Produits de matrices corrélées et nombres de q-Catalan

Didier Piau

Institut Fourier

Séminaire « Algo » – 12 septembre 2009

Matrice de Wigner

$A_N = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant N}$ matrice aléatoire symétrique réelle avec
- $(a_{i,j})_{i \leqslant j}$ variables aléatoires indépendantes et centrées
- pour $i \neq j$, $\mathbb{E}(a_{i,j}^2) = 1$
- pour tout $p \geqslant 3$, $\mathbb{E}(|a_{i,j}|^p) \leqslant c_p$ avec c_p indépendant de (i,j)

On note $\mu_N = \dfrac{1}{N} \sum_{\lambda} \delta_\lambda$ la mesure spectrale de $\dfrac{1}{\sqrt{N}} A_N$

Loi de Wigner

Quand $N \to \infty$, $\mu_N \to \nu$ loi du demi-cercle, de densité

$$\frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - x^2}\, \mathbf{1}_{\{|x| \leqslant 2\}}$$

Description de la loi de Wigner

Soit X de loi ν, alors $|X| \leqslant 2$ presque sûrement, X symétrique donc moments impairs nuls $\mathbb{E}(X^{2n+1}) = 0$, et moments pairs nombres de Catalan :

$$\mathbb{E}(X^{2n}) = C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Processus de Wigner corrélé

$\mathbb{A}_N = (A_N(n))_n$ avec $A_N(n) = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant N}$ matrice de Wigner de taille $N \times N$ et

– pour chaque $i \leqslant j$, le processus $a_{i,j} = (a_{i,j}(n))_n$ est indépendant des autres

– pour chaque $i \neq j$, le processus $a_{i,j}$ est r-corrélé

$$\mathbb{E}(a_{i,j}(n)^2) = 1, \quad \mathbb{E}(a_{i,j}(n)a_{i,j}(p)) = r^{|n-p|}, \quad |r| \leqslant 1$$

Remarques

– Si $r = 0$, $\mathbb{A}$ suite indépendante

– Si $r = 1$, $\mathbb{A}$ suite constante

– Le processus $\mathbb{A}$ pour $(-r)$ correspond à $((-1)^n A(n))_n$ pour r

– Pour tout r, $A(n+1) = rA(n) + \sqrt{1-r^2}\, A^*(n+1)$ avec une suite indépendante $\mathbb{A}^* = (A^*(n))_n$

Objectif : décrire le comportement de la mesure spectrale $\mu_N^{(n)}$ de la matrice

$$B_N^{(n)} = \frac{1}{N^{n/2}} \prod_{p=1}^{n} A(p)$$

$$B_N^{(n)} = \frac{1}{N^{n/2}} \prod_{p=1}^{n} A(p)$$

Théorème

1) $N \to \infty$: $\mu_N^{(n)}$ *converge faiblement en probabilité vers la loi d'une variable aléatoire* X_n *qui ne dépend pas des lois des* $a_{i,j}(\ )$

2) *Les moments* $M_n^p = \mathbb{E}((X_n)^p)$ *sont décrits par des énumérations pondérées explicites, d'involutions de* $\{1, 2, \ldots, np\}$ *sans point fixe et sans croisement*

3) *Les premiers moments* $M_n = \mathbb{E}(X_n)$ *vérifient* $M_{2n+1} = 0$ *et*

$$M_{2n} = r^n C_n(r^2)$$

avec $C_n(q)$ *q-nombres de Catalan (Carlitz-Riordan)*

Remarques

Si $n \geqslant 2$, $B_N^{(n)}$ n'est pas une matrice symétrique.
Deux entiers n et p : n nombre de matrices dans le produit $B_N^{(n)}$ et p ordre du moment considéré.

Cas particuliers

Si n est impair, la loi de X_n est symétrique.
Si $r \geqslant 0$, $M_{2n}^p \geqslant 0$ pour tout (n, p).
Le support de la loi de X_n est inclus dans le disque complexe de rayon 2^n.
Si $r = 1$, $X_n = (X)^n$. Si $n = 1$, $X_1 = X$. Si $n = 2$, $X_2 = r(X)^2$.

