

Réduction de Moser des réseaux à connexion

Eduardo Corel

Georg-August Universität – Göttingen
ecorel@gwdg.de

24 octobre 2011

Soit un système différentiel formel méromorphe

$$z \frac{dX}{dz} = AX \text{ où } A = \frac{1}{z^p} (A_0 + A_1 z + \dots) \in M_{n \times n}(K) \quad (1)$$

avec $K = \mathbb{C}((z))$, $p \geq 0$ et $A_0 \neq 0$ si $p > 0$.

- $p = p(A)$ rang de Poincaré de (1).
- **Transformations de jauge** : $A_{[P]} = P^{-1}AP - P^{-1}\theta P$ où $\theta = z \frac{d}{dz}$.
- Nature de la singularité $z = 0$: “vrai rang de Poincaré”

$$m(A) = \min \{ p(A_{[P]}) \mid P \in GL_n(K) \}$$

- Régulière : $m(A) = 0$.
- Irrégulière sinon.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & z^{-N} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a une singularité régulière.

J. Moser (1960) : Algorithme de calcul du vrai rang de Poincaré.
Critère effectif de réductibilité de $r = \text{rk}A_0$.

$$\text{Polynôme de Moser } B_A(\lambda) = z^r \det \left(\frac{A_0}{z} + A_1 + \lambda I_n \right) \Big|_{z=0}.$$

Théorème de Moser

Si $p > 0$, $B_A(\lambda) \equiv 0 \iff \exists P \in \text{GL}_n(K)$ tq $\text{rk}(z^p A_{[P]})|_{z=0} < r$.

- Il s'agit du rang de Poincaré p du système original.
- On peut choisir $P = (P_0 + P_1 z) \text{diag}(1, \dots, 1, z, \dots, z)$.

Rang de Moser $\mu(A) = p(A) + \frac{1}{n} \text{rk}A_0$.

Si $A_0 = \begin{pmatrix} 0_{n-r} & A_{12}^{(0)} \\ 0 & A_{22}^{(0)} \end{pmatrix}$ avec $r = \text{rk}A_0$, alors

$$B_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} A_{11}^{(1)} + \lambda I_{n-r} & A_{12}^{(0)} \\ A_{21}^{(1)} & A_{22}^{(0)} \end{pmatrix}$$

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & z^{-N} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors $B_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv 0$.

- **Opérateur différentiel** : $D : V \simeq K^n \longrightarrow V$ tel que

$$D(fv) = \theta(f)v + fD(v).$$

Systèmes	Connexions
$\theta X = AX$ $A \in M_n(K)$	base $(e) = (e_1, \dots, e_n)$ de V $D(e_j) = -\sum_{i=1}^n A_{ij}e_i$. Notation : $A = \text{Mat}(D, (e))$.
Transformation de jauge $A_{[P]} = P^{-1}AP - P^{-1}\theta P$	Chgt de base $P = \text{Mat}(id_V, (\varepsilon), (e))$ $A_{[P]} = \text{Mat}(D, (\varepsilon))$
<i>méromorphe</i> si $P \in GL_n(K)$	(e) et (ε) K -bases de V .

Systèmes	Connexions
$P \in GL_n(\mathcal{O})$ holomorphe ssi $P_0 \in GL_n(\mathbb{C})$	(e) et (ε) eng. même \mathcal{O} -module Λ $\Lambda = L(e)$ réseau de V .
Rang de Poincaré $\rho = \max_{i,j}(-v(A_{ij}), 0)$	$\rho(\Lambda) = -v_\Lambda(\Lambda + D(\Lambda))$ où $v_\Lambda(M) = \max\{q \in \mathbb{Z} \mid M \subset z^q \Lambda\}$
P holomorphe $A_0 \longrightarrow P_0^{-1} A_0 P_0$	$z^p D$ induit $\delta_\Lambda \in \text{End}(\Lambda/z\Lambda)$ rang de Moser $\mu(\Lambda) = \rho(\Lambda) + \frac{\text{rk} \delta_\Lambda}{n}$
$z = 0$ singularité régulière $\exists P \in GL_n(K), A_{[P]} \in M_n(\mathcal{O})$	D régulier : $\exists M$ réseau, $D(M) \subset M$ i.e. $\rho(M) = 0$

On pose $D_k = z^k D$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Soit Λ l'ensemble des réseaux de V .

- **Diviseurs élémentaires de M dans Λ** : $k_1 \leq \dots \leq k_n$ tq

\exists base (e) de Λ : $z^K(e) = (z^{k_1}e_1, \dots, z^{k_n}e_n)$ base de M .

