

Diagonales de fractions rationnelles et équations différentielles auto-adjointes

INRIA

Gilles Christol

Université Pierre et Marie Curie

7 mai 2012

L'équation différentielle *minimale*
d'une
diagonale de fraction rationnelle
est-elle (toujours) auto-adjointe ?

Ce qu'en dit la géométrie.

- 1 Diagonales de fractions rationnelles
 - Définition
 - Diagonales de fractions rationnelles de deux variables
 - Cas des corps finis ou p -adiques
- 2 Cohomologie de de Rham
 - Cas des variétés réelles
 - Cas des variétés complexes
 - Application aux diagonales de fractions rationnelles
- 3 Dualité de Poincaré
 - Cas des variétés réelles
 - Dual d'un D-module
 - Connexion de Gauss-Manin
 - Dualité de Poincaré en famille
- 4 Passage au complémentaire
 - Pôles logarithmiques
 - Résidu de Poincaré
 - Conclusion

Diagonales de fractions rationnelles : définition

Soit K un corps et soit P et Q des polynômes de $K[x_0, \dots, x_n]$.

Si Q est *inversible* dans $K((x_0, \dots, x_n)) = K[[x_0, \dots, x_n]][\frac{1}{x_0 \cdots x_n}]$

et si $\frac{P}{Q}(x_0, \dots, x_n) = \sum_{r_i \leq s_i} a_{s_0 \dots s_n} x_0^{s_0} \cdots x_n^{s_n}$, (les r_i dépendent de $\frac{P}{Q}$)

la série $\text{Diag}\left(\frac{P}{Q}\right)(\lambda) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum a_{s \dots s} \lambda^s \in K((\lambda)) = K[[\lambda]][\frac{1}{\lambda}]$

s'appelle *diagonale de la fraction rationnelle* $\frac{P}{Q}$ (en $n+1$ variables).

- Si $Q = x_0^{r_0} \cdots x_n^{r_n} R$ avec $R(0, \dots, 0) \neq 0$, alors Q est inversible,
- Mais $x_i + x_j$ ($0 \leq i < j \leq n$) n'est pas inversible.

Pour contourner ce problème d'inversibilité, *B. Adamczewski et J. P. Bell* ont introduit une notion de "séries de Laurent" à n variables.

Cas $n = 1$

Théorème

Une fonction f du corps $K((\lambda))$ est algébrique sur le corps $K(\lambda)$ si et seulement si elle est diagonale d'une fraction rationnelle de deux variables.

En "séparant les racines" (opération élémentaire mais algorithmiquement couteuse) on se ramène à la situation suivante

Cas régulier (Furstenberg)

Soit \tilde{Q} un polynôme de $\mathbb{Q}[\lambda, y]$ tel que $\tilde{Q}(0, 0) = 0$ et $\tilde{Q}'_y(0, 0) \neq 0$.

Alors l'équation $\tilde{Q}(\lambda, y) = 0$ admet une unique racine f dans $\lambda \mathbb{Q}[[\lambda]]$ et, pour tout $n \geq 0$, on a

$$f^n(\lambda) = \text{Diag} \frac{y^{n+1} \tilde{Q}'_y(xy, y)}{\tilde{Q}(xy, y)}.$$

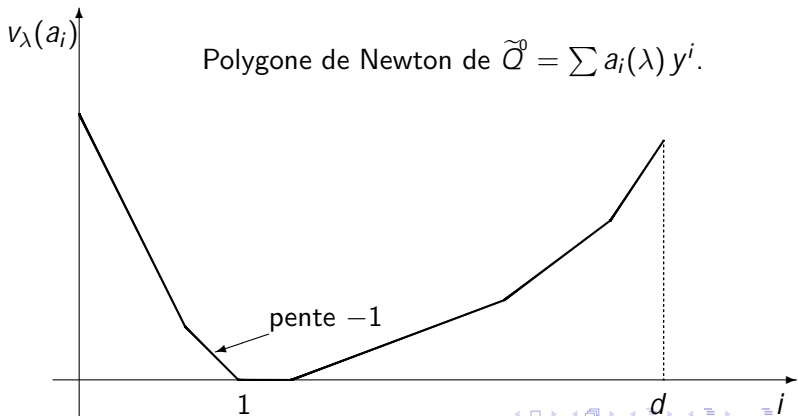
Plus généralement, les diagonales de fonctions algébriques à n variables sont diagonales de fractions rationnelles à $2n$ variables.