Quelques outils

$[L] = \{1, 2, \ldots, L\}$

$I(L)$: involutions de $[L]$ sans point fixe

$J(L) \subset I(L)$: involutions sans point fixe et sans croisement (sans configuration $i < j < s(i) < s(j)$)

Si L est impair, $I(L) = J(L) = \emptyset$

Diamètre de la permutation s : somme $\delta(s)$ des diamètres des cycles donc, si $s \in I(2L)$, $\delta(s) = \sum_{i<s(i)} s(i) - i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2L} |s(i) - i|$

Chemins de Dyck

$D(2L)$ ensemble des chemins de Dyck $c = (c_i)_{0 \leqslant i \leqslant 2L}$ donc $c_0 = c_{2L} = 0$, $c_i \geqslant 0$, $c_{i+1} = c_i \pm 1$

Montées d'un chemin de Dyck c : indices i tels que $c_i > c_{i-1}$; descentes de c : les autres

Aire d'un chemin de Dyck c : $\alpha(c) = c_0 + c_1 + \cdots + c_{2L}$

Bijection chemins de Dyck/involutions

Application $D(2L) \to J(2L)$, $c \mapsto s$:
Pour tout i descente de c, $s(i)$ est une montée de c, $s(i) =$ plus grand indice $j < i$ tel que $c_{j-1} = c_i$ et $c_j = c_{i-1}$
Alors,

$$\alpha(c) = \delta(s)$$

Moments par énumérations

Premier moment

$$M_n = \sum_{s \in J(n)} r^{\delta(s)} = \sum_{c \in D(n)} r^{\alpha(c)}$$

Mesure spectrale : moments d'ordre supérieur

$$M_n^p = \sum_{s \in J(np)} r^{\delta_n(s)}$$

avec δ_n diamètre modulo n : $\delta_n(s) = \dfrac{1}{2} \sum_i |(s(i))_n - (i)_n|$

où $(i)_n \in [n]$ et $(i)_n = i$ modulo n

Premier moment : preuve

$$\mathbb{E}\int x\mathrm{d}\mu_N^{(n)}(x) = \frac{1}{N}\mathbb{E}(\mathrm{trace}B_N^{(n)})$$

Chaque terme de la trace non normalisée s'écrit

$$\pi(k) = \mathbb{E}(a_{k_0k_1}(1)a_{k_1k_2}(2)\cdots a_{k_{n-1}k_n}(n))$$

pour une suite $k = (k_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ avec $k_0 = k_n$ et $k_i \in [N]$ pour tout i

Chaque variable aléatoire $a_{jj'}(i)$ est centrée donc chaque arête non orientée jj' ou $j'j$ doit apparaître au moins deux fois ou pas du tout sinon $\pi(k) = 0$

Soit $S(k) \subset [N]$ le support de k, $S(k) = \{k_i \,;\, 0 \leqslant i \leqslant n\}$

Au plus $N^{|S(k)|}$ suites ℓ sont conjuguées à k ($\ell_i = \tau(k_i)$ pour tout i et une bijection τ), on les regroupe puisque $\pi(\ell) = \pi(k)$

Premier moment : preuve (suite)

Normalisation par $N^{1+n/2}$ donc tout disparaît quand $N \to \infty$ sauf les (classes des) suites k telles que $|S(k)| \geqslant 1 + (n/2)$

Impossible si n impair !

Possible si n est pair et $|S(k)| = 1 + (n/2)$ donc chaque paire jj' apparaît exactement deux fois, comme (j, j') puis comme (j', j) aux places i et $i' > i$, d'où la contribution $r^{i'-i}$

Chaque classe de conjugaison de cette sorte contribue pour un poids $1 + o(1)$ et contient une unique involution $s \in I(n)$ définie par $s(j) = j'$ pour tout couple (j, j'), $j < j'$ comme ci-dessus.

Premier moment : preuve (fin)

Si $s \in I(n)$ correspond à la suite k, soit $G(k)$ le graphe non orienté de sommets le support $S(k)$ et d'arêtes les paires jj' qui apparaissent dans k. Alors k code une marche sur $G(k)$ qui traverse chaque arête deux fois. Comme $|S(k)| = 1 + (n/2)$, $G(k)$ est sans cycle donc $s \in J(n)$ et k réalise la marche à gauche sur $G(k)$ enraciné en $k_0 = k_n$.

Moments d'ordre supérieur : pseudo-preuve

Pour M_n^p, on regarde $\pi(i) = \mathbb{E}(a_{i_0 i_1}(1) a_{i_1 i_2}(2) \cdots a_{i_{np-1} i_{np}}(np))$
La seule différence est que la contribution

$$\mathbb{E}(a_{jj'}(i) a_{j'j}(i')), \quad i < i',$$

est décrite par $r^{|(i')_n - (i)_n|}$ au lieu de $r^{i'-i}$ et le reste est sans changement.

Pourquoi des nombres de q-Catalan

Récurrence-clé : si $M_0 = 1$, $M_{2n+2} = \sum_{i=0}^{n} r^{2i+1} M_{2i} M_{2n-2i}$

(Preuve) Soit $s \in J(2n+2)$, alors $s(1) = 2i+2$ avec $0 \leqslant i \leqslant n$ (pas de croisements) et s se décompose en trois parties :
– la paire $\{1, 2i+2\}$
– la restriction de s à $[2, 2i+1]$, $s_< \in J(2i)$
– la restriction de s à $[2i+3, 2n+2]$, $s_> \in J(2n-2i)$
Alors,

$$\delta(s) = 2i + 1 + \delta(s_<) + \delta(s_>)$$

(Fin de la preuve)

Puis on compare avec la récurrence des nombres de q-Catalan (transparent suivant)

Nombres de q-Catalan

$$C_0(q) = 1,\ C_{n+1}(q) = \sum_{i=0}^{n} q^i C_i(q) C_{n-i}(q)$$

$$C(q,z) = \sum_{n \geqslant 0} C_n(q) z^n = 1 + zC(q,z)C(q,qz)$$

En notant $[z,w] = z/(1-[w])$ (puis on itère),

$$C(q,z) = [1, z, qz, q^2 z, \ldots, q^n z, \ldots] = \frac{H(q,z)}{H(q,z/q)}$$

avec $H(q,\ )$ fonction q-hypergéométrique (Rogers-Ramanujan)

$$H(q,z) = \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n q^{n^2} \frac{z^n}{(q)_n}, \quad (q)_0 = 1,\ (q)_n = (1-q^n)(q)_{n-1}.$$

Premiers moments/Nombres de q-Catalan : asymptotiques

$(M_{2n})_n$ et $(C_n(q))_n$ suites sous-multiplicatives

Quand $n \to \infty$, $C_n(q)^{1/n} \to \mathfrak{c}(q)$ et$(M_{2n})^{1/n} \to \mathfrak{m}(r) = r\mathfrak{c}(r^2)$ avec $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(r) =$ la plus grande solution de $H(r^2, r/\mathfrak{m}) = 0$, donc

$$\sum_{n \geqslant 0} (-1)^n r^{2n^2-n} \frac{\mathfrak{m}^{-n}}{(r^2)_n} = 0$$

La fonction $r \mapsto \mathfrak{m}(r)$ est continue et strictement croissante sur $0 \leqslant r \leqslant 1$, $\mathfrak{m}(0) = 0$ et $\mathfrak{m}(1) = 4$

Encadrements

$$1+q \leqslant \mathfrak{c}(q) \leqslant c_2(q) < 1/(1-q), \quad c(q) \leqslant 2(1+q),$$

avec $c_2(q)$ unique solution (positive) de $c_2(q)(c_2(q)-1) = q/(1-q)$, donc, pour $r \geqslant 0$,

$$r(1+r^2) \leqslant \mathfrak{m}(r) < rc_2(r^2) < r/(1-r^2), \quad \mathfrak{m}(r) \leqslant 2r(1+r^2)$$

Expression exacte

Soit $q_0(z)$ le plus petit zéro positif de $H(\ ,z) : q \mapsto H(q,z)$, alors

$$1/\mathfrak{c}(q) = q\,(q_0)^{-1}(q)$$

Développement en série de $\mathfrak{c}$ (conjecture)

$$\begin{aligned}\mathfrak{c}(q) \quad &= \quad 1 + q + q^3 - q^4 + 2q^5 - 3q^6 + 6q^7 - 12q^8 + 25q^9 \\ &\qquad -52q^{10} + 111q^{11} - 241q^{12} + O(q^{13})\end{aligned}$$

Jusqu'à l'ordre q^{156},

$$\mathfrak{c}(q) = 1 + q \sum_{i \geqslant 0} (-1)^i \kappa_i q^i, \quad \kappa_i \geqslant 0,$$

avec $(\kappa_i)_{i \geqslant 3}$ croissante, $(\kappa_{i+1}/\kappa_i)_{i \geqslant 5}$ croissante et semblant converger vers une limite finie $\gamma > 2.4$

Donc le rayon de convergence de $\mathfrak{c}(\ )$ serait $1/\gamma < 1$

$$\mathfrak{c}(0) = 1,\ \mathfrak{c}(1) = 4,\ 1 + q \leqslant \mathfrak{c}(q) \leqslant 2(1 + q)$$

Et en dimension 1 ?

Logan-Mazo-Odlyzko-Shepp : toy model + analyse de courbes d'apprentissage pour des systèmes adaptatifs
$(a(n))_n$ Gauss-Markov : processus stationnaire, centré, gaussien, covariance $\mathbb{E}(a(n)a(p)) = r^{|n-p|}$
Polyspectre $\qquad \mathfrak{a}_n = \mathbb{E}(a(1)a(2)\cdots a(n))$

Alors $\mathfrak{a}_{2n+1} = 0$ et

$$\mathfrak{a}_{2n} = \sum_{s\in I(2n)} r^{\delta(s)} = \sum_{c\in D(2n)} r^{\alpha(c)}\,\mathrm{desc}(c)$$

avec desc(c) produit des descentes : $\mathrm{desc}(c) = \prod_{i=1}^{2n-1} c_i\,\mathbf{1}_{c_i<c_{i-1}}$

Preuve basée sur une bijection entre $I(2n)$ et un espace de chemins de Dyck marqués

En dimension 1 (suite)

D'où (Flajolet),

$$1 + \sum_{n \geqslant 1} \mathfrak{a}_{2n} z^n = [1, rz, 2r^3 z, \ldots, nr^{2n-1} z, \ldots]$$

Transition de phase entre $\mathfrak{a}_{2n} \to 0$ et $\mathfrak{a}_{2n} \to \infty$

Proposition : $\mathfrak{a}_{2n}^{1/n} \to \mathfrak{a}(r)$, la fonction $r \mapsto \mathfrak{a}(r)$ est finie, continue et strictement croissante sur $0 \leqslant r < 1$, $\mathfrak{a}(0) = 0$, $\mathfrak{a}(1^-) = \infty$,

$$r/(1 - r^2) \leqslant \mathfrak{a}(r) \leqslant r(1 + r^2)/(1 - r^2)$$

La transition $\mathfrak{a}(r^*) = 1$ est située au rayon d'analyticité de la fraction continue

$$r \mapsto [1, r, 2r^3, \ldots, nr^{2n-1}, \ldots]$$

donc $r^* = 0.563007169\ldots$

Articles

C. Mazza, D. Piau, Products of large correlated symmetric matrices and q-Catalan numbers, Probability Theory and Related Fields

C. Mazza, Simply generated trees, B-series and Wigner processes, Random Structures and Algorithms

Merci de votre attention