Périmètre moyen des animaux dirigés sur le réseau carré

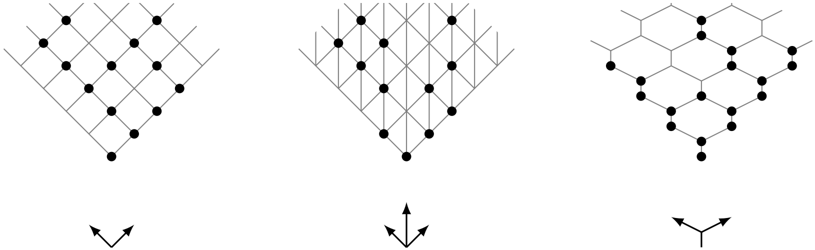
Axel Bacher

LaBRI, Université Bordeaux 1

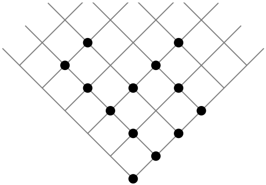
19 avril 2010

Sommaire

Animaux dirigés



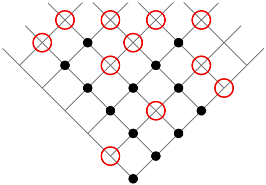
Périmètre, sites adjacents, boucles



Cet animal A a pour :

- aire $|A| = 13$;

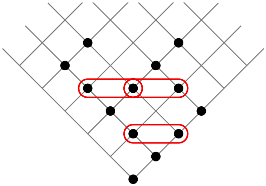
Périmètre, sites adjacents, boucles



Cet animal A a pour :

- aire $|A| = 13$;
- périmètre $p(A) = 11$;

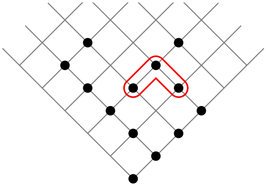
Périmètre, sites adjacents, boucles



Cet animal A a pour :

- aire $|A| = 13$;
- périmètre $p(A) = 11$;
- $j(A) = 3$ paires de sites adjacents ;

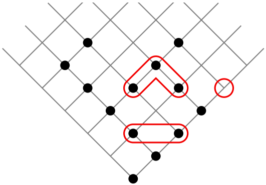
Périmètre, sites adjacents, boucles



Cet animal A a pour :

- aire $|A| = 13$;
- périmètre $p(A) = 11$;
- $j(A) = 3$ paires de sites adjacents ;
- $\ell(A) = 1$ boucle.

Périmètre, sites adjacents, boucles



Cet animal A a pour :

- aire $|A| = 13$;
- périmètre $p(A) = 11$;
- $j(A) = 3$ paires de sites adjacents ;
- $\ell(A) = 1$ boucle.

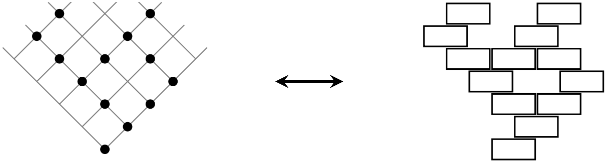
Définition

On définit les séries génératrices :

- $A(t)$: animaux non marqués ;
- $P(t)$: animaux marqués d'un voisin ;
- $J(t)$: animaux marqués de deux sites adjacents ;
- $L(t)$: animaux marqués d'une boucle.

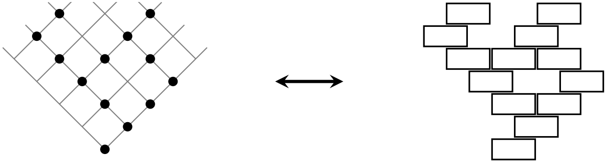
Pyramides strictes de dominos

[Viennot 1986]



Pyramides strictes de dominos

[Viennot 1986]

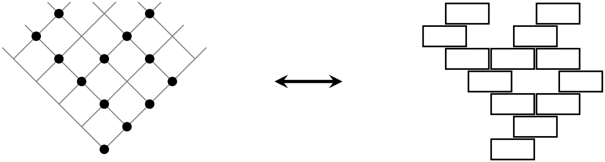


Définition

Un empilement est strict si deux pièces à la même position ne sont jamais l'une sur l'autre.