- **Base de Smith de Λ pour M** : $\Lambda = L(e)$ et $M = L(z^K(e))$.
- **Distance** $d(\Lambda, M) = k_n - k_1 = -v_\Lambda(M) - v_M(\Lambda)$.

Pour $P \in GL_n(K)$ il existe $Q, R \in GL_n(\mathcal{O})$ tel que $P = Qz^K R$

$$\begin{array}{ccc}
 \Lambda & \xrightarrow{P} & M \\
 Q \downarrow & & \uparrow R \\
 \Lambda & \xrightarrow{z^K} & M
 \end{array}$$

- On peut choisir Q (et R) polynomiales de degré $d(\Lambda, M) - 1$.
- $|p(\Lambda) - p(M)| \leq d(\Lambda, M)$.

Bijection $\Pi : M \mapsto M/z\Lambda$ entre $[z\Lambda, \Lambda]$ et $\{W \text{ sev de } \Lambda/z\Lambda\}$.

Pour $M \in [z\Lambda, \Lambda]$, on a $p(M) \leq p(\Lambda) \iff M/z\Lambda$ stable sous δ_Λ .

Lemme ("Nakayama")

Toute base de Λ dont l'image engendre $M/z\Lambda$ est de Smith pour M .

- $d_\Lambda(M) = \dim(M/z\Lambda)$ (=nb. de div.elt. égaux à 0).

Transformation de jauge de Λ vers M adjacent se décompose en

- $P_0 \in GL_n(\mathbb{C})$ (Im P_0 respecte $M/z\Lambda$)
- suivie de $z^K = \begin{pmatrix} I_d & 0 \\ 0 & zI_{n-d} \end{pmatrix}$ où $d = d_\Lambda(M)$.

$$\Lambda \xrightarrow{P_0} \Lambda \xrightarrow{z^K} M$$

$$\Lambda \xrightarrow{P_0} \Lambda : (e) \xrightarrow{z^K} M \text{ avec } z^K = \begin{pmatrix} I_d & 0 \\ 0 & zI_{n-d} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Mat}(D, (e)) = A = \frac{1}{z^p} \begin{pmatrix} A_{11}^{(0)} & A_{12}^{(0)} \\ A_{21}^{(0)} & A_{22}^{(0)} \end{pmatrix} + \dots \text{ en blocs } d \times (n-d)$$

$$A_{[z^K]} = \frac{1}{z^{p+1}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_{21}^{(0)} & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{z^p} \begin{pmatrix} A_{11}^{(0)} & 0 \\ A_{21}^{(1)} & A_{22}^{(0)} \end{pmatrix} + \dots$$

- $p(M) \leq p \iff A_0 = \begin{pmatrix} A_{11}^{(0)} & A_{12}^{(0)} \\ 0 & A_{22}^{(0)} \end{pmatrix}$
- Si $p(M) = p$, alors $\text{rk} \delta_M = \text{rk} \begin{pmatrix} A_{11}^{(0)} & 0 \\ A_{21}^{(1)} & A_{22}^{(0)} \end{pmatrix}$

On se restreint au voisinage $[z\Lambda, \Lambda]$, et on définit

- $\kappa(\Lambda) = \Pi^{-1}(\ker \delta_\Lambda) = \{x \in \Lambda \mid D_p x \in z\Lambda\}$,
- $\iota(\Lambda) = \Pi^{-1}(\text{Im } \delta_\Lambda) = D_p \Lambda + z\Lambda$,
- $T(M) = D_{p-1} M + z\Lambda$,
- (e) de Λ adaptée à M si de Smith à la fois pour $\kappa(\Lambda)$ et M .
- $d_\Lambda(M) = \dim(M/z\Lambda)$ (=nb. de div.elt. égaux à 0).

