

Périmètre moyen des animaux dirigés sur le réseau carré

Axel Bacher

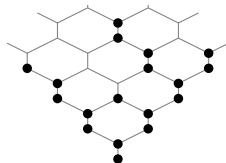
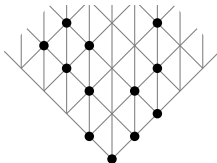
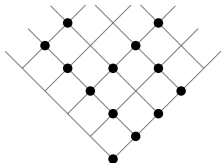
LaBRI, Université Bordeaux 1

19 avril 2010

Sommaire

- 1 Définitions
 - Animaux dirigés
 - Périmètre, sites adjacents, boucles
- 2 Dénombrement selon l'aire
 - Empilements de dominos
 - Énumération des pyramides
- 3 Liens entre les trois paramètres
 - Périmètre et sites adjacents
 - Empilements marqués et factorisés
 - Boucles et sites adjacents
- 4 Nombre moyen de sites adjacents
 - Résultat
 - Preuve bijective
- 5 Conclusion
 - Bilan

Animaux dirigés

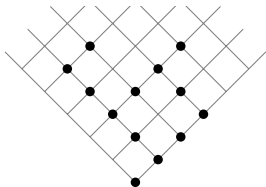




Périmètre, sites adjacents, boucles

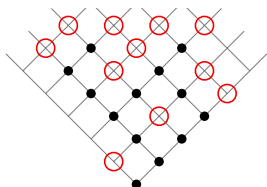
Cet animal A a pour :

- aire $|A| = 13$;





Périmètre, sites adjacents, boucles

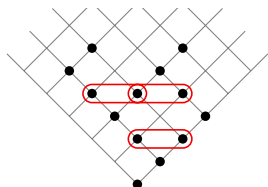


Cet animal A a pour :

- aire $|A| = 13$;
- périmètre $p(A) = 11$;



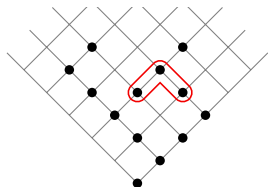
Périmètre, sites adjacents, boucles



Cet animal A a pour :

- aire $|A| = 13$;
- périmètre $p(A) = 11$;
- $j(A) = 3$ paires de sites adjacents ;

Périmètre, sites adjacents, boucles

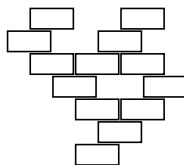
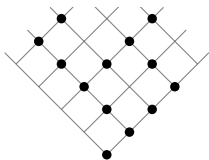


Cet animal A a pour :

- aire $|A| = 13$;
- périmètre $p(A) = 11$;
- $j(A) = 3$ paires de sites adjacents ;
- $\ell(A) = 1$ boucle.

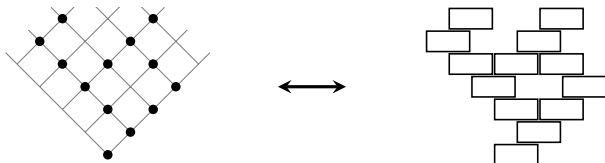
Pyramides strictes de dominos

[Viennot 1986]



Pyramides strictes de dominos

[Viennot 1986]

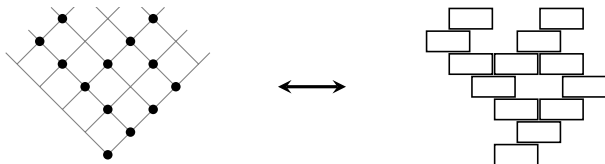


Définition

Un empilement est **strict** si deux pièces à la même position ne sont jamais l'une sur l'autre.

Pyramides strictes de dominos

[Viennot 1986]

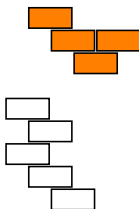


Définition

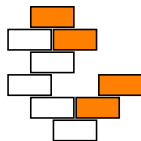
Un empilement est **strict** si deux pièces à la même position ne sont jamais l'une sur l'autre.

- Les animaux dirigés sont en bijection avec les **pyramides strictes de dominos**.

Composition des empilements

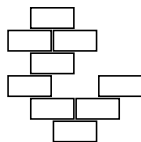


Composition des empilements



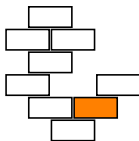
- On **compose** en laissant tomber un empilement sur l'autre.

Composition des empilements



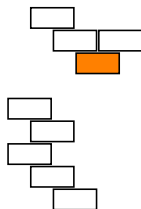
- On **compose** en laissant tomber un empilement sur l'autre.

Composition des empilements



- On **compose** en laissant tomber un empilement sur l'autre.

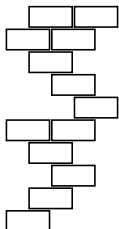
Composition des empilements



- On **compose** en laissant tomber un empilement sur l'autre.
- On **factorise** en poussant une pièce vers le haut.

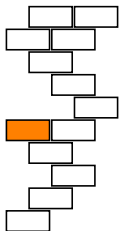
Décomposition des demi-pyramides

[Bétréma, Penaud 1993]



