Solutions régulières de systèmes différentiels linéaires et régularisation de leurs matrices polynomiales associées

Carole El Bacha
(avec M. Barkatou et T. Cluzeau)

Université de Limoges ; CNRS ; XLIM ; UMR 6172

22 Février 2010

Problème

On considère un système de n équations différentielles linéaires d'ordre ℓ :

$$\mathcal{L}(x,\vartheta)y(x) = A_\ell(x)\vartheta^\ell y(x) + \cdots + A_1(x)\vartheta y(x) + A_0(x)y(x) = 0,$$

où

- $\vartheta = x\dfrac{d}{dx}$ $\left(x^i \dfrac{d^i}{dx^i} = \vartheta(\vartheta-1)\ldots(\vartheta-i+1)\right)$,
- Pour $i = 0,\ldots,\ell$, $A_i(x) \in \mathbb{K}[x]^{n\times n}$ $(\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C})$ de degré $\leq N$.

Problème : calculer une base de l'espace des solutions régulières formelles, *i.e.*, des solutions formelles de la forme $y(x) = x^{\lambda_0} z(x)$ où

- $\lambda_0 \in \bar{\mathbb{K}}$, ($\bar{\mathbb{K}}$ la clôture algébrique de $\mathbb{K}$),
- $z(x) \in \bar{\mathbb{K}}[[x]]^n[\ln(x)]$.

1. État de l'art

2. Cas où $\mathcal{L}(0, \vartheta)$ est régulière

3. Cas où $\mathcal{L}(0, \vartheta)$ est singulière et $A_\ell(x)$ est inversible
   - Changement de variables
   - Opérations élémentaires sur les équations du système

4. Conclusions et Perspectives

État de l'art

- **Cas $n = 1$:**

$$\mathcal{L}(x,\vartheta)y(x) = a_\ell(x)\vartheta^\ell y(x) + \cdots + a_1(x)\vartheta y(x) + a_0(x)y(x) = 0,$$

$y = x^{\lambda_0} z(x)$ solution régulière $\Rightarrow \lambda_0$ racine du polynôme indiciel

$$\mathcal{L}(0,\vartheta) = a_\ell(0)\vartheta^\ell + \cdots + a_1(0)\vartheta + a_0(0).$$

Méthodes classiques : Frobenius (1873), Heffter (1894) et Poole (1936).

État de l'art

- **Cas $\ell = 1$:** $\mathcal{L}(x,\vartheta)y(x) = A_1(x)\vartheta y(x) + A_0(x)y(x) = 0,$

  1. $A_1(x)$ inversible dans $\mathbb{K}(x)^{n\times n}$
     1. Coddington & Levinson (1955),
     2. Barkatou & Pflügel (1998),
        $\longrightarrow$ généralisant la méthode Heffter au cas $\ell = 1$
        $\longrightarrow$ $y = x^{\lambda_0}z(x)$ solution régulière $\Rightarrow$ λ_0 racine du déterminant de

$$\mathcal{L}(0,\vartheta) = A_1(0)\vartheta + A_0(0).$$

  2. $A_1(x)$ non inversible dans $\mathbb{K}(x)^{n\times n}$
     $\longrightarrow$ Faire des réductions sur $\mathcal{L}(x,\vartheta)y(x) = 0$ pour se ramener au premier cas (papier soumis à ISSAC'10).

État de l'art

- **Cas général (n et ℓ arbitraires)** :
  1. Méthode classique : convertir en un système d'ordre 1 de taille $n\,\ell$
     Inconvénient : augmentation de la taille du système $n \to n\ell$.
  2. Méthodes directes :
     1. Jódar et al (1993-94).
     2. Abramov et al (2005) : généralisation de l'algorithme de Heffter en réduisant le problème à la résolution d'un système aux récurrences.
     3. ISSAC'09 : généralisation de la méthode de Poole lorsque $A_\ell(0)$ inversible,
        $\rightarrow$ Calcul des solutions régulières de systèmes homogènes à coefficients constants,
        $\rightarrow$ Calcul des solutions polynomiales en $\ln(x)$ de systèmes non-homogènes à coefficients constants.

Cas où $\mathcal{L}(0,\vartheta)$ est régulière

$$\mathcal{L}\,(x,\vartheta)\,y(x) = A_\ell(x)\vartheta^\ell y(x) + \cdots + A_1(x)\vartheta y(x) + A_0(x)y(x) = 0,$$

où pour $0 \leq i \leq \ell$, $A_i(x) = \sum_{j=0}^{N} A_{i,j}x^j$.

