La méthode de Gunnells-Sczech pour les séries multiples

Pierre Charollois
(Institut de Mathématiques de Jussieu, Paris 6)

INRIA Rocquencourt
séminaire algorithms, Lundi 21 mai 2012

Survol

Objectif (t.n., cristallogr., alg. Lie) :

calcul efficace de séries du type

$$S(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, r) = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}}{}' \frac{1}{(am+bn)^{r_1}(cm+dn)^{r_2}}$$

pour $a, b, c, d \in \mathbb{Z},\ r_i \geq 2$ entiers.

• Généralisation : facile en dimension > 2.

• facile avec plus de formes linéaires.

• délicate avec $r_i = 1$ ($\rightsquigarrow$ convergence ?)

• $S(\sigma, r) = \lambda\pi^{r_1+r_2}$ avec $\lambda \in \mathbb{Q}$.

• La complexité du calcul de λ augmente rapidement avec la taille de $|\det(\sigma)|$ (et aussi avec $\max(r_i)$).

• *Solution :* G-S. (2003) utilisent des *relations linéaires* entre les $S(., r)$ pour réduire $|\det(\sigma)|$ jusqu'à 1. Choisir une relation intéressante se ramène à un Pb. de type LLL.

Séries considérées : la dimension 1 est facile, la dimension 2 ...

$$\sum_{m\in\mathbb{Z},m\neq 0}\frac{1}{m^2}=2\frac{\pi^2}{6},$$

$$S_2=\sum_{m,n\in\mathbb{Z},mn\neq 0}\frac{1}{m^2n^4}=(2\frac{\pi^2}{6})(2\frac{\pi^4}{90}),$$

$$S_2'=\sum_{m,n\in\mathbb{Z}}{}'\frac{1}{(m+2n)^2(2m+5n)^4}=?$$

$$\boxed{\text{Changement de variable linéaire}}$$

$$\begin{pmatrix} k \\ \ell \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m+2n \\ 2m+5n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$$

Séries considérées : la dimension 1 est facile, la dimension 2 ...

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}, m\neq 0} \frac{1}{m^2} = 2\frac{\pi^2}{6},$$

$$S_2 = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}, mn\neq 0} \frac{1}{m^2n^4} = (2\frac{\pi^2}{6})(2\frac{\pi^4}{90}),$$

$$S_2' = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}}{}' \frac{1}{(m+2n)^2(2m+5n)^4}$$

$$= \sum_{k,\ell\in\mathbb{Z}, k\ell\neq 0} \frac{1}{(k)^2(\ell)^4}$$

$$\boxed{\text{Changement de variable linéaire}}$$

$$\begin{pmatrix} k \\ \ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m+2n \\ 2m+5n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$$

de déterminant 1 $\qquad \Longrightarrow \qquad S_2' = S_2.$

(*cas unimodulaire*)

Premier cas délicat :

$$S_{1000} = \sum_{m,n}{}' \frac{1}{(9m+7n)^2(-49m+73n)^2}$$

$$\begin{pmatrix} k \\ \ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9m+7n \\ -49m+73n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ -49 & 73 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$$

de déterminant 1000 $\rightsquigarrow$

$$\begin{pmatrix} k \\ \ell \end{pmatrix} \in L = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ -49 & 73 \end{pmatrix} \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{Z}^2$$

$$S_L := \sum_{k,\ell \in L \subset \mathbb{Z}^2}' \frac{1}{k^2 \ell^2}$$

Fonction caractéristique de $L = \sigma^t \mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{Z}^2$:

$$\sum_{h \in \mathbb{Z}^2/\sigma\mathbb{Z}^2} \exp(2i\pi < \sigma^{-1}h, z >) = \left\{ \begin{array}{cl} \mid \det(\sigma) \mid & \text{si } z \in \sigma^t \mathbb{Z}^2, \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right\}$$

$\Longrightarrow$

$$\sum_{k,\ell \in \sigma^t\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{Z}^2}' \frac{1}{k^2 \ell^2} = \sum_{h \in \mathbb{Z}^2/\sigma\mathbb{Z}^2} \sum_{z \in \mathbb{Z}^2}' \frac{\mathbf{e}^{<\sigma^{-1}h, z>}}{z_1^2 z_2^2}$$