Convention : l'ordre $(e_1, \dots, e_d, \dots, e_{n-r}, \dots, e_n)$, où $d = d_\Lambda(M)$ induit une base du drapeau

$$0 \subset M/z\Lambda \subset \kappa(\Lambda)/z\Lambda \subset \Lambda/z\Lambda.$$

M	$(e_1, \dots, e_d,$	$ze_{d+1}, \dots, ze_{n-r},$	$ze_{n-r+1}, \dots, ze_n)$
$\kappa(\Lambda)$	$(e_1, \dots, e_d,$	$e_{d+1}, \dots, e_{n-r},$	$ze_{n-r+1}, \dots, ze_n)$
$T(M)$	$(D_{p-1}e_1, \dots, D_{p-1}e_d,$		$D_p e_{n-r+1}, \dots, D_p e_n, ze)$
$\iota(\Lambda)$			$(D_p e_{n-r+1}, \dots, D_p e_n, ze)$

$$\Lambda \xrightarrow{P_0} \Lambda : (e) \xrightarrow{z^K} \kappa(\Lambda)$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0_{n-r} & A_{12}^{(0)} \\ 0 & A_{22}^{(0)} \end{pmatrix} \text{ avec } r = \text{rk} A_0 \iff (e) \text{ adaptée à } \kappa(\Lambda).$$

Alors

- $T(\kappa(\Lambda)) = L(D_{p-1}e_1, \dots, D_{p-1}e_{n-r}, D_p e_{n-r+1}, \dots, D_p e_n, ze)$
- $T(\kappa(\Lambda))$ dans (\bar{e}) de $\Lambda/z\Lambda : \begin{pmatrix} A_{11}^{(1)} & A_{12}^{(0)} \\ A_{21}^{(1)} & A_{22}^{(0)} \end{pmatrix}$
- $\text{rk} \delta_{\kappa(\Lambda)} = \text{rk} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_{21}^{(1)} & A_{22}^{(0)} \end{pmatrix} \leq r$

Soit $M(\lambda) = (D_{p-1} + \lambda \text{id}_V)(\kappa(\Lambda)) + z\Lambda$.

Corollaire

Λ est Moser-réductible $\iff M(\lambda) \neq \Lambda$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

En effet, soit $(e_1, \dots, e_{n-r}, ze_{n-r+1}, \dots, ze_n)$ une base de $\kappa(\Lambda)$.

Alors

$$\begin{pmatrix} A_{11}^{(1)} + \lambda I_{n-r} & A_{12}^{(0)} \\ A_{21}^{(1)} & A_{22}^{(0)} \end{pmatrix}$$

est l'expression d'une famille génératrice de $M(\lambda)/z\Lambda$ dans (\bar{e}) .

Soit Λ réseau de V , et $p = p(\Lambda) \geq 1$.

Lemme

Soit $M \in [z\Lambda, \kappa(\Lambda)]$ et $T = T(M)$. Alors $z\Lambda \subset \iota(\Lambda) \subset T \subset \Lambda$, et l'on a seulement les deux cas suivants :

i) $p(M) = p - 1$, auquel cas $\iota(\Lambda) \subset T \subset M \subset \kappa(\Lambda)$ et

$$\text{rk}\delta_M \geq d_\Lambda(T) \geq \text{rk}\delta_\Lambda,$$

ii) $p(M) = p$, auquel cas $\kappa(M) \notin [z\Lambda, \Lambda]$ et

$$\text{rk}\delta_M = d_\Lambda(T + M) - d_\Lambda(M) = d_\Lambda(T) - d_\Lambda(M \cap T).$$

Démonstration.

$$\delta_\Lambda : \begin{pmatrix} 0_d & 0 & A_{13}^0 \\ 0 & 0_{n-r-d} & A_{23}^0 \\ 0 & 0 & A_{33}^0 \end{pmatrix} T/z\Lambda : \begin{pmatrix} A_{11}^1 & 0 & A_{13}^0 \\ A_{21}^1 & 0_{n-r-d} & A_{23}^0 \\ A_{31}^1 & 0 & A_{33}^0 \end{pmatrix}.$$

$$D_p : \frac{1}{z^p} \begin{pmatrix} 0_d & 0 & 0 \\ A_{21}^1 & 0_{n-r-d} & A_{23}^0 \\ A_{31}^1 & 0 & A_{33}^0 \end{pmatrix} + \frac{1}{z^{p-1}} \begin{pmatrix} A_{11}^1 & 0 & A_{13}^0 \\ A_{21}^2 & A_{22}^1 & A_{23}^1 \\ A_{31}^2 & A_{32}^1 & A_{33}^1 \end{pmatrix} + \dots$$

Démonstration.