Pyramides strictes de dominos

[Viennot 1986]

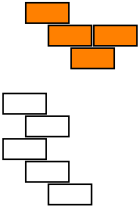


Définition

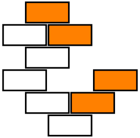
Un empilement est strict si deux pièces à la même position ne sont jamais l'une sur l'autre.

- Les animaux dirigés sont en bijection avec les pyramides strictes de dominos.

Composition des empilements

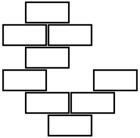


Composition des empilements



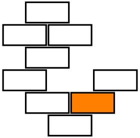
- On compose en laissant tomber un empilement sur l'autre.

Composition des empilements



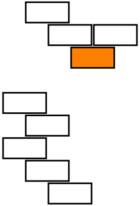
- On compose en laissant tomber un empilement sur l'autre.

Composition des empilements



- On compose en laissant tomber un empilement sur l'autre.

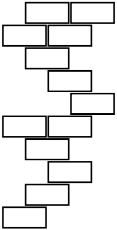
Composition des empilements



- On compose en laissant tomber un empilement sur l'autre.
- On factorise en poussant une pièce vers le haut.

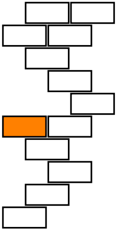
Décomposition des demi-pyramides

[Bétréma, Penaud 1993]



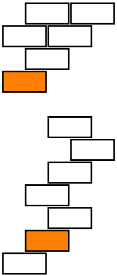
Décomposition des demi-pyramides

[Bétréma, Penaud 1993]



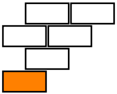
Décomposition des demi-pyramides

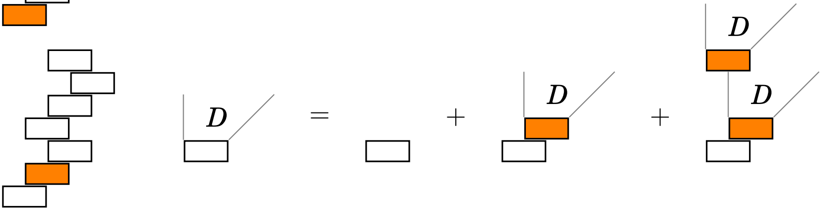
[Bétréma, Penaud 1993]



Décomposition des demi-pyramides

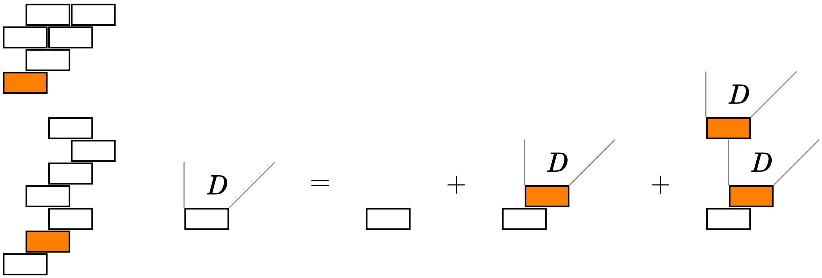
[Bétréma, Penaud 1993]





Décomposition des demi-pyramides

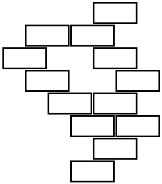
[Bétréma, Penaud 1993]