Pour Q dans $K[x_0, \dots, x_n][\frac{1}{x_0 \cdots x_n}]$ on définit $\tilde{Q} \in K[\lambda, x_1, \dots, x_n]$ par

$$Q\left(\frac{\lambda}{x_1 \cdots x_n}, x_1, \dots, x_n\right) = \lambda^{r_0} x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n} \tilde{Q}(\lambda, x_1, \dots, x_n)$$

avec $r_i \in \mathbb{Z}$ ($0 \leq i \leq n$), $v_\lambda(\tilde{Q}) = v_{x_i}(\tilde{Q}) = 0$ ($1 \leq i \leq n$).

Q de $K[x, y, \frac{1}{xy}]$ est inversible dans $K((x, y))$ ssi le polygone de Newton λ -adique de \tilde{Q} n'a pas de pente dans l'intervalle $] -1, 0[$.



Théorème

Soit K un corps fini de caractéristique p et f dans $K[[\lambda]]$.

Les conditions suivantes sont équivalentes

- 1 f est algébrique sur le corps $K(\lambda)$,
- 2 f est diagonale d'une fraction rationnelle de $K[[x_0, \dots, x_n]]$ (n quelconque),
- 3 les coefficients de f sont reconnaissables par un automate.

Théorème

On munit $\mathbb{Z}_p[[\lambda]]$ de la valeur absolue $\left| \sum a_s \lambda^s \right| = \sup |a_s|$.

Les ensembles des $f = \sum a_s \lambda^s \in \mathbb{Z}_p[[\lambda]]$

- 1 qui sont algébriques sur le corps $\mathbb{Q}_p(\lambda)$,
- 2 ou qui sont diagonales d'une fraction rationnelle (de $\mathbb{Q}_p[[x_0, \dots, x_n]]$ pour n quelconque),
- 3 ou dont les coefficients a_s sont reconnaissables par un automate,

ont la même adhérence.

Cohomologie de de Rham : variétés réelles

Soit X une variété différentielle réelle localement compacte de *dimension* n .

On note $H_{\text{DR}}^i(X, \mathbb{R})$ la cohomologie du *complexe de de Rham* de X :

$$0 \longrightarrow \Omega^0(X) \xrightarrow{d} \Omega^1(X) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Omega^n(X) \longrightarrow 0 \quad (\text{DR})$$

des formes différentielles C^∞ sur X muni de la différentielle extérieure d .

- (DR) est une résolution du faisceau localement constant \mathbb{R} : $H_{\text{DR}}^i(X, \mathbb{R}) = H^i(X, \mathbb{R})$.
- Si X est compacte, $H_{\text{DR}}^i(X, \mathbb{R})$ est un e.v. de dimension finie.

On a une *dualité* entre la cohomologie et l'*homologie singulière*

$$\begin{array}{ccc} H_i(X) & \times & H_{\text{DR}}^i(X, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ < \mathcal{C} & , & \omega > & \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} & \int_{\mathcal{C}} \omega \end{array}$$

pour $\omega \in \Omega^i(X)$, $d\omega = 0$ et un "cycle" de dimension i de X .

Cohomologie de de Rham : variétés complexes

Soit X une variété analytique complexe de *dimension* n .

$\Omega^m(X) \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ \text{formes différentielles } \textit{holomorphes} \text{ de degré } m \text{ sur } X \right\}$.

La variété réelle correspondante $X_{\mathbb{R}}$ est de dimension $2n$ et on a

$$\Omega^m(X_{\mathbb{R}}) \supset \bigoplus_{p+q=m} \Omega^p(X) \wedge \overline{\Omega^q(X)} \quad (\text{DRC})$$

et cette inclusion est quasiment une égalité.

Les groupes $H_{\text{DR}}^i(X, \mathbb{C}) \stackrel{\text{déf}}{=} H_{\text{DR}}^i(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ peuvent aussi se calculer comme l'*hypercohomologie* $H^i(\Omega^\bullet(X))$ du complexe

$$0 \longrightarrow \Omega^0(X) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^n(X) \longrightarrow 0 .$$

En particulier, si X est une *variété à ne*, on a

$$H_{\text{DR}}^n(X, \mathbb{C}) = \Omega^n(X) / d(\Omega^{n-1}(X)) .$$

Cohomologie de de Rham : variétés kählériennes

Si X est (l'analytifiée d')une sous-variété *algébrique lisse* d'un \mathbb{P}_n , alors c'est une *variété kählérienne* et en particulier elle est symplectique.