$$\delta_\Lambda : \begin{pmatrix} 0_d & 0 & A_{13}^0 \\ 0 & 0_{n-r-d} & 0 \\ 0 & 0 & 0_r \end{pmatrix} \quad T/z\Lambda : \begin{pmatrix} A_{11}^1 & 0 & A_{13}^0 \\ 0 & 0_{n-r-d} & 0 \\ 0 & 0 & 0_r \end{pmatrix}.$$

$$D_p : \frac{1}{z^p} \begin{pmatrix} 0_d & 0 & 0 \\ 0 & 0_{n-r-d} & 0 \\ 0 & 0 & 0_r \end{pmatrix} + \frac{1}{z^{p-1}} \begin{pmatrix} A_{11}^1 & 0 & A_{13}^0 \\ A_{21}^2 & A_{22}^1 & A_{23}^1 \\ A_{31}^2 & A_{32}^1 & A_{33}^1 \end{pmatrix} + \dots$$

- $p(M) = p - 1$:

$$\text{rk} \delta_M = \text{rk} \begin{pmatrix} A_{11}^1 & 0 & A_{13}^0 \\ A_{21}^2 & A_{22}^1 & A_{23}^1 \\ A_{31}^2 & A_{32}^1 & A_{33}^1 \end{pmatrix} \geq d_\Lambda(T) \geq \text{rk} \delta_\Lambda$$

Démonstration.

$$\delta_\Lambda : \begin{pmatrix} 0_d & 0 & A_{13}^0 \\ 0 & 0_{n-r-d} & A_{23}^0 \\ 0 & 0 & A_{33}^0 \end{pmatrix} \quad T/z\Lambda : \begin{pmatrix} A_{11}^1 & 0 & A_{13}^0 \\ A_{21}^1 & 0_{n-r-d} & A_{23}^0 \\ A_{31}^1 & 0 & A_{33}^0 \end{pmatrix}.$$

$$D_p : \frac{1}{z^p} \begin{pmatrix} 0_d & 0 & 0 \\ A_{21}^1 & 0_{n-r-d} & A_{23}^0 \\ A_{31}^1 & 0 & A_{33}^0 \end{pmatrix} + \frac{1}{z^{p-1}} \begin{pmatrix} A_{11}^1 & 0 & A_{13}^0 \\ A_{21}^2 & A_{22}^1 & A_{23}^1 \\ A_{31}^2 & A_{32}^1 & A_{33}^1 \end{pmatrix} + \dots$$

- $p(M) = p$

$$d_\Lambda(T+M) = \text{rk} \begin{pmatrix} A_{11}^1 & 0 & A_{13}^0 & I_d \\ A_{21}^1 & 0_{n-r-d} & A_{23}^0 & 0 \\ A_{31}^1 & 0 & A_{33}^0 & 0 \end{pmatrix} = d_\Lambda(M) + \text{rk} \delta_M.$$

Réduction de Moser de réseaux

On définit la suite décroissante de réseaux de $[z\Lambda, \Lambda]$

$$\begin{cases} M_0 = \kappa(\Lambda) \\ M_{k+1} = \kappa(\Lambda) \cap T(M_k) \end{cases}$$

Cette suite imite l'algorithme de Moser (Dietrich, Barkatou...)

Théorème

Si Λ est Moser-réductible, alors

- *soit $\exists k > 0$ tel que $p(M_k) = p - 1$,*
- *soit $\text{rk} \delta_{\lim_k M_k} < \text{rk} \delta_\Lambda$*

Dans tous les cas, le rang de Moser décroît dans $[z\Lambda, \Lambda]$.

Corollaire

La jauge de réduction peut être choisie sous la forme

$$P = P_0 \text{diag}(1, \dots, 1, z, \dots, z).$$

Proposition

$(M_k)_{k \geq 0}$ vérifie les propriétés

- i) $\kappa(\Lambda) \cap \iota(\Lambda) \subset M_{k+1} \subset M_k \subset \kappa(\Lambda)$.
- ii) $T(M_k) \cap \kappa(\Lambda) = T(M_k) \cap M_k$.
- iii) $M_{k+1} = M_k \iff M_k \subset T(M_k)$.
- iv) $p(M_k) = p - 1 \iff T(M_k) \subset M_k$.
- v) Si $p(M_k) = p$, on a

$$\begin{aligned} \text{rk} \delta_{M_k} &= d_\Lambda(M_k + T(M_k)) - d_\Lambda(M_k) \\ &= d_\Lambda(T(M_k)) - d_\Lambda(M_{k+1}) \\ &= d_\Lambda(\kappa(\Lambda) + T(M_k)) - d_\Lambda(\kappa(\Lambda)) \end{aligned}$$

- vi) $\mu(M_{k+1}) \leq \mu(M_k)$.
- vii) $\mu(M_k) = \mu(\Lambda) \iff \kappa(\Lambda) + T(M_k) = \Lambda$.