Pour calculer la somme intérieure, il suffit de connaître
pour $v_i \in \mathbb{Q} \cap [0, 1[$,

$$\sum_{z_i \in \mathbb{Z}}' \frac{\mathbf{e}^{v_i z_i}}{z_i^2} = -\frac{(2i\pi)^2}{2!} B_2(v_i),$$

$$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}.$$

Plus généralement, la série de Fourier des *polynômes de Bernoulli* est :

$$\sum_{z_i \in \mathbb{Z}}{}' \frac{\mathbf{e}^{v_i z_i}}{z_i^{r_i}} = -\frac{(2i\pi)^{r_i}}{r_i!} B_{r_i}(v_i),$$

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2},\ B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}, \cdots$$

$$\Longrightarrow$$

$$\boxed{S_L = \sum_{k,\ell \in \sigma^t \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{Z}^2}{}' \frac{1}{k^{r_1} \ell^{r_2}} = \sum_{h \in \mathbb{Z}^2/\sigma\mathbb{Z}^2} \mathbb{B}_r(\sigma^{-1} h),}$$

où la somme comporte $|\det(\sigma)|$ termes de la forme

$$\mathbb{B}_r(v) = \frac{(2i\pi)^{r_1+r_2}}{r_1! r_2!} B_{r_1}(v_1) B_{r_2}(v_2).$$

C'est certes une somme élémentaire, mais trop longue....

Raccourcir la somme :

Principe : introduire un vecteur "court", et utiliser une relation de cocycle.

Exemple : 1000 termes $\rightsquigarrow$ 16+24=40 termes

$$\begin{pmatrix} 9 & -49 \\ 7 & 73 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\det \begin{pmatrix} 9 & -49 & -1 \\ 7 & 73 & 1 \\ (9m+7n) & (-49m+73n) & -m+n \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

$$\frac{1000}{(9m+7n)(-49m+73n)} - \frac{16}{(9m+7n)(-m+n)} + \frac{24}{(-49m+73n)(-m+n)} = 0.$$

$$S^{r=\mathbf{1}}_{1000} - S^{r=\mathbf{1}}_{16} + S^{r=\mathbf{1}}_{24} =$$

$$\sum_{-m+n=0}{}^{'} \frac{1000}{(9m+7n)(-49m+73n)} -$$

$$\sum_{-49m+73n=0}{}^{'} \frac{16}{(9m+7n)(-m+n)} + \sum_{9m+7n=0}{}^{'} \frac{24}{(-49m+73n)(-m+n)}.$$

Les termes du RHS sont de **dimension inférieure** ;Ex :

$$\sum_{-m+n=0}{}^{'} \frac{1000}{(9m+7n)(-49m+73n)} = \sum_{m\in\mathbb{Z}}{}^{'} \frac{1000}{(9m+7m)(-49m+73m)}$$
$$= \frac{1000}{16\cdot 24} \sum_{m}{}^{'} \frac{1}{m^2}.$$

Problème crucial : Trouver un vecteur w judicieux ;

il ne suffit pas d'avoir D'_1 et $D'_2 < D_{init}$,

car on a créée 2 sommes à partir d'une seule.

(Rq : $16, 24 < \sqrt{1000}$)

Proposition 1. *Soit* $D = \mid \det(\sigma_1, \sigma_2) \mid$ *et pour* $i = 1, 2$, $D_i =$ *idem en changeant* σ_i *en* w. *Fait : il existe* $w \in \mathbb{Z}^2$ *non-nul tel que*

$$D_i \leq D^{\frac{d-1}{d}}.$$

Démonstration. C'est le théorème de Minkowski appliqué au convexe symétrique
$\mathcal{C} = \{x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2, \| x \|_\infty \leq D^{-\frac{1}{d}}\}$ de volume 2^d. $\square$

En pratique,

1) *programmation linéaire en nombres entiers*, (algorithme de Barvinok)

OU / ET

2) **appliquer LLL** aux colonnes de σ^{-1}. Le 1$^{\text{er}}$ vecteur de la base LLL-réduite satisfait au moins

$$\| w_0 \|_\infty \leq \| w_0 \|_{L^2} \leq 2^{\frac{d-1}{4}} D^{-\frac{1}{d}}.$$

Et c'est déjà pas si mal.

Complexité en dimension d ?

Entrée : une somme S_D, $dim = d$, $long = D$, (poids $r = \mathbf{1}$.)