Posons pour $1 \leq j \leq N$, $L_j(\vartheta) = A_{\ell,j}\vartheta^\ell + \cdots + A_{1,j}\vartheta + A_{0,j}$, alors

$$\mathcal{L}\,(x,\vartheta)\,y(x) = \sum_{j=1}^{N} x^j L_j(\vartheta)y(x) + \mathcal{L}(0,\vartheta)y(x) = 0.$$

Approche de Poole : chercher des solutions régulières de la forme

$$y(x) = x^{\lambda_0}\left(U_0 + U_1 x + U_2 x^2 + \cdots\right)$$

où $\lambda_0 \in \bar{\mathbb{K}}$, $U_i \in \bar{\mathbb{K}}[\ln(x)]^n$ et $U_0 \neq 0$.

Cas où $\mathcal{L}(0,\vartheta)$ est régulière

En insérant $y(x)$ dans $\mathcal{L}(x,\vartheta)\,y(x) = 0$, on trouve que :

- $\mathcal{L}(0,\vartheta)(x^{\lambda_0} U_0) = 0 \Rightarrow$
  - λ_0 valeur propre de $\mathcal{L}(0,\vartheta)$ c-à-d $\det(\mathcal{L}(0,\lambda_0)) = 0$
    $\Rightarrow \det(\mathcal{L}(0,\vartheta))$ va jouer le même rôle que le polynôme indiciel dans le cas scalaire,
  - U_0 est donné par
    $$U_0 = \sum_{i=0}^{k-1} v_{k-1-i} \frac{\ln^i(x)}{i!},$$
    où les vecteurs $v_0, \ldots, v_{k-1}$ forment une chaîne de Jordan associée à λ_0.

Cas où $\mathcal{L}(0,\vartheta)$ est régulière

- pour $m \geq 1$,

$$\mathcal{L}(0,\vartheta+\lambda_0+m)U_m = \underbrace{-\sum_{i=0}^{m-1} L_{m-i}(\vartheta+\lambda_0+i)U_i,}_{Q_m(x)}$$

(en posant $L_i(\vartheta) \equiv 0$ pour $i > N$).
Si $U_i \in \bar{\mathbb{K}}[\ln(x)]^n$ pour $i < m \Rightarrow U_m$ doit vérifier un système à coefficients constants dont le second membre est un vecteur de polynômes en $\ln(x)$.

Cas où $\mathcal{L}(0, \vartheta)$ est régulière

Théorème

Tout système non-homogène de la forme

$$L(\vartheta)y = A_\ell \vartheta^\ell y + A_{\ell-1}\vartheta^{\ell-1} y + \cdots + A_0 y = Q(\ln(x)),$$

où pour $i = 0, \ldots, \ell$, $A_i \in \mathbb{K}(\alpha)^{n \times n}$, $\det(L(\vartheta)) \neq 0$ *et* $Q(\ln(x)) \in \mathbb{K}(\alpha)[\ln(x)]^n$ *de degré* d*, admet au moins une solution polynomiale en* $\ln(x)$ *de degré* p *avec*

$$\begin{array}{ccc} d \leq p \leq d + \max\{\kappa_i, i = 1, \ldots, m_g(0)\} & \text{si} & 0 \in \sigma(L(\lambda)), \\ p = d & \text{si} & 0 \notin \sigma(L(\lambda)). \end{array}$$

Cas où $\mathcal{L}(0,\vartheta)$ est régulière

Théorème

Soit

$$\mathcal{L}(x,\vartheta)y(x) = A_\ell(x)\vartheta^\ell y(x) + A_{\ell-1}(x)\vartheta^{\ell-1}y(x) + \cdots + A_0(x)y(x) = 0$$

où pour $i = 0,\ldots,\ell$, $A_i(x) \in \mathbb{K}[x]^{n\times n}$*. Si* $\det(\mathcal{L}(0,\vartheta)) \neq 0$*, alors la dimension de l'espace des solutions régulières formelles est égale à* $\deg(\det(\mathcal{L}(0,\vartheta)))$.

Dans ISSAC'09 :

- l'algorithme BCE qui calcule une base de l'espace des solutions régulières;
- complexité arithmétique : $\mathcal{O}(n^5\ell^3\nu^2 d_{\lambda_0})$ opérations dans $\mathbb{K}$ pour chaque valeur propre λ_0;
- implémentation en Maple et comparaisons expérimentales.