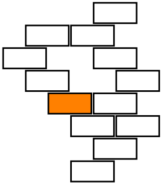
- Série génératrice :

$$D(t) = t\left(1 + D(t) + D(t)^2\right).$$

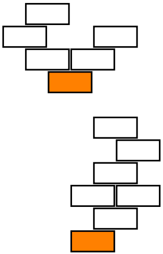
Décomposition des pyramides



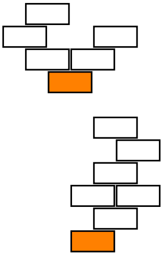
Décomposition des pyramides

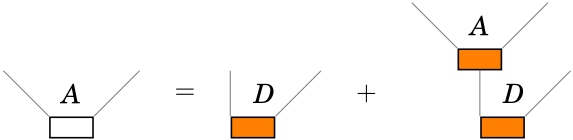


Décomposition des pyramides

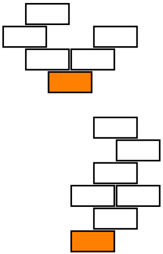


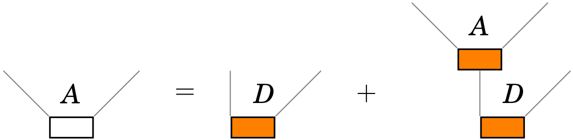
Décomposition des pyramides





Décomposition des pyramides





- Série génératrice :

$$A(t) = D(t)\big(1 + A(t)\big).$$

Résultats finaux

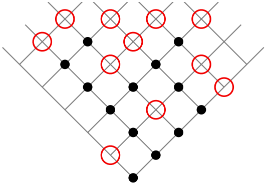
Proposition

Les séries $D(t)$ et $A(t)$ valent :

$$D(t) = \frac{1 - t - \sqrt{1-3t}}{2t}\,;$$

$$A(t) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1+t}{1-3t}} - 1\right).$$

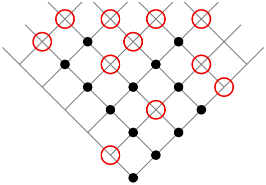
Périmètre et sites adjacents



Cet animal A a pour :

- aire $|A| = 13$;
- périmètre $p(A) = 11$;
- $j(A) = 3$ paires de sites adjacents ;
- $\ell(A) = 1$ boucle.

Périmètre et sites adjacents



Cet animal A a pour :

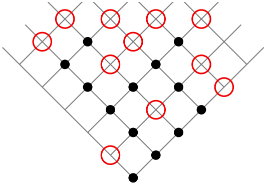
- aire $|A| = 13$;
- périmètre $p(A) = 11$;
- $j(A) = 3$ paires de sites adjacents ;
- $\ell(A) = 1$ boucle.

Lemme

Tout animal A vérifie :

$$p(A) = 1 + |A| - j(A).$$

Périmètre et sites adjacents



Cet animal A a pour :

- aire $|A| = 13$;
- périmètre $p(A) = 11$;
- $j(A) = 3$ paires de sites adjacents ;
- $\ell(A) = 1$ boucle.

Lemme

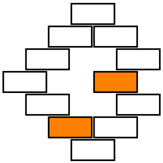
Tout animal A vérifie :

$$p(A) = 1 + |A| - j(A).$$

- On en déduit :

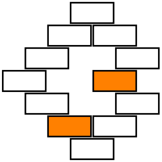
$$P(t) = A(t) + tA'(t) - J(t).$$

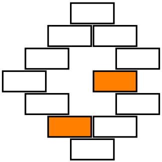
Factorisation des empilements marqués



- Les pièces marquées doivent être indépendantes.

