Lois limites des grandes urnes de Pólya à deux couleurs

Brigitte Chauvin,
UVSQ (LMV) et INRIA Rocquencourt (ALGORITHMS),

Nicolas Pouyanne,
UVSQ (LMV)

Reda Sahnoun,
UVSQ (LMV)

INRIA Rocquencourt
Séminaire ALGORITHMS
5 octobre 2009

Une matrice de remplacement $R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

avec $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$

et hypothèse de balance $a + b = c + d = S$.

L'autre valeur propre : $a - c = d - b = m$.

Le rapport de ces valeurs propres : $\sigma = m/S$.

Base de vecteurs propres de ${}^tR$:

$$v_1 = \frac{S}{b+c}\begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_2 = \frac{S}{b+c}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et sa base duale de formes linéaires propres

$$u_1(x,y) = \frac{x+y}{S} \quad \text{et} \quad u_2(x,y) = \frac{bx - cy}{S}.$$

L'urne discrète

Composition initiale : $U^{DT}(0) = \binom{\alpha}{\beta}$.

Composition après le $n^{\text{ième}}$ tirage : $U^{DT}(n) = \begin{pmatrix} \#\text{ boules noires} \\ \#\text{ boules rouges} \end{pmatrix}$.

1- Petites urnes : si $\sigma \leq 1/2$

- Si l'urne n'est pas triangulaire, TCL gaussien.
- Traiter à part les triangulaires.

2- Grandes urnes : si $\sigma > 1/2$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Asymptotique quand } n \text{ tend vers } +\infty \\ U^{DT}(n) = nv_1 + n^{\sigma} W^{DT} v_2 + o_{\text{fort}}(n^{\sigma}).\end{array}}$$

Loi de W^{DT} ?

Paramétrage des grandes urnes

On prend m, S, b pour paramètres :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S-b & b \\ S-m-b & m+b \end{pmatrix}$$

et on considère les grandes urnes non triangulaires :

$$\begin{cases} m+2 \leq S \leq 2m-1 \\ 1 \leq b \leq S-m-1. \end{cases}$$

Les premières :

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ et sym ;}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \text{ et sym ;}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \text{ et sym, } \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \text{ et sym, } \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} ;$$

etc.

L'urne continue

Des horloges.

Composition initiale : $U^{CT}(0) = \binom{\alpha}{\beta}$.

Composition au temps t : $U^{CT}(t) = \begin{pmatrix} \# \text{ boules noires} \\ \# \text{ boules rouges} \end{pmatrix}$.

Grandes urnes : si $\sigma > 1/2$,

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{asymptotique quand } t \text{ tend vers } +\infty \\ U^{CT}(t) = e^{St}\xi v_1 + e^{mt} W^{CT} v_2 + o_{\text{fort}}(e^{mt}). \end{array}}$$

ξ suit une loi Gamma de paramètre $\frac{\alpha+\beta}{S}$.

Loi de W^{CT} ?

[Martingales, réduction du générateur infinitésimal sur des espaces de polynômes, contrôle des moments.]

Connexion

Dynamique identique : si τ_n est la date où sonne la $n^{\text{ième}}$ horloge,

$$U^{CT}(\tau_n) = U^{DT}(n).$$

NB : les variables aléatoires τ_n et $U^{CT}(\tau_n)$ sont indépendantes.

Dans les asymptotiques,

- on fait u_1 :

$$\xi = \lim_{n \to \infty} n e^{S \tau_n}$$

- puis on fait u_2 :

$$\boxed{W^{CT} = \xi^{\sigma} W^{DT}.}$$

Focus sur W^{CT}.