1. État de l'art

2. Cas où $\mathcal{L}(0, \vartheta)$ est régulière

3. Cas où $\mathcal{L}(0, \vartheta)$ est singulière et $A_\ell(x)$ est inversible
   - Changement de variables
   - Opérations élémentaires sur les équations du système

4. Conclusions et Perspectives

Cas où $\mathcal{L}(0,\vartheta)$ est singulière et $A_\ell(x)$ est inversible

$$\mathcal{L}(x,\vartheta)y(x) = A_\ell(x)\vartheta^\ell y(x) + A_{\ell-1}(x)\vartheta^{\ell-1}y(x) + \cdots + A_0(x)y(x) = 0$$

où

- pour $i = 0,\ldots,\ell$, $A_i(x) = \sum_{j=0}^{N} A_{ij}x^j \in \mathbb{K}[x]^{n\times n}$ de degré $\leq N$,
- $A_\ell(x)$ inversible dans $\mathbb{K}(x)^{n\times n}$,
- $\det(\mathcal{L}(0,\vartheta)) \equiv 0$.

L'approche de Poole ne peut plus être appliquée !!

Méthode : trouver un autre système différentiel linéaire $\bar{\mathcal{L}}(x,\vartheta)z = 0$ t.q. $\det(\bar{\mathcal{L}}(0,\vartheta)) \neq 0$, sur lequel on peut appliquer l'algorithme précédent et déduire les solutions régulières de $\mathcal{L}(x,\vartheta)y(x) = 0$.

Méthode connue pour le cas $\ell = 1$

Barkatou & Pflügel (1998): Soit $\mathcal{L}(x, \vartheta)$ d'ordre 1, il existe toujours $S(x), T(x) \in \mathbb{K}(x)^{n \times n}$ inversibles telles que $\bar{\mathcal{L}}(x, \vartheta) = S(x)\mathcal{L}(x, \vartheta)T(x)$ vérifie $\det(\bar{\mathcal{L}}(0, \vartheta)) \neq 0$.

Pour $\ell \geq 2$, ceci n'est plus vrai !!

Contre exemple :

$$\mathcal{L}(x, \vartheta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \vartheta^2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vartheta + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour tout $S(x), T(x) \in \mathbb{K}(x)^{n \times n}$, $\bar{\mathcal{L}}(x, \vartheta) = S(x)\mathcal{L}(x, \vartheta)T(x)$ vérifie $\det(\bar{\mathcal{L}}(0, \vartheta)) \equiv 0$.

Changement de variables

Calculer s'il existe un changement de variables $y = T(x)z$ tel que $\bar{\mathcal{L}}(x,\vartheta) = \mathcal{L}(x,\vartheta)T(x)$ vérifie $\det(\bar{\mathcal{L}}(0,\vartheta)) \neq 0$.

Définition : Soit $L(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]^{n \times n}$ singulière de degré ℓ.

1. Une base polynomiale à droite de $L(\lambda)$ est une base du noyau à droite dont les vecteurs sont dans $\mathbb{K}[\lambda]^n$.
2. Soit $\mathcal{V}$ une base polynomiale à droite et δ la somme des degrés en λ de ses vecteurs. Si δ est minimal parmi toutes les bases polynomiales à droite de $L(\lambda)$ alors $\mathcal{V}$ est dite base minimale à droite (BMD) de $L(\lambda)$.

De la même manière, on définit base minimale à gauche (BMG) de $L(\lambda)$.

Complexité arithmétique : $\mathcal{O}^{\sim}(n^{\omega}\ell)$ opérations dans $\mathbb{K}$.

Exemple sur les bases minimales des matrices polynomiales

Soit $L(\lambda)$ une matrice polynomiale singulière donnée par

$$L(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 1 & \lambda & \lambda^2+\lambda \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \lambda & \lambda \\ \lambda & 1 & \lambda & 2\lambda \end{pmatrix},$$

$\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ deux bases polynomiales à droite de $L(\lambda)$ données par

$$\mathcal{V}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & \lambda \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \mathcal{V}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{V}_2$ est une BMD alors que $\mathcal{V}_1$ ne l'est pas.