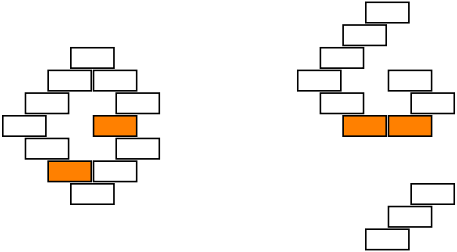
Factorisation des empilements marqués





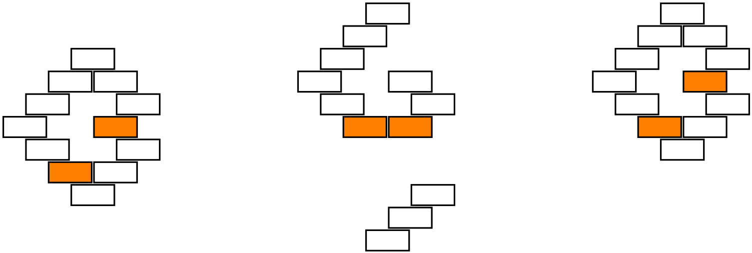
- Les pièces marquées doivent être indépendantes.
- On peut factoriser :

Factorisation des empilements marqués



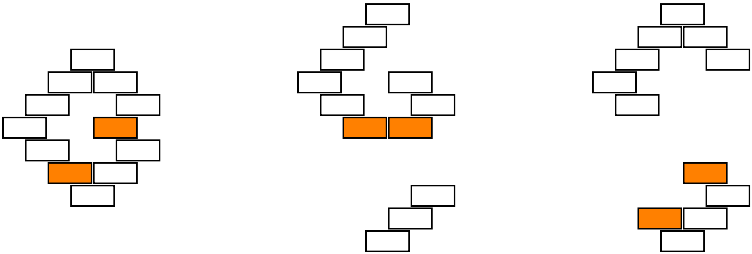
- Les pièces marquées doivent être indépendantes.
- On peut factoriser :
    - en poussant les pièces vers le haut ;

Factorisation des empilements marqués



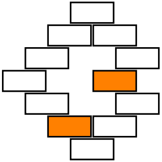
- Les pièces marquées doivent être indépendantes.
- On peut factoriser :
  - en poussant les pièces vers le haut ;

Factorisation des empilements marqués

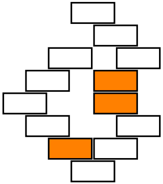


- Les pièces marquées doivent être indépendantes.
- On peut factoriser :
  - en poussant les pièces vers le haut ;
  - en les tirant vers le bas.

Empilements presque stricts

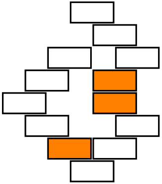


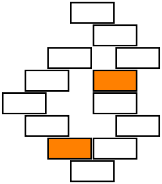
Empilements presque stricts



- Les pièces marquées d'un empilement presque strict peuvent être dédoublées.

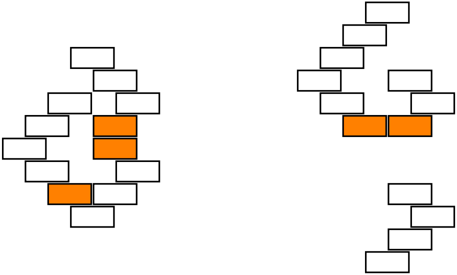
Empilements presque stricts





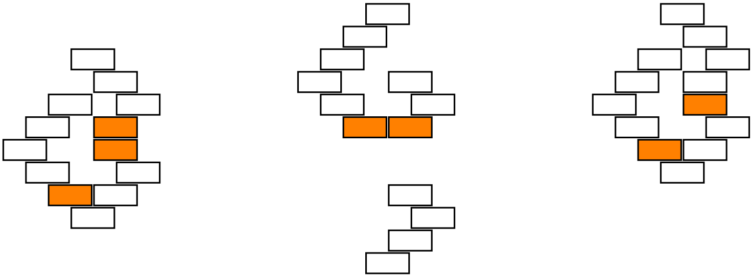
- Les pièces marquées d'un empilement presque strict peuvent être dédoublées.