Dislocation à temps fini

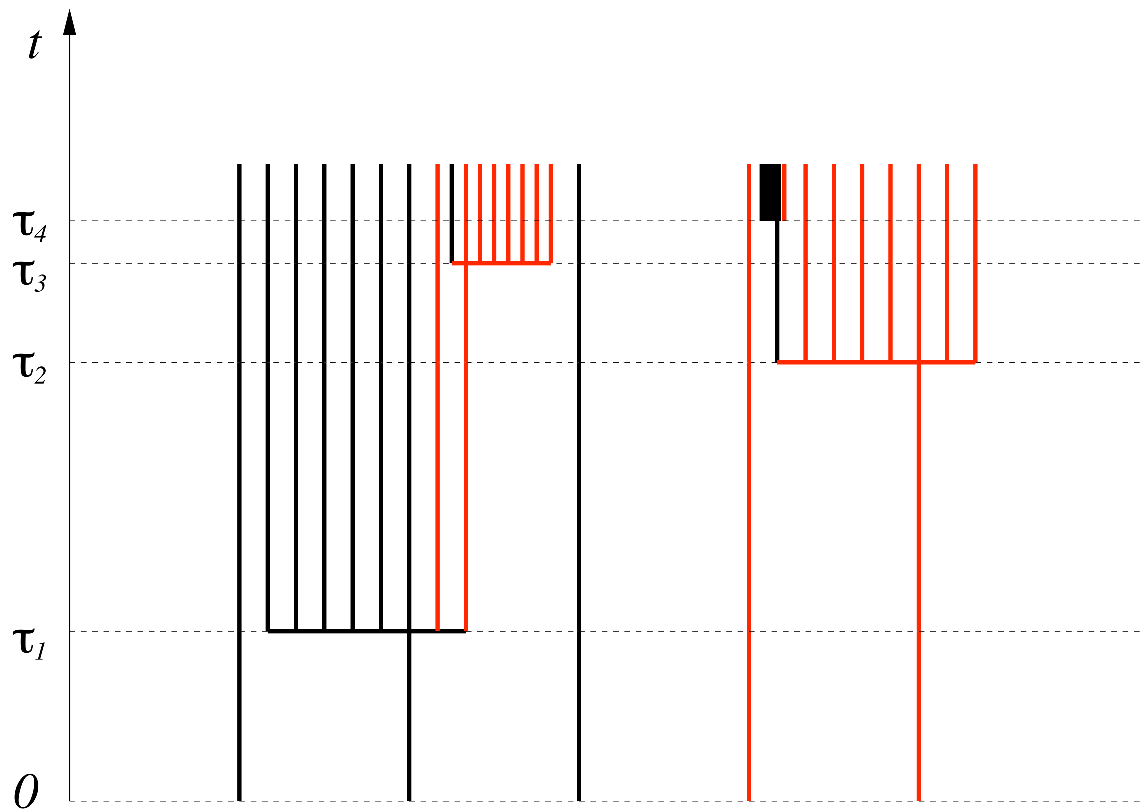
- L'urne continue est un processus de branchement (dessin).
- En particulier, les processus au dessus des différentes particules de même âge sont indépendants : $\forall t$,

$$U^{CT}_{(\alpha,\beta)}(t) = [\alpha]U^{CT}_{(1,0)}(t) + [\beta]U^{CT}_{(0,1)}(t)$$

(notation $[n]X$).

- Dislocation à la première sonnerie : $\forall t > \tau_1$,

$$\left\{ \begin{array}{l} U^{CT}_{(1,0)}(t) \overset{\mathcal{L}}{=} [a+1]U^{CT}_{(1,0)}(t-\tau) + [b]U^{CT}_{(0,1)}(t-\tau) \\ \\ U^{CT}_{(0,1)}(t) \overset{\mathcal{L}}{=} [c]U^{CT}_{(1,0)}(t-\tau) + [d+1]U^{CT}_{(0,1)}(t-\tau). \end{array} \right.$$



Branchement d'une urne à temps continu, $R = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$.

Dislocation limite

On note $X = W^{CT}_{(1,0)}$ et $Y = W^{CT}_{(0,1)}$.

On projette, on passe à la limite et on obtient le système en loi

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} X \overset{\mathcal{L}}{=} e^{-m\tau}\Big([a+1]X + [b]Y\Big) \\ \\ Y \overset{\mathcal{L}}{=} e^{-m\tau}\Big([c]X + [d+1]Y\Big), \end{array}\right.}$$

équations de dislocation à la limite.
En outre, X et Y ont tous leurs moments, avec

$$E(X) = b/S \quad \text{et} \quad E(Y) = -c/S.$$

Système sur les transformées de Fourier

On note $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ les fonctions caractéristiques de X et Y :

$$\mathcal{F}(x) = E\left(e^{ixX}\right) \text{ et } \mathcal{G}(x) = E\left(e^{ixY}\right).$$

Moments : elles sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Les équations de dislocation à la limite se transposent en

$$\boxed{\begin{cases} \mathcal{F}(x) + mx\mathcal{F}'(x) = \mathcal{F}(x)^{a+1}\mathcal{G}(x)^b \\ \\ \mathcal{G}(x) + mx\mathcal{G}'(x) = \mathcal{F}(x)^c\mathcal{G}(x)^{d+1} \end{cases}}$$

avec les conditions au bord en $x = 0$

$$\begin{cases} \mathcal{F}(x) = 1 + i\frac{b}{S}x + O(x^2) \\ \\ \mathcal{G}(x) = 1 - i\frac{c}{S}x + O(x^2). \end{cases}$$

Résolution du système

Avec les précautions nécessaires (choix de déterminations du logarithme), nouvelles fonctions

$$f(w) = w^{-1/S}\mathcal{F}(w^{-m/S}) \quad \text{et} \quad g(w) = w^{-1/S}\mathcal{G}(w^{-m/S}).$$