Changement de variables

Proposition

Soit $\mathcal{L}(x,\vartheta) \in \mathbb{K}[x][\vartheta]^{n\times n}$ *avec* $\det(\mathcal{L}(0,\vartheta)) \equiv 0$. *S'il existe une matrice* $T(x) \in \mathbb{K}(x)^{n\times n}$ *inversible t.q.* $\tilde{\mathcal{L}}(x,\vartheta) = \mathcal{L}(x,\vartheta)T(x) \in \mathbb{K}[x][\vartheta]^{n\times n}$ *vérifie* $\det(\tilde{\mathcal{L}}(0,\vartheta)) \neq 0$ *alors tous les vecteurs d'une BMD de* $\mathcal{L}(0,\vartheta)$ *sont constants.*

Corollaire

Soit $\mathcal{L}(x,\vartheta) \in \mathbb{K}[x][\vartheta]^{n\times n}$ *avec* $\det(\mathcal{L}(0,\vartheta)) \equiv 0$. *Si une BMD de* $\mathcal{L}(0,\vartheta)$ *contient au moins un vecteur non constant, alors* $\forall T(x) \in \mathbb{K}(x)^{n\times n}$ *inversible,* $\tilde{\mathcal{L}}(x,\vartheta) = \mathcal{L}(x,\vartheta)T(x)$ *verifie* $\det(\tilde{\mathcal{L}}(0,\vartheta)) \equiv 0$.

- On en déduit un algorithme.

Exemple

$$\mathcal{L}(x,\vartheta) = \begin{pmatrix} 1+x^2 & 2 & 1 \\ 0 & 3x & 4x \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \vartheta^2 + \begin{pmatrix} x & x^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & x^2 & 0 \end{pmatrix} \vartheta + \begin{pmatrix} 1+x & 2 & 1 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 2+x & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

où $\mathcal{L}(0,\vartheta) = \begin{pmatrix} \vartheta^2+1 & 2\vartheta^2+2 & \vartheta^2+1 \\ \vartheta & 2\vartheta & \vartheta \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{V} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ une BMD.

1. $T \leftarrow I_3$
2. $\mathcal{V}(.,2) \leftarrow \mathcal{V}(.,2) - \frac{1}{2}\mathcal{V}(.,1) \Rightarrow \mathcal{V}(.,2) = (0, -\frac{1}{2}, 1)^t$
3. $\mathcal{L}(x,\vartheta)(.,1) \leftarrow \mathcal{L}(x,\vartheta)\mathcal{V}(.,1)$

$$\Rightarrow \qquad \mathcal{L}(x,\vartheta)(.,1) = \begin{pmatrix} -2x^2\vartheta^2 - 2x\vartheta - 2x + x^2\vartheta \\ 3x\vartheta^2 + x^2 \\ -2x + x^2\vartheta \end{pmatrix}$$

Exemple

4. $\mathcal{L}(x,\vartheta)(.,1) \leftarrow \mathcal{L}(x,\vartheta)(.,1)x^{-1}$

$$\Rightarrow \qquad \mathcal{L}(x,\vartheta)(.,1) = \begin{pmatrix} -2x\vartheta^2+5x\vartheta-3x-2\vartheta \\ 3\vartheta^2-6\vartheta+3+x \\ -2+x\vartheta-x \end{pmatrix}$$

5. $T(.,1) \leftarrow TV(.,1)x^{-1} \Rightarrow T(.,1) = (-2x^{-1}, x^{-1}, 0)^t$

6. $\mathcal{L}(x,\vartheta)(.,2) \leftarrow \mathcal{L}(x,\vartheta)\mathcal{V}(.,2)$

$$\Rightarrow \qquad \mathcal{L}(x,\vartheta)(.,2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x^2\vartheta \\ \frac{5}{2}x\vartheta^2-\frac{1}{2}x^2 \\ -\frac{1}{2}x^2\vartheta+x\vartheta^2 \end{pmatrix}$$

7. $\mathcal{L}(x,\vartheta)(.,2) \leftarrow \mathcal{L}(x,\vartheta)(.,2)x^{-1}$

$$\Rightarrow \qquad \mathcal{L}(x,\vartheta)(.,2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x(\vartheta-1) \\ \frac{5}{2}\vartheta^2-5\vartheta+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}x \\ \frac{1}{2}(-x+2\vartheta-2)(\vartheta-1) \end{pmatrix}$$

8. $T(.,2) \leftarrow TV(.,2)x^{-1} \Rightarrow T(.,2) = (0, \frac{-1}{2}x^{-1}, x^{-1})^t$