Sortie : écriture $S_D = \sum_{1 \leq j \leq M} S_j$ comme somme de S_j unimodulaires. (on néglige les nuisances de dim $<$.)

Alors M **est un polynôme en** $\log D$.

• après 1 itération, on a produit au plus d sommes de longueur $\leq D^{\frac{d-1}{d}}$.

• après t itérations, d^t sommes de longueur $\leq D^{(\frac{d-1}{d})^t}$.

Arrêt quand chacune des sommes a une longueur < 2 : $t \simeq c_d \log \log D \Longrightarrow$ cqfd.

Cas du poids $\neq (1,1)$? Ex : poids $(1,3)$, long$= 2$

$$S_{1.3.0} := \sum{}' \frac{2}{m(m+2n)^3}, \quad \text{choix } w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ m & (m+2n) & (m+2n) & (m+2n) & m+n \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow S_{1.3.0} + aS_{1.2.1} + bS_{0.3.1} = 0.$$

Cas du poids $\neq (1,1)$? Ex : poids $(1,3)$, long$=2$

$$S_{1.3.0} := \sum{}' \frac{2}{m(m+2n)^3}, \quad \text{choix } w=(1,1)^t$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ m & (m+2n) & (m+2n) & (m+2n) & (m+n) \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow \underbrace{S_{1.3.0}}_{\text{initial}} + a \;\; S_{1.2.1} + b \;\; \underbrace{S_{0.3.1}}_{\text{unimod **}} = 0.$$

on continue : il faut traiter

$$S_{1.2.1} = \sum{}' \frac{1}{m(m+2n)^2(m+n)}$$

en augmentant la présence de $w = (1,1)^t$:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ m & (m+2n) & (m+2n) & (m+n) & (m+n) \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow \underbrace{S_{1.2.1}}_{\text{initial}} + a' \;\; S_{1.1.2} + b' \;\; \underbrace{S_{0.2.2}}_{\text{unimod **}} \;\; = 0.$$

On a toute liberté sur le complémentaire $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{Z}^4$.

Finalement on calcule

$$S_{1.1.2} = \sum{}' \frac{1}{m(m+2n)(m+n)^2}$$

en augmentant encore la présence de $w = (1,1)^t$:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ m & (m+2n) & (m+n) & (m+n) & (m+n) \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow \underbrace{S_{1.1.2}}_{\text{initial}} + a'' \underbrace{S_{1.0.3}}_{\text{unimod **}} + b'' \underbrace{S_{0.1.3}}_{\text{unimod **}} = 0.$$

La complexité est, là encore, polynomiale en $\log D$.

Remords tardifs :

• le cas de poids $r = (1, *)$: convergence de la série ? (délicat $\rightsquigarrow$ Sczech ! son grand-oeuvre).

• vrai cas pratique d'application : *calcul de* $\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{p})}(2n)$ (d=2), ou plus généralement $\zeta_K(2n)$ pour K corps de nombres de degré d totalement réel.

La taille de $\det(\sigma)$ dépend de la taille de la solution fondamentale de **l'équation de Pell**

$$x^2 - py^2 = 1.$$

Ex (défavorable !) : $\boxed{K = \mathbb{Q}(\sqrt{991}),}$
$x + y\sqrt{p} = 379516400906811930638014896080 + 12055735790331359447442538767\sqrt{991}$ conduit à

$$\det \simeq 10^{30} \quad \text{pour } \sigma =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 379516400906811930638014896080 \\ 0 & 1194723416821837721241555918097 \end{pmatrix}.$$

• Références :

1) Gunnells-Sczech, "Evaluation of Dedekind sums, Eisenstein cocycle and special values of L-functions", Duke Math J. (2003).

2) +Chinta, LNCS 1838 p. 247-256.

• n'a été implémenté/testé que le cas $d = 2, 3$ et le poids $r = \mathbf{1}$, à ma connaissance, i.e. pour $\zeta_K(2n)$ avec K corps quadratique ou cubique, et $n = 0$.

• Peut-être pas si intéressant de calculer individuellement les $S(\sigma, r)$, mais plutôt *en famille*.

Ex : la famille des $(\zeta_K(-n))_{n\in\mathbb{N}} \rightsquigarrow$ fonction zêta p-adique du corps K.