Ces fonctions sont solutions du système monomial (déjà vu qq part)

$$\boxed{\begin{cases} f' = \frac{-1}{S} f^{a+1} g^{b} \\[2ex] g' = \frac{-1}{S} f^{c} g^{d+1} \end{cases}}$$

avec les conditions au bord en $w = \infty$

$$\begin{cases} f(w) = w^{-\frac{1}{S}} + i\frac{b}{S} w^{-\frac{1+m}{S}} + O\left(|w|^{-\frac{1+2m}{S}}\right) \\[2ex] g(w) = w^{-\frac{1}{S}} - i\frac{c}{S} w^{-\frac{1+m}{S}} + O\left(|w|^{-\frac{1+2m}{S}}\right). \end{cases}$$

Résolution du système monomial

$\frac{1}{g^m} - \frac{1}{f^m} = \frac{1}{K^m}$ est intégrale première (K complexe, déterminé par les conditions aux bords).

On tire g en fonction de f, qui est alors solution de l'équation différentielle

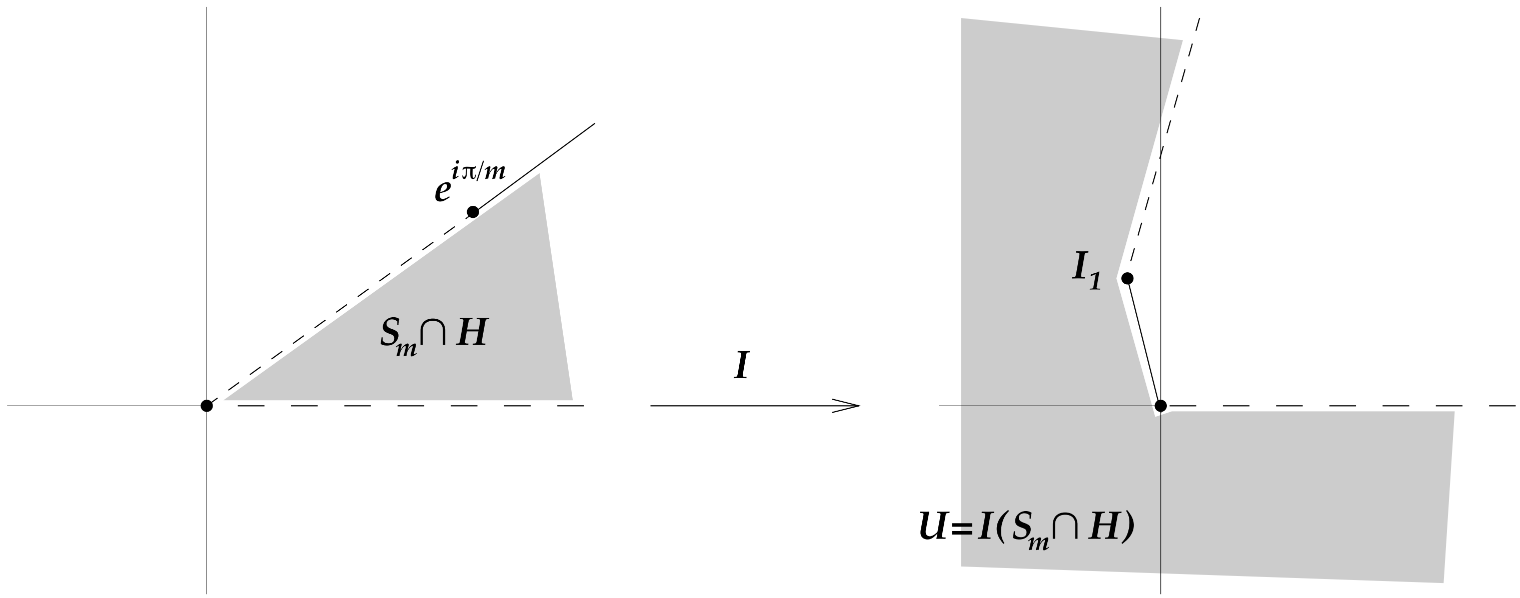
$$\frac{f'}{K} \times \frac{\left(1 + \left(\frac{f}{K}\right)^m\right)^{b/m}}{\left(\frac{f}{K}\right)^{S+1}} = -\frac{K^S}{S}.$$

On définit la fonction $I = I_{m,S,b}$ par

$$\boxed{I(z) = \int_{[z,z\infty)} (1 + u^m)^{\frac{b}{m}} \frac{du}{u^{S+1}}}$$

holomorphe pour z hors des rayons portés par les racines $m^{\text{ièmes}}$ de -1.

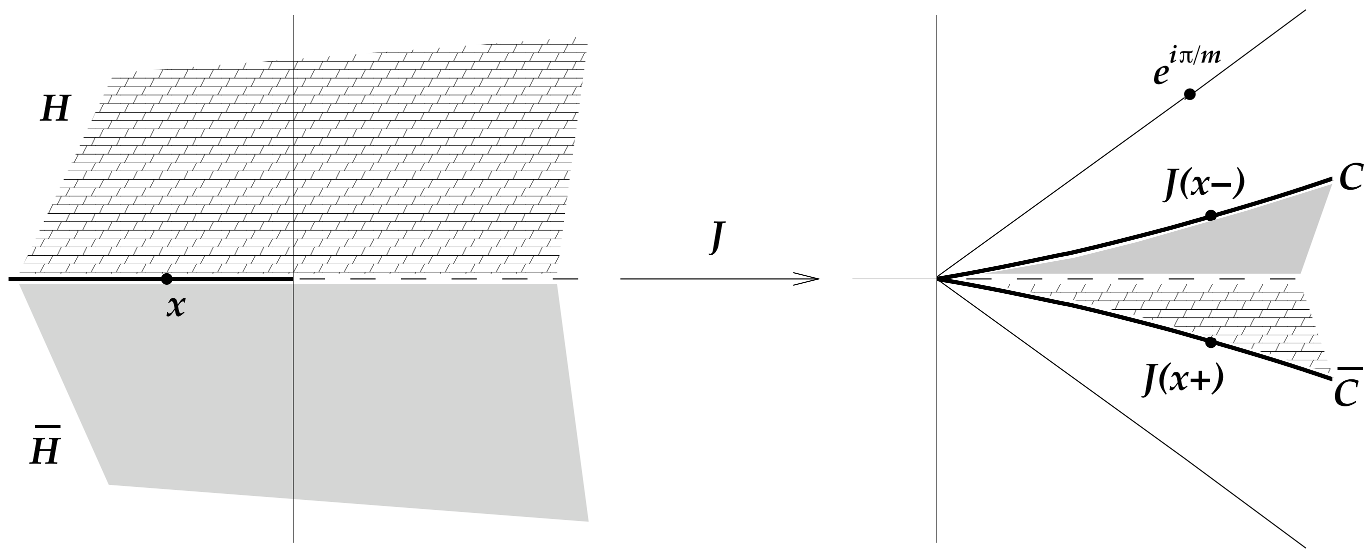
La fonction I



- DSE(∞) : $I(z) = \dfrac{1}{az^a} + \dfrac{b}{m(a+m)}\dfrac{1}{z^{a+m}} + \cdots$
- DSL(0) : $I(z) = \dfrac{1}{Sz^S} + \dfrac{b}{m(S-m)}\dfrac{1}{z^{S-m}} + C_0 + \cdots$
- $C_0 < 0$.

La fonction inverse J

J est un inverse de I défini sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.



• DSP(∞) : $J(z) = \left(\frac{1}{Sz}\right)^{\frac{1}{S}} + \frac{b}{m(S-m)} \left(\frac{1}{Sz}\right)^{\frac{m+1}{S}} + C_0 \left(\frac{1}{Sz}\right)^{\frac{S+1}{S}} + \cdots$

(exposants dans $\frac{1}{S} + \mathbb{N}\sigma + \mathbb{N}$).

Les transformées de Fourier

On note $\kappa = \sqrt[m]{\frac{S}{m(S-m)}}$. On note aussi $\varphi = \varphi_{m,S,b}$ la fonction

$$\boxed{\varphi(z) = \kappa z^{-1/m} J\left(C_0 + \frac{\kappa^S}{S}(z^{-1/m})^S\right).}$$

Domaine d'analycité de φ est $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0] \cup [\rho, +\infty[$ où

$$\rho = \left(\frac{S|C_0|}{\kappa^S}\right)^{-m/S}.$$

Enfin, pour tout réel x,

$$\boxed{\mathcal{F}(x) = \varphi_{m,S,b}(ix) \quad \text{et} \quad \mathcal{G}(x) = \varphi_{m,S,c}(-ix).}$$

Série divergente à l'origine.

Retour aux lois

• Comme $\mathcal{F}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \kappa J(C_0-) x^{-\frac{1}{m}}$, les Fourier ne sont pas L^1.
Mais $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}(x)/x$ le sont : X a une densité

$$p(x) = \frac{1}{2i\pi x} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \mathcal{F}'(t)\, dt.$$

• Le support de W^{CT} égale $\mathbb{R}$
(infini divisibilité, Laplace n'est analytique dans aucun demi-plan).

• Autre vision de la densité à partir de la connexion $W^{CT} = \xi^{\sigma} W^{DT}$:
p est $\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^*)$, monotone sur les demi-droites, tend vers $+\infty$ en 0.
[Comparer aux dessins de la densité de W^{DT} (PF).]

• Plein de questions
(moments, infini divisibilité de W^{DT}, dimension supérieure, etc).