La décomposition (DRC) donne alors une *lstration de Hodge* sur $H_{\text{DR}}^m(X, \mathbb{C})$ dont le gradué associé est

$$\bigoplus_{p+q=m} H^q(X, \Omega^p(X))$$

Cohomologie de de Rham : variétés kählériennes

Si X est (l'analytifiée d')une sous-variété *algébrique lisse* d'un \mathbb{P}_n , alors c'est une *variété kählérienne* et en particulier elle est symplectique.

La décomposition (DRC) donne alors une *filtration de Hodge* sur $H_{\text{DR}}^m(X, \mathbb{C})$ dont le gradué associé est

$$\bigoplus_{p+q=m} H^q(X, \Omega^p(X))$$

Par exemple, si X est une courbe projective (lisse), on a :

- $H^0(X, \Omega^1(X)) \sim \{\text{différentielles de première espèce (sans pôle)}\}$,
- $H^1(X, \Omega^0(X)) \sim \{\text{différentielles de seconde espèce (sans résidu)}\} / \{\text{différentielles exactes}\}$

Se ramener à la “dimension centrale”

Soit X une variété analytique compacte de *dimension* n .

Théorème de Lefschetz (facile)

et soit Y une *section hyperplane* de X telle que $X - Y$ soit lisse.

$H_{\text{DR}}^i(X, \mathbb{C}) \rightarrow H_{\text{DR}}^i(Y, \mathbb{C})$ est $\begin{cases} \text{un } \textit{isomorphisme} \text{ pour } & i < n - 1 \\ \text{une } \textit{injection} \text{ pour } & i = n - 1. \end{cases}$

“Etudier” $\int f(x, y, z) dx \wedge dy$ revient (presque) à étudier

$\int f(x, y, ax + by) dx \wedge dy$ pour des coefficients a et b bien choisis ...

Théorème de Lefschetz (difficile)

Pour $r \geq 1$, on a un isomorphisme $H_{\text{DR}}^{n-r}(X, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H_{\text{DR}}^{n+r}(X, \mathbb{C})$

On s'intéressera essentiellement à $H_{\text{DR}}^n(X, \mathbb{C})$... D'ailleurs, c'est la situation pour l'étude des diagonales de fractions rationnelles !

Cohomologie relative

Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme lisse de variétés analytiques complexes .

On note $\Omega^m(X/S)$ les S -formes différentielles de degré m sur X

et on pose $\mathcal{H}_{\text{DR}}^i(X/S) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{R}^i f_* (\Omega^\bullet(X/S))$.

Pour chaque i , $\mathcal{H}_{\text{DR}}^i(X/S)$ est un faisceau sur S qui est muni d'une connexion intégrable appelée *connexion de Gauss-Manin*.

Grossièrement parlant, il s'agit d'une dérivation sous le signe \int :

pour calculer la dérivée $\frac{d}{d\lambda} \left(\int f(\lambda, x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m \right)$

où les x_{m+1}, \dots, x_n sont définis implicitement par $n - m$ relations

$$g_i(\lambda, x_1, \dots, x_n) = 0 ,$$

on décide que les x_1, \dots, x_m ne dépendent pas de λ : $\frac{d}{d\lambda}(x_i) = \frac{d}{d\lambda}(dx_i) = 0$.

Le résultat ne dépend des variables "indépendantes" x_1, \dots, x_m choisies ... qu'à une différentielle exacte près.

Diagonale de fraction rationnelle : formule intégrale

Lorsque $K = \mathbb{C}$, on a $\text{Diag} \left(\frac{P}{Q} \right) (\lambda) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\gamma} \omega$ avec :

- $\gamma = \prod_{i=1}^n \gamma_i$ et $\gamma_i = \text{cercle } \{|x_i| = \varepsilon\}$ orienté positivement.

- $\omega = \frac{P}{Q}(x_0, \dots, x_n) \frac{dx_1}{x_1} \wedge \dots \wedge \frac{dx_n}{x_n} = \frac{\tilde{P}^0}{\tilde{Q}^0}(\lambda, x_1, \dots, x_n) \frac{dx_1}{x_1} \wedge \dots \wedge \frac{dx_n}{x_n}$.

$\omega \in \Omega^n(U \cap V/S)$ avec $\left\{ \begin{array}{l} S : \text{spec } \mathbb{C}(\lambda) \text{ (ou } \{0 < |\lambda| < \varepsilon\}) \\ V : \{x_0 \cdots x_n = \lambda\} \subset \mathbb{A}_S^{n+1} \\ U : \{\tilde{Q}^0(\lambda, x_1, \dots, x_n) \neq 0\} \subset \mathbb{P}_S^n \end{array} \right.$

* γ est un cycle dans V : $x_i \neq 0$ pour $1 \leq i \leq n$ et $x_0 = \frac{\lambda}{x_1 \cdots x_n} \neq 0$,

* Pour $|\lambda|$ petit, c'est un cycle dans U : sur γ , on a $|x_0| = |\lambda| \varepsilon^{-n} \leq \varepsilon$.

* $V = \mathbb{A}_S^n - \bigcup_{1 \leq i \leq n} \{x_i = 0\}$.

De $\frac{dx_0}{x_0} + \dots + \frac{dx_n}{x_n} = \frac{d\lambda}{\lambda} = 0$, on déduit, pour $1 \leq i \leq n$

$$\frac{dx_1}{x_1} \wedge \dots \wedge \frac{dx_n}{x_n} = (-1)^i \frac{dx_0}{x_0} \wedge \dots \wedge \frac{dx_{i-1}}{x_{i-1}} \wedge \frac{dx_{i+1}}{x_{i+1}} \wedge \dots \wedge \frac{dx_n}{x_n}.$$

Deligne propose de noter $\omega = \frac{P}{Q} \frac{dx_0 \cdots dx_n}{d\lambda}$.

Attention

Si on remplace x_0 par x_i , γ_0 et γ_i ont des orientations différentes :
si $x_j = \varepsilon e^{it_j}$, $\lambda = |\lambda| e^{i\tau}$, alors $t_0 + \dots + t_n = \tau$ càd $t_0 = -t_i$.

Quelques dimensions

- $\dim \mathcal{H}_{\text{DR}}^n(V/S) = 1$ (formule de Kunneth sur $V = \prod_{1 \leq i \leq n} \text{spec } \mathbb{C}(\lambda)^*$).

Un représentant de la classe est $\frac{dx_1}{x_1} \wedge \dots \wedge \frac{dx_n}{x_n}$.

- Si le diviseur $D \stackrel{\text{déf}}{=} \{\tilde{Q} = 0\}$ est régulier alors

$$\dim \mathcal{H}_{\text{DR}}^n(U/S) = (d-1) \frac{(d-1)^n - (-1)^n}{d}.$$

- Si le diviseur $\tilde{Q} = 0$ est régulier et en position générale :

$$\tilde{Q} = \sum_{m_1 + \dots + m_n \leq d} a_{m_1 \dots m_n} x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n} \quad \text{avec} \quad a_{0 \dots 0} a_{d \dots 0} \dots a_{0 \dots d} \neq 0$$

alors $\dim \mathcal{H}_{\text{DR}}^n(U \cap V/S) = d^n + n$ [Katz].

Dualité de Poincaré pour les variétés réelles

La cohomologie de de Rham à supports compacts est définie par le complexe

$$0 \longrightarrow \Omega_{(c)}^0(X) \xrightarrow{d} \Omega_{(c)}^1(X) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Omega_{(c)}^n(X) \longrightarrow 0 \quad (\text{DR}(c))$$

des formes différentielles C^∞ sur X *a supports compacts*.

On note $H_{\text{DR}(c)}^i(X, \mathbb{R})$ ses groupes de cohomologie.

Si X est orientable, la “dualité de Poincaré” est donnée par

$$H_{\text{DR}(c)}^{n-i}(X, \mathbb{R}) \times H_{\text{DR}(c)}^i(X, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\langle \omega_1, \omega_2 \rangle \quad \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \int_X \omega_1 \wedge \omega_2$$

C'est un accouplement parfait.

Dual d'un D-module

Soit X une variété analytique complexe de dimension n et soit

\mathcal{D}_X le faisceau des *opérateurs différentiels holomorphes* sur X .

[localement de la forme $\sum a_\alpha D^\alpha = \sum a_{s_1, \dots, s_n}(x_1, \dots, x_n) \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{s_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{s_n}$]

Le *dual* d'un \mathcal{D}_X -module (*holonome*) M , est le \mathcal{D}_X -module (holonome)

$$M \stackrel{\text{déf}}{=} \text{Hom}_{\mathcal{O}_X} \left(\Omega^n(X), \mathbf{R}\text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(M, \mathcal{D}_X) \right) \left(= \text{Hom}_{\mathcal{O}_X} \left(\Omega^n(X), \text{Ext}_{\mathcal{D}_X}^n(M, \mathcal{D}_X) \right) \right).$$

[Il faudrait faire un décalage, mais nous allons négliger cette difficulté technique]

Pratiquement, si $P = \sum a_\alpha D^\alpha$ et si $M = \mathcal{D}_X / \mathcal{D}_X.P$ alors :

$$\mathbf{R}\text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(M, \mathcal{D}_X) = \text{Ext}_{\mathcal{D}_X}^1(M, \mathcal{D}_X) = \mathcal{D}_X / P.\mathcal{D}_X$$

et $M^* = \text{Hom}_{\mathcal{O}_X} \left(\Omega_X^n, \mathcal{D}_X / P.\mathcal{D}_X \right) = \mathcal{D}_X / \mathcal{D}_X.P^*$ avec

$$P^* = \sum (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_\alpha$$

Image directe

Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme de variétés analytiques complexes et soit M un (complexe borné de) $\mathcal{D}(X)$ -module(s). On pose

$$\mathrm{DR}(M) \stackrel{\text{déf}}{=} 0 \rightarrow M \rightarrow \Omega_X^1 \otimes M \rightarrow \cdots \rightarrow \Omega_X^n \otimes M \rightarrow 0$$

Proposition

Il existe des complexes bornés de $\mathcal{D}(S)$ -modules

$$\int_{f_*} M \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{R}f_* \left(\mathcal{D}_{S \leftarrow X} \otimes_{\mathcal{D}_X}^{\mathbb{L}} M \right) \quad \text{et} \quad \int_{f_!} M \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{R}f_! \left(\mathcal{D}_{S \leftarrow X} \otimes_{\mathcal{D}_X}^{\mathbb{L}} M \right)$$

avec $\mathcal{D}_{S \leftarrow X} \stackrel{\text{déf}}{=} f^{-1} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\omega_S, \mathcal{D}_S) \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_S} \omega_X$.

tels que $\mathrm{DR} \left(\int_{f_*} M \right) = \mathbf{R}f_* \mathrm{DR}(M)$

Par exemple, la cohomologie du complexe $\int_{f_*} \mathcal{O}_X$ de $\mathcal{D}(S)$ -modules est exactement donnée par les $\mathcal{H}_{\mathrm{DR}}^i(X/S)$.

Le théorème de l'image directe

On pose désormais $n = \dim X/S = \dim X - \dim S$.

Théorème [Mebkhout]

Il existe un morphisme canonique $\int_{f_*} M^* \rightarrow (\int_{f_!} M)^*$.

Si $X \rightarrow S$ est *propre* $\int_{f_*} M^* \rightarrow (\int_{f_*} M)^*$ est un *isomorphisme*.

Corollaire [dualité de Poincaré en famille]

Si $X \rightarrow S$ est propre on a $\int_{f_*} \mathcal{O}_X = (\int_{f_*} \mathcal{O}_X)^*$

c'est-à-dire $(\mathcal{H}_{\text{DR}}^i(X/S))^* = \mathcal{H}_{\text{DR}}^{2n-i}(X/S)$.

En combinant avec le théorème de Lefschetz difficile, on obtient

$$\left(\mathcal{H}_{\text{DR}}^{n-r}(X/S)\right)^* = \begin{cases} \mathcal{H}_{\text{DR}}^n(X/S) & \text{si } r = 0 \\ \mathcal{H}_{\text{DR}}^{n+r}(X/S) \sim \mathcal{H}_{\text{DR}}^{n-r}(X/S) & \text{si } 0 < |r| \leq n \end{cases}$$

Les équations différentielles $\mathcal{H}_{\text{DR}}^i(X/S)$ sont donc auto-adjointes...

Pôles logarithmiques

Soit V une variété complexe et soit $X \supset V$ une variété compacte telle que $D = X - V = \bigcup_{i=1}^m D_i$ soit un *diviseur à croisements normaux*.

D'après Hironaka, on peut toujours se ramener à cette situation.

On note $\Omega(X)^m \langle D \rangle$ les f.d. sur X à pôle logarithmique le long de D c'est-à-dire localement (en $P \in D$) de la forme $\omega \wedge \frac{dQ_{i_1}}{Q_{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{dQ_{i_h}}{Q_{i_h}}$ avec $\omega \in \Omega^{m-h}(X)$ et $D_{i_j} = \{Q_{i_j} = 0\}$ se "croisant" en P .

On obtient ainsi une filtration de $\Omega^m(X) \langle D \rangle$ "par l'ordre du pôle".

On notera $\text{gr}_h(\Omega^m(X) \langle D \rangle)$ le gradué associé.

Les formes différentielles à pôle logarithmique suffisent pour calculer la

cohomologie : $H_{\text{DR}}^m(V, \mathbb{C}) = \mathbf{H}^m(\Omega(V)) = \mathbf{H}^m(\Omega(X) \langle D \rangle)$

Application “résidu de Poincaré”

Elle est définie localement par $\omega \wedge \frac{dQ_{i_1}}{Q_{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{dQ_{i_h}}{Q_{i_h}} \mapsto \omega$.

Elle fournit, pour chaque $0 \leq h \leq m$, des isomorphismes

$$\mathrm{gr}_h(\Omega^m(X)\langle D \rangle) = \bigoplus_{i_1 < \cdots < i_h} \Omega^{m-h}(D_{i_1} \cap \cdots \cap D_{i_h})$$

et se généralise “facilement” au cas relatif : $V = X - D \hookrightarrow X \xrightarrow{f} S$.

Théorème (Deligne-Katz)

$$E_1^{-h, m+h} \stackrel{\text{déf}}{=} \bigoplus_{i_1 < \cdots < i_h} \mathcal{H}_{\mathrm{DR}}^{m-h}(D_{i_1} \cap \cdots \cap D_{i_h}/S) \Rightarrow \mathbb{R}^m f_* (\Omega^\bullet(X/S)\langle D \rangle)$$

où chaque terme est muni de la connexion de Gauss-Manin,
est une *suite spectrale* de \mathcal{O}_S -modules (libres de rang fini) *avec connexion*
et est *degeneree en E_2* .

Ainsi “l'équation différentielle” $L \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{R}^n f_* (\Omega^\bullet(X/S)\langle D \rangle) = \mathcal{H}_{\text{DR}}^n(V/S)$

est munie d'une *filtration par le poids*

c'est-à-dire est décomposée en un produit $L = L_0 \dots L_{-n}$.

Si la suite spectrale était dégénérée en E_1 , le gradué associé serait

$$\bigoplus_{h=-n}^0 \mathcal{H}_{\text{DR}}^{n-h}(D_h/S) \quad , \quad \text{avec} \quad D_h \stackrel{\text{déf}}{=} \bigcup_{i_1 < \dots < i_h} D_{i_1} \cap \dots \cap D_{i_h} \quad .$$

Chacun des termes (L_i) de ce gradué serait donc auto-adjoint.

En fait chaque composant du gradué est un sous-quotient des précédents :

$$\ker \left(\mathcal{H}_{\text{DR}}^{n-h}(D_h/S) \rightarrow \mathcal{H}_{\text{DR}}^{n-h+2}(D_{h-1}/S) \right) \\ / \text{Im} \left(\mathcal{H}_{\text{DR}}^{n-h-2}(D_{h+1}/S) \rightarrow \mathcal{H}_{\text{DR}}^{n-h}(D_h/S) \right)$$

Chacun des termes intervenant dans cette formule est auto-adjoint !

- 1 Si L et M sont auto-adjointes, leur *produit* LM est-il auto-adjoint ?
[C'est vrai si les modules différentiels sont en somme directe]
- 2 Si on a un *complexe de modules différentiels* dont tous les termes sont auto-adjoints, la cohomologie est-elle auto-adjointe ?
[C'est vrai si tous les modules sont semi-simples ce qui doit être le cas d'après le théorème ... de semi-simplicité]
- 3 Est-ce que *l'équation différentielle minimale* de la diagonale d'une fraction rationnelle est l'une des équations données par la géométrie ???
[Le module différentiel $M + M$ est toujours auto-adjoint !!!]