Empilements presque stricts



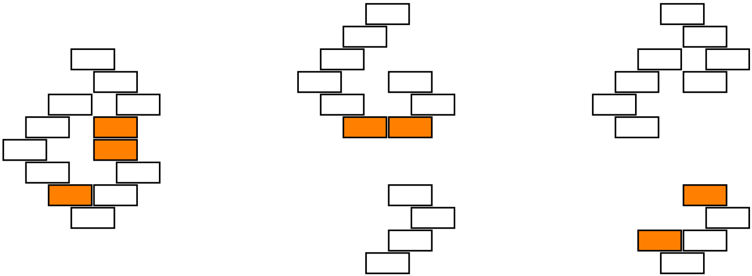
- Les pièces marquées d'un empilement presque strict peuvent être dédoublées.

Empilements presque stricts



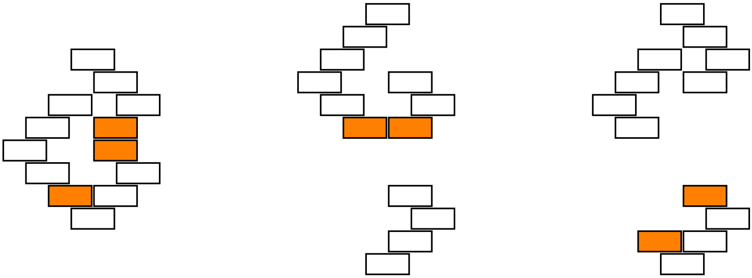
- Les pièces marquées d'un empilement presque strict peuvent être dédoublées.

Empilements presque stricts



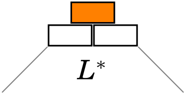
- Les pièces marquées d'un empilement presque strict peuvent être dédoublées.
- On a deux bijections
  {emp. presque stricts} $\longleftrightarrow$ {paires d'emp. stricts}.

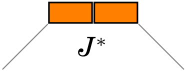
Empilements presque stricts



- Les pièces marquées d'un empilement presque strict peuvent être dédoublées.
- On a deux bijections
  $\{$emp. presque stricts$\} \longleftrightarrow \{$paires d'emp. stricts$\}$.
- Avec m pièces marquées : facteur $(1+t)^m$ dans les SG.

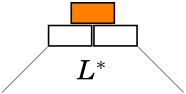
Boucles et sites adjacents

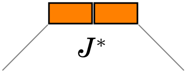




- On tire les pièces vers le bas.

Boucles et sites adjacents

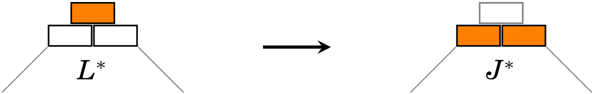




- On tire les pièces vers le bas.
- On considère des empilements presque stricts :

$$J^*(t) = (1+t)^2 J(t);$$
$$L^*(t) = (1+t)L(t).$$

Boucles et sites adjacents



- On tire les pièces vers le bas.
- On considère des empilements presque stricts :

$$J^*(t) = (1+t)^2 J(t);$$
$$L^*(t) = (1+t)L(t).$$

- On a alors :

$$L^*(t) = tJ^*(t).$$

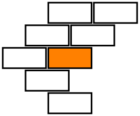
Boucles et sites adjacents

Proposition

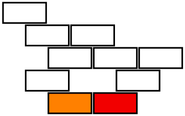
La série $L(t)$ vaut :

$$L(t) = t(1+t)J(t).$$

Résultat

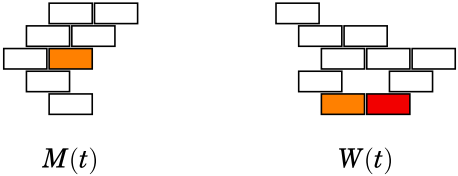


$M(t)$



$W(t)$

Résultat

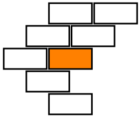


Théorème

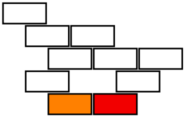
La série $J(t)$ vaut :

$$J(t) = \frac{tM(t) - W(t)}{1+t}.$$

Résultat



$M(t)$



$W(t)$

Théorème

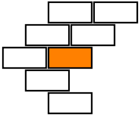
La série $J(t)$ vaut :