Exemple

$$\mathcal{L}(x,\vartheta) =$$

$$\begin{pmatrix} -2x & 0 & 1 \\ 3 & \frac{5}{2} & 4x \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \vartheta^2 + \begin{pmatrix} 5x-2 & -\frac{1}{2}x & 0 \\ -6 & -5 & 1 \\ x & -2-\frac{1}{2}x & 0 \end{pmatrix} \vartheta + \begin{pmatrix} -3x & \frac{1}{2}x & 1 \\ 3+x & \frac{5}{2}-\frac{1}{2}x & 0 \\ -2-x & 1+\frac{1}{2}x & 2 \end{pmatrix}$$

où $\mathcal{L}(0,\vartheta) = \begin{pmatrix} -2\vartheta & 0 & \vartheta^2+1 \\ 3\vartheta^2-6\vartheta+3 & \frac{5}{2}\vartheta^2-5\vartheta+\frac{5}{2} & \vartheta \\ -2 & (\vartheta-1)^2 & 2 \end{pmatrix}$ vérifie

$\det(\mathcal{L}(0,\vartheta)) \neq 0$ et $T = \begin{pmatrix} -2x^{-1} & 0 & 0 \\ x^{-1} & \frac{-1}{2}x^{-1} & 0 \\ 0 & x^{-1} & 1 \end{pmatrix}$.

Algorithme 1 : Changement de variables

1. $\bar{\mathcal{L}}(x,\vartheta) := \mathcal{L}(x,\vartheta)$ et $T := I_n$;
2. Calculer une BMD V de $\bar{\mathcal{L}}(0,\vartheta)$ et récupérer les vecteurs constants de V dans C ;
3. Tant que $C \neq \emptyset$ faire
   1. $\bar{A}_\ell :=$ coefficient dominant de $\bar{\mathcal{L}}(x,\vartheta)$;
   2. Pour chaque vecteur C_k de C
      1. $J := \{i \in \{1,\ldots,n\}$ t.q. $C_{i,k} \neq 0\}$;
      2. Choisir $i \in J$ t.q $\forall j \in J$ $\deg_x\left(\bar{A}_\ell(.,i)\right) \geq \deg_x\left(\bar{A}_\ell(.,j)\right)$;
      3. Utiliser $C_{i,k}$ comme un pivot pour éliminer $C_{i,j}$ pour $j \neq k$;
      4. $\bar{\mathcal{L}}(x,\vartheta)(.,i) := \bar{\mathcal{L}}(x,\vartheta).C_k$, $\gamma_i := v\left(\bar{\mathcal{L}}(x,\vartheta)(.,i)\right)$, $\bar{\mathcal{L}}(x,\vartheta)(.,i) := \bar{\mathcal{L}}(x,\vartheta)(.,i).x^{-\gamma_i}$ et $T(.,i) := TC_k x^{-\gamma_i}$;
   3. Calculer une BMD V de $\bar{\mathcal{L}}(0,\vartheta)$ et récupérer les vecteurs constants de V dans C ;
4. Retourner $\bar{\mathcal{L}}(x,\vartheta)$ et T ;

Analyse de l'algorithme 1

Proposition

Si l'algorithme retourne $\bar{\mathcal{L}}(x,\vartheta) = \mathcal{L}(x,\vartheta)T$ *avec* $\det(\bar{\mathcal{L}}(0,\vartheta)) \equiv 0$ *alors la régularisation de* $\mathcal{L}(0,\vartheta)$ *ne peut pas se faire par un changement de variables, c-à-d,* $\forall T_1(x) \in \mathbb{K}(x)^{n\times n}$ *inversible,* $\mathcal{L}(x,\vartheta)T_1(x)$ *a toujours une matrice polynomiale associée singulière.*

- Chaque fois qu'on entre dans la boucle tant que, le degré en x d'au moins une colonne du coefficient dominant de l'opérateur diminue.
- L'algorithme se termine après au plus nD boucles où $D = \deg(A_\ell(x))$.
- Complexité arithmétique : $\mathcal{O}^\sim(n^4 \ell N D)$ opérations dans $\mathbb{K}$.
- Le coefficient dominant $\bar{A}_\ell(x)$ de l'opérateur de sortie $\bar{\mathcal{L}}(x,\vartheta)$ est inversible car $\bar{A}_\ell(x) = A_\ell(x)T$.