La suite de Moser de Λ réduit le rang de Moser si c'est possible :

Proposition

S'il existe $M \in [z\Lambda, \kappa(\Lambda)]$ tel que

- i) $M \cap T(M) = \kappa(\Lambda) \cap T(M) = M.$*
- ii) $\kappa(\Lambda) + T(M) = \Lambda.$*
- iii) $\mu(M) = \mu(\Lambda).$*

alors Λ est Moser-irréductible.

Algorithme : Réseau initial : Λ

Si Λ irréductible : retourner Λ

Sinon construire M_k jusqu'à ce que

- $p(M_k) = p - 1$ ou
- $M_{k+1} = M_k$

Remplacer Λ par M_k .

En 1973, Gérard et Levelt définissent

$$\begin{cases} F_k^1(\Lambda) = \Lambda + D_k \Lambda \\ F_k^i(\Lambda) = \Lambda + \dots + D_k^i(\Lambda) = F_k^1(F_k^{i-1}(\Lambda)) \end{cases}$$

Théorème (Gérard-Levelt)

Si $k \geq m(D) = \min_M \rho_M(D)$, alors $F_k^{n-1}(\Lambda)$ est stable sous D_k .

On note $F_k(\Lambda) = F_k^{n-1}(\Lambda) = L(e_1, \dots, e_n, D_k e_1, \dots, D_k^{n-1} e_n)$.

Levelt (1995) : procédure “step-”

$$G_k^i(\Lambda) = \{x \in \Lambda \mid (D_k)^j x \in \Lambda \text{ pour } 1 \leq j \leq i\}.$$

Rem : $G_{p-1}^1(\Lambda) = \kappa(\Lambda)$.

Soit $\Lambda = L(e)$ dans V . Dans V^* , le réseau dual

$$\Lambda^* = \text{Hom}_K(\Lambda, \mathcal{O}) = \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\Lambda, \mathcal{O}) = L(e^*)$$

vérifie $(\Lambda + M)^* = \Lambda^* \cap M^*$.

L'opérateur dual $D^* : V^* \rightarrow V^*$

- est défini par $D^*(f)(v) = \theta(f(v)) - f(Dv)$
- a pour matrice $\text{Mat}(D^*, (e^*)) = -{}^t\text{Mat}(D, (e))$.

Lemme

Pour M, N tels que $k + v_N(M) \geq 0$

$$(M + D_k N)^* = M^* :_k N^* = \{f \in M^* \mid D_k^* f \in N^*\}.$$

Corollaire

Soit Λ dans V .

- $\kappa(\Lambda)^* = \frac{1}{z}\iota(\Lambda^*) = D_{p-1}^* \Lambda^* + \Lambda^* = F_{p-1}^1(\Lambda^*)$.
- $F_k^i(\Lambda)^* = G_k^i(\Lambda^*)$, (cf. PhD. N. Le Roux).
- $T(M)^* = z^{-1}\Lambda^* :_{p-1} M^*$,
- Si (M_i) est la suite de Moser de Λ , alors

$$(M_1)^* = F_{p-1}^1(\Lambda^*) + (z^{-1}\Lambda^* :_{p-1} F_{p-1}^1(\Lambda^*)).$$

On a donc une quatrième suite de réduction (“Moser+”)

$$\begin{cases} L_0 = \Lambda + D_{p-1}\Lambda = F_{p-1}^1(\Lambda) \\ L_{i+1} = L_0 + (z^{-1}\Lambda :_{p-1} L_i) \end{cases}$$

$F_k(\Lambda)$ est le *plus petit réseau* stable sous D_k contenant Λ .

Corollaire

Si $k \geq m(D)$, $G_k^{n-1}(\Lambda)$ est le *plus grand sous-réseau* D_k -stable de Λ .

Si D régulier, l'algorithme de Moser termine avec un réseau $M_\infty \subset \Lambda$ qui est D -stable : donc $M_\infty \subset G_0^{n-1}(\Lambda) = \Lambda_L$ (réseau de Levelt).

Corollaire

La complexité de la transformation $\Lambda \mapsto \Lambda_L$ est inférieure à celle de $\Lambda \mapsto M_\infty$.

On peut aller de Λ à Λ_L par pas de longueur 1 : $d(G_{p-1}^{k-1}, G_{p-1}^k) \leq 1$.

- Cadre généralisable :
 - super-réduction (Hilali-Wazner) de systèmes différentiels,
 - autres systèmes d'équations fonctionnelles.
- Géométrie sous-jacente à l'espace des réseaux : immeuble affine de Bruhat-Tits.