$$J(t) = \frac{tM(t) - W(t)}{1+t}.$$

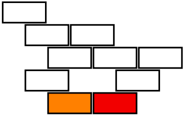
- Ces séries valent :

$$M(t) = tA'(t); \qquad W(t) = D(t)A(t).$$

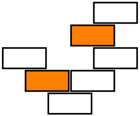
Séries auxiliaires



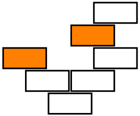
$M(t)$



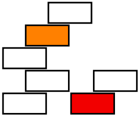
$W(t)$



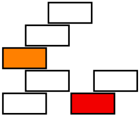
$I_2(t)$



$I_3(t)$

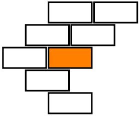


$X_2(t)$

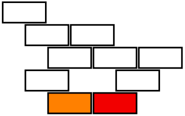


$X_3(t)$

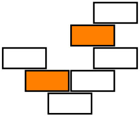
Séries auxiliaires



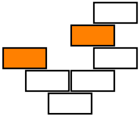
$M(t)$



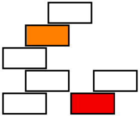
$W(t)$



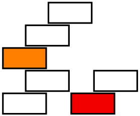
$I_2(t)$



$I_3(t)$



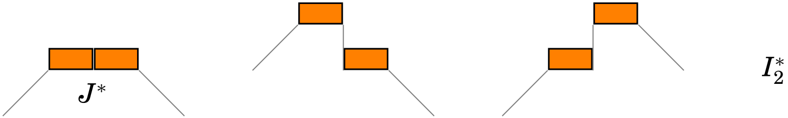
$X_2(t)$



$X_3(t)$

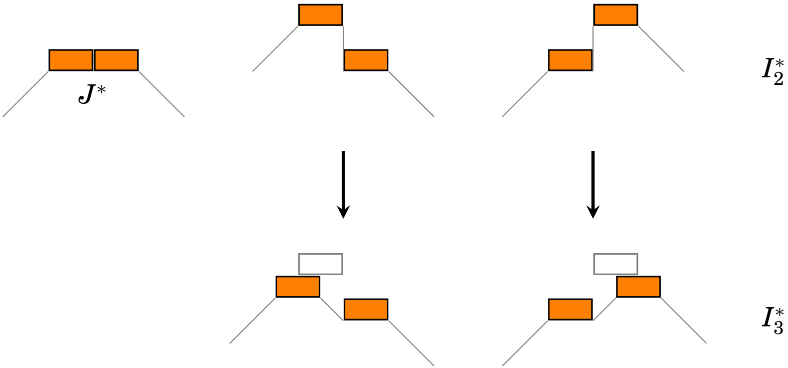
- Versions presque strictes : $M^*(t)$, $W^*(t)$, $I_2^*(t)$, $I_3^*(t)$, $X_2^*(t)$, $X_3^*(t)$.

Première bijection



- On tire les pièces marquées vers le bas.

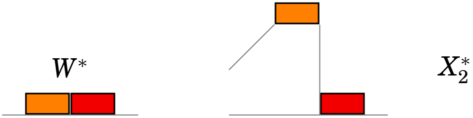
Première bijection



- On tire les pièces marquées vers le bas.
- On a :

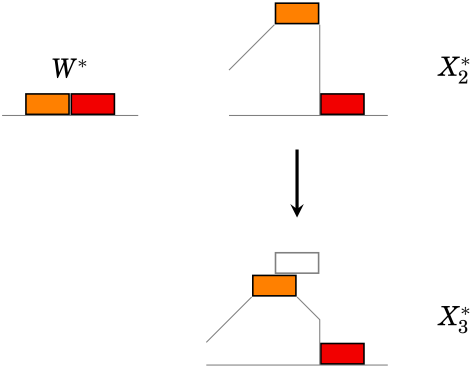
$$I_2^*(t) - J^*(t) = tI_3^*(t).$$

Deuxième bijection



- On tire encore les pièces marquées vers le bas.