Lorsque la méthode par changement de variable $y = Tz$
ne permet pas de régulariser la matrice polynomiale associée,
on utilise alors une autre approche...

Opérations élémentaires sur les équations du système

Rang des opérateurs différentiels matriciels

Définition : Étant donné $\mathcal{L}(x,\vartheta) \in \mathbb{K}(x)[\vartheta]^{n\times n}$, le rang de $\mathcal{L}(x,\vartheta)$ est défini comme étant le nombre maximal de lignes de $\mathcal{L}(x,\vartheta)$ $\mathbb{K}(x)[\vartheta]$-linéairement indépendants.

Proposition

Soit

$$\mathcal{L}(x,\vartheta)y(x) = A_\ell(x)\vartheta^\ell y(x) + A_{\ell-1}(x)\vartheta^{\ell-1}y(x) + \cdots + A_0(x)y(x) = 0$$

où pour $i = 0,\ldots,\ell$, $A_i(x) \in \mathbb{K}[x]^{n\times n}$ *et* $A_\ell(x)$ *est inversible dans* $\mathbb{K}(x)^{n\times n}$.
Le rang de $\mathcal{L}(x,\vartheta)$ *est* n, *c-à-d, toutes ses lignes sont linéairement indépendants.*

Opérations élémentaires sur les lignes de $\mathcal{L}(x, \vartheta)$

Premier (resp. Second) type d'opérations élémentaires sur les lignes de $\mathcal{L}(x, \vartheta)$:

1. échanger deux lignes ;
2. multiplier une ligne à gauche par un élément non nul de $\mathbb{K}(x)[\vartheta]$ (resp. de $\mathbb{K}(x)$) ;
3. ajouter à une ligne une autre ligne multipliée à gauche par un élément de $\mathbb{K}(x)[\vartheta]$.

Lemme (Beckermann et al 2006)

Le rang d'un opérateur différentiel matriciel $\mathcal{L}(x, \vartheta)$ ne change pas si on applique à ses lignes des opérations élémentaires du premier ou second types.

Opérations élémentaire sur les lignes de $\mathcal{L}(x, \vartheta)$

$$\mathcal{L}(x, \vartheta) = \tilde{L}_N(\vartheta)x^N + \cdots + \tilde{L}_1(\vartheta)x + \mathcal{L}(0, \vartheta)$$

où $\tilde{L}_j(\vartheta) = \sum_{i=0}^{\ell} A_{ij}(\vartheta - j)^i$.

Cas de **systèmes aux récurrences** : La méthode de "EG'-elimination" (Abramov et al en 2003) transforme un système par des opérations élémentaires sur ses équations en un autre dont le rang est déterminé par le rang de son bloc de queue (c-à-d $\mathcal{L}(0, \vartheta)$ dans notre cas).

$$\mathcal{L}(x, \vartheta) \text{ t.q } \operatorname{rang}(\mathcal{L}(x, \vartheta)) = n \text{ et } \operatorname{rang}(\mathcal{L}(0, \vartheta)) < n$$

$$\Big\downarrow \text{ Opérations élémentaires } \mathcal{P}(x, \vartheta) \text{ sur les lignes}$$

$$\bar{\mathcal{L}}(x, \vartheta) = \mathcal{P}(x, \vartheta)\mathcal{L}(x, \vartheta) \text{ avec } \operatorname{rang}(\bar{\mathcal{L}}(0, \vartheta)) = n$$

Systèmes équivalents à gauche

Définition : $\mathcal{P}(x, \vartheta) \in \mathbb{K}(x)[\vartheta]^{n \times n}$ est dit inversible s'il existe $\mathcal{Q}(x, \vartheta) \in \mathbb{K}(x)[\vartheta]^{n \times n}$ tel que $\mathcal{Q}(x, \vartheta)\mathcal{P}(x, \vartheta) = \mathcal{P}(x, \vartheta)\mathcal{Q}(x, \vartheta) = I_n$.

Lemme (Miyake 1980)

$\mathcal{P}(x, \vartheta) \in \mathbb{K}(x)[\vartheta]^{n \times n}$ est inversible si et seulement si $\mathcal{P}(x, \vartheta)$ peut être exprimé comme produit d'opérations élémentaires du second type.

