1}}\begin{pmatrix} A^1_{11} & 0 & A^0_{13} \\ A^2_{21} & A^1_{22} & A^1_{23} \\ A^2_{31} & A^1_{32} & A^1_{33} \end{pmatrix} + \cdots$$

- $p(M) = p$

$$d_\Lambda(T+M) = \mathrm{rk}\begin{pmatrix} A^1_{11} & 0 & A^0_{13} & I_d \\ A^1_{21} & 0_{n-r-d} & A^0_{23} & 0 \\ A^1_{31} & 0 & A^0_{33} & 0 \end{pmatrix} = d_\Lambda(M) + \mathrm{rk}\,\delta_M.$$

Réduction de Moser de réseaux

On définit la suite décroissante de réseaux de $[z\Lambda, \Lambda]$

$$\begin{cases} M_0 = \kappa(\Lambda) \\ \\ M_{k+1} = \kappa(\Lambda) \cap T(M_k) \end{cases}$$

Cette suite imite l'algorithme de Moser (Dietrich, Barkatou. . .)

Théorème

Si Λ est Moser-réductible, alors

- *soit $\exists k > 0$ tel que $p(M_k) = p - 1$,*
- *soit $\mathrm{rk}\delta_{\lim_k M_k} < \mathrm{rk}\delta_\Lambda$*

Dans tous les cas, le rang de Moser décroît dans $[z\Lambda, \Lambda]$.

Corollaire

La jauge de réduction peut être choisie sous la forme $P = P_0 \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, z \ldots, z)$.

Proposition

$(M_k)_{k\geqslant 0}$ *vérifie les propriétés*

i) $\kappa(\Lambda)\cap\iota(\Lambda)\subset M_{k+1}\subset M_k\subset\kappa(\Lambda)$.

ii) $T(M_k)\cap\kappa(\Lambda)=T(M_k)\cap M_k$.

iii) $M_{k+1}=M_k \iff M_k\subset T(M_k)$.

iv) $p(M_k)=p-1 \iff T(M_k)\subset M_k$.

v) *Si* $p(M_k)=p$, *on a*

$$\begin{aligned}\mathrm{rk}\delta_{M_k} &= d_\Lambda(M_k+T(M_k))-d_\Lambda(M_k)\\ &= d_\Lambda(T(M_k))-d_\Lambda(M_{k+1})\\ &= d_\Lambda(\kappa(\Lambda)+T(M_k))-d_\Lambda(\kappa(\Lambda))\end{aligned}$$

vi) $\mu(M_{k+1})\leqslant\mu(M_k)$.

vii) $\mu(M_k)=\mu(\Lambda) \iff \kappa(\Lambda)+T(M_k)=\Lambda$.

Réduction de Moser de réseaux

La suite de Moser de Λ réduit le rang de Moser si c'est possible :

Proposition

S'il existe $M \in [z\Lambda, \kappa(\Lambda)]$ tel que

i) $M \cap T(M) = \kappa(\Lambda) \cap T(M) = M$.

ii) $\kappa(\Lambda) + T(M) = \Lambda$.

iii) $\mu(M) = \mu(\Lambda)$.

alors Λ est Moser-irréductible.

Algorithme : Réseau initial : Λ
Si Λ irréductible : retourner Λ
Sinon construire M_k jusquà ce que

- $p(M_k) = p - 1$ ou
- $M_{k+1} = M_k$

Remplacer Λ par M_k.

Saturation de Gérard-Levelt

En 1973, Gérard et Levelt définissent

$$\begin{cases} F_k^1(\Lambda) = \Lambda + D_k\Lambda \\ F_k^i(\Lambda) = \Lambda + \ldots + D_k^i(\Lambda) = F_k^1(F_k^{i-1}(\Lambda)) \end{cases}$$

Théorème (Gérard-Levelt)

Si $k \geqslant m(D) = \min_M p_M(D)$, alors $F_k^{n-1}(\Lambda)$ est stable sous D_k.

On note $F_k(\Lambda) = F_k^{n-1}(\Lambda) = L(e_1, \ldots, e_n, D_k e_1, \ldots, D_k^{n-1} e_n)$.

Levelt (1995) : procédure "step-"

$$G_k^i(\Lambda) = \{x \in \Lambda \,|\, (D_k)^j x \in \Lambda \text{ pour } 1 \leqslant j \leqslant i\}.$$

Rem : $G_{p-1}^1(\Lambda) = \kappa(\Lambda)$.

Dualité et réseaux

Soit $\Lambda = L(e)$ dans V. Dans V^*, le réseau dual

$$\Lambda^* = \mathrm{Hom}_K(\Lambda, \mathcal{O}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\Lambda, \mathcal{O}) = L(e^*)$$

vérifie $(\Lambda + M)^* = \Lambda^* \cap M^*$.

L'opérateur dual $D^* : V^* \longrightarrow V^*$

- est défini par $D^*(f)(v) = \theta(f(v)) - f(Dv)$
- a pour matrice $\mathrm{Mat}(D^*, (e^*)) = -{}^t\mathrm{Mat}(D, (e))$.

Lemme

Pour M, N tels que $k + v_N(M) \geqslant 0$

$$(M + D_k N)^* = M^* :_k N^* = \{f \in M^* \mid D_k^* f \in N^*\}.$$

Corollaire

Soit Λ dans V.

- $\kappa(\Lambda)^* = \frac{1}{z}\iota(\Lambda^*) = D^*_{p-1}\Lambda^* + \Lambda^* = F^1_{p-1}(\Lambda^*)$.
- $F^i_k(\Lambda)^* = G^i_k(\Lambda^*)$, *(cf. PhD. N. Le Roux).*
- $T(M)^* = z^{-1}\Lambda^* :_{p-1} M^*$,
- *Si (M_i) est la suite de Moser de Λ, alors*

$$(M_1)^* = F^1_{p-1}(\Lambda^*) + (z^{-1}\Lambda^* :_{p-1} F^1_{p-1}(\Lambda^*)).$$

On a donc une quatrième suite de réduction (“Moser+”)

$$\begin{cases} L_0 = \Lambda + D_{p-1}\Lambda = F^1_{p-1}(\Lambda) \\ L_{i+1} = L_0 + (z^{-1}\Lambda :_{p-1} L_i) \end{cases}$$

Optimalité des réseaux

$F_k(\Lambda)$ est le *plus petit réseau* stable sous D_k contenant Λ.

Corollaire

Si $k \geqslant m(D)$, $G_k^{n-1}(\Lambda)$ est le plus grand sous-réseau D_k-stable de Λ.

Si D régulier, l'algorithme de Moser termine avec un réseau $M_\infty \subset \Lambda$ qui est D-stable : donc $M_\infty \subset G_0^{n-1}(\Lambda) = \Lambda_L$ (*réseau de Levelt*).

Corollaire

La complexité de la transformation $\Lambda \longmapsto \Lambda_L$ est inférieure à celle de $\Lambda \longmapsto M_\infty$.

On peut aller de Λ à Λ_L par pas de longueur 1 : $d(G_{p-1}^{k-1}, G_{p-1}^{k}) \leqslant 1$.

Et après ?

- Cadre généralisable :
  - super-réduction (Hilali-Wazner) de systèmes différentiels,
  - autres systèmes d'équations fonctionnelles.
- Géométrie sous-jacente à l'espace des réseaux : immeuble affine de Bruhat-Tits.