Deuxième bijection



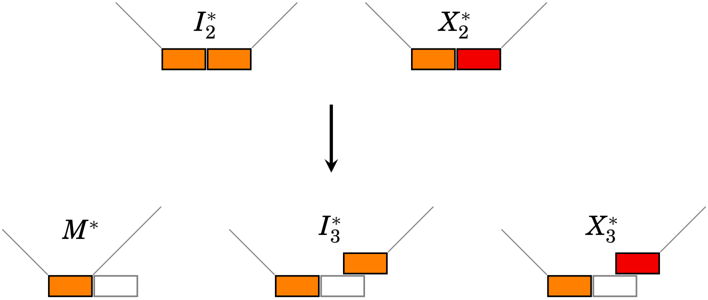
- On tire encore les pièces marquées vers le bas.
- On a :

$$X_2^*(t) - W^*(t) = tX_3^*(t).$$

Troisième bijection

- On pousse les pièces marquées vers le haut.

Troisième bijection



- On pousse les pièces marquées vers le haut.
- On a :

$$I_2^*(t) + X_2^*(t) = t\big(M^*(t) + I_3^*(t) + X_3^*(t)\big).$$

Fin de la preuve

- Les trois bijections nous donnent :

$$J^*(t) = I_2^*(t) - tI_3^*(t);$$
$$W^*(t) = X_2^*(t) - tX_3^*(t);$$
$$tM^*(t) = I_2^*(t) + X_2^*(t) - tI_3^*(t) - tX_3^*(t).$$

Fin de la preuve

- Les trois bijections nous donnent :

$$J^*(t) = I_2^*(t) - tI_3^*(t);$$
$$W^*(t) = X_2^*(t) - tX_3^*(t);$$
$$tM^*(t) = I_2^*(t) + X_2^*(t) - tI_3^*(t) - tX_3^*(t).$$

- On en tire :

$$J^*(t) = tM^*(t) - W^*(t).$$

Fin de la preuve

- Les trois bijections nous donnent :

$$J^*(t) = I_2^*(t) - tI_3^*(t);$$
$$W^*(t) = X_2^*(t) - tX_3^*(t);$$
$$tM^*(t) = I_2^*(t) + X_2^*(t) - tI_3^*(t) - tX_3^*(t).$$

- On en tire :

$$J^*(t) = tM^*(t) - W^*(t).$$

- Ceci équivaut à :

$$J(t) = \frac{tM(t) - W(t)}{1+t}.$$

Nombre moyen de sites adjacents, voisins, boucles

Théorème

Les séries $J(t)$, $P(t)$, $L(t)$ valent :

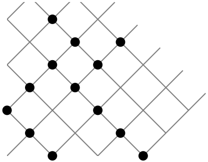
$$J(t) = \frac{1}{2t(1+t)}\left(1 - \frac{1-4t+t^2+4t^3}{\sqrt{1+t}(1-3t)^{3/2}}\right);$$

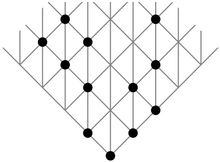
$$P(t) = \frac{1}{2t(1+t)}\left(-1+t+t^2 + \frac{1-3t+t^2+t^3-3t^4}{\sqrt{1+t}(1-3t)^{3/2}}\right);$$

$$L(t) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1-4t+t^2+4t^3}{\sqrt{1+t}(1-3t)^{3/2}}\right).$$

[Conway 1996, Bousquet-Mélou 1998]

Autres résultats





- Cette méthode fonctionne pour d'autres réseaux carrés (demi-animaux, etc.).
- Elle fonctionne pour des animaux à plusieurs sources.
- Elle fonctionne sur le réseau triangulaire (sauf périmètre).