Deux systèmes $\mathcal{L}(x, \vartheta)y = 0$ et $\bar{\mathcal{L}}(x, \vartheta)z = 0$ avec $\bar{\mathcal{L}}(x, \vartheta) = \mathcal{P}(x, \vartheta)\mathcal{L}(x, \vartheta)$ ont le même espace de solutions si et seulement si $\mathcal{P}(x, \vartheta)$ est inversible. On dit qu'ils sont équivalents à gauche.

- On en déduit un algorithme.

Exemple 1

Soit

$$\mathcal{L}(x,\vartheta) = \begin{pmatrix} x\vartheta^3+1 & x^3\vartheta^2+\vartheta & \vartheta^2+x^2\vartheta \\ 1 & x\vartheta^3+x^2\vartheta^2+\vartheta & x\vartheta^3+\vartheta^2+x\vartheta \\ x\vartheta^2+\vartheta & \vartheta^2+x^2 & \vartheta^3+2x\vartheta+4x^3 \end{pmatrix}$$

où

$$\mathcal{L}(0,\vartheta) = \begin{pmatrix} 1 & \vartheta & \vartheta^2 \\ 1 & \vartheta & \vartheta^2 \\ \vartheta & \vartheta^2 & \vartheta^3 \end{pmatrix},$$

une BMD : $W = \begin{pmatrix} -\vartheta & 0 \\ 1 & -\vartheta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et une BMG : $V = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \vartheta & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exemple 1

1. $\bar{\mathcal{L}}(x,\vartheta) \leftarrow \mathcal{L}(x,\vartheta)$;
2. $\bar{\mathcal{L}}(x,\vartheta)(1,.) \leftarrow V(1,.)\bar{\mathcal{L}}(x,\vartheta) = -\mathcal{L}(x,\vartheta)(1,.) + \mathcal{L}(x,\vartheta)(2,.)$ (opération du second type) ;
3. $\bar{\mathcal{L}}(x,\vartheta)(1,.) \leftarrow x^{-1}\bar{\mathcal{L}}(x,\vartheta)(1,.)$;
4. $V(2,.) \leftarrow V(2,.) + \vartheta\, V(1,.) = (0,\vartheta,-1)$;
5. $\bar{\mathcal{L}}(x,\vartheta)(3,.) \leftarrow V(2,.)\bar{\mathcal{L}}(x,\vartheta) = -\bar{\mathcal{L}}(x,\vartheta)(3,.) + \vartheta\bar{\mathcal{L}}(x,\vartheta)(2,.)$ (opération du second type) ;

$$\bar{\mathcal{L}}(x,\vartheta) = \begin{pmatrix} -\vartheta^3 & \vartheta^3 + (x-x^2)\vartheta^2 & \vartheta^3 + (1-x)\vartheta \\ 1 & x\vartheta^3 + x^2\vartheta^2 + \vartheta & x\vartheta^3 + \vartheta^2 + x\vartheta \\ -\vartheta^2 & \vartheta^4 + (x+1)\vartheta^3 + 2x\vartheta^2 - x & \vartheta^4 + \vartheta^3 + \vartheta^2 - \vartheta - 4x^2 \end{pmatrix}$$

avec $\det(\bar{\mathcal{L}}(0,\vartheta)) \neq 0$ et équivalent à gauche à $\mathcal{L}(x,\vartheta)$.

Exemple 2

$$\mathcal{L}(x,\vartheta) = \begin{pmatrix} \vartheta^2 & \vartheta \\ \vartheta & x\vartheta^2 + 1 \end{pmatrix},$$

où $\mathcal{L}(0,\vartheta) = \begin{pmatrix} \vartheta^2 & \vartheta \\ \vartheta & 1 \end{pmatrix}$ et une BMG $V = \begin{pmatrix} 1 & -\vartheta \end{pmatrix}$.

1. $\bar{\mathcal{L}}(x,\vartheta) \leftarrow \mathcal{L}(x,\vartheta)$;
2. $\bar{\mathcal{L}}(x,\vartheta)(2,.) \leftarrow V\bar{\mathcal{L}}(x,\vartheta) = -\vartheta\bar{\mathcal{L}}(x,\vartheta)(2,.) + \bar{\mathcal{L}}(x,\vartheta)(1,.) = (0, x(\vartheta^3 + \vartheta^2))$ (opération du premier type) ;
3. $\bar{\mathcal{L}}(x,\vartheta)(2,.) \leftarrow x^{-1}\bar{\mathcal{L}}(x,\vartheta)(2,.) = (0, \vartheta^3 + \vartheta^2)$;

$$\bar{\mathcal{L}}(x,\vartheta) = \begin{pmatrix} \vartheta^2 & \vartheta \\ 0 & \vartheta^3 + \vartheta^2 \end{pmatrix},$$

qui n'est pas équivalent à gauche à $\mathcal{L}(x,\vartheta)$.

Algorithme 2 : Régularisation de $\mathcal{L}(0,\vartheta)$

Entrée: $\mathcal{L}(x,\vartheta) = \sum_{j=1}^{N} \tilde{L}_j(\vartheta)x^j + \mathcal{L}(0,\vartheta)$ où $\det(\mathcal{L}(0,\vartheta)) \equiv 0$.
Sortie: $\bar{\mathcal{L}}(x,\vartheta) = \mathcal{P}(x,\vartheta)\mathcal{L}(x,\vartheta) \in \mathbb{K}[x][\vartheta]^{n\times n}$ avec $\det(\bar{\mathcal{L}}(0,\vartheta)) \neq 0$ et *left_equiv*.

1. $\bar{\mathcal{L}}(x,\vartheta) := \mathcal{L}(x,\vartheta)$ et *left_equiv*:=vrai ;
2. Tant que $\det(\bar{\mathcal{L}}(0,\vartheta)) \equiv 0$ faire
    1. Calculer une matrice V dont les lignes forment une BMG de $\bar{\mathcal{L}}(0,\vartheta)$;
    2. Pour chaque ligne V_k de V
        1. $J := \{i \in \{1,\dots,n\}$ t.q. $V_{k,i} \neq 0\}$;
        2. Choisir $i \in J$ t.q $\forall j \in J$ $\deg_x\left(\bar{\mathcal{L}}(x,\vartheta)(i,.)\right) \geq \deg_x\left(\bar{\mathcal{L}}(x,\vartheta)(j,.)\right)$;
        3. Si $\deg_\vartheta(V_{k,i}) \neq 0$ alors *left_equiv*:=faux ;
        4. Utiliser $V_{k,i}$ comme un pivot pour éliminer tous les $V_{j,i}$ pour $j \neq k$.
        5. $\bar{\mathcal{L}}(x,\vartheta)(i,.) := V_k\bar{\mathcal{L}}(x,\vartheta)$;
        6. $\beta_i := v\left(\bar{\mathcal{L}}(x,\vartheta)(i,.)\right)$ et $\bar{\mathcal{L}}(x,\vartheta)(i,.) := x^{-\beta_i}\bar{\mathcal{L}}(x,\vartheta)(i,.)$;
3. Retourner $\bar{\mathcal{L}}(x,\vartheta)$ et *left_equiv* ;

Analyse de l'algorithme 2

- Chaque fois qu'on entre dans la boucle tant que, le degré en x d'au moins une ligne de $\bar{\mathcal{L}}(x, \vartheta)$ diminue.
- L'algorithme se termine après au plus nN boucles.
- Si on note par d_i l'ordre de $\bar{\mathcal{L}}(x, \vartheta)$ après i passage dans la boucle tant que alors le coût du $(i+1)$-ème passage dans la même boucle est $\mathcal{O}^{\sim}(n^4 N d_i^2)$ opérations dans $\mathbb{K}$.
- $d_i \leq d_{i+1} \leq (n+1)d_i$.
- Compléxité arithmétique : $\mathcal{O}^{\sim}(n^{5+2nN} N^2 \ell^2)$ opérations dans $\mathbb{K}$.

Conclusions

- On sait calculer une base de l'espace de solutions régulières dans les cas où
  1. $\mathcal{L}(0, \vartheta)$ est régulière,
  2. $\mathcal{L}(0, \vartheta)$ est singulière et $A_\ell(x)$ est inversible.
- Dans le cas où $A_\ell(x)$ et $\mathcal{L}(0, \vartheta)$ sont tous les deux singulières, on a un algorithme de réduction (papier soumis à ISSAC'10) qui transforme le système $\mathcal{L}(x, \vartheta)y = 0$ en un système purement algébrique et un autre de rang plein. Par suite, on travaille sur ce dernier.

Perspectives

- Localement : Développer des algorithmes qui calculent les solutions ayant une partie exponentielle non nulle appelées solutions irrégulières.

- Globalement : Développer des algorithmes qui calculent des solutions sous forme close : solutions polynomiales, rationnelles, exponentielles...

Merci de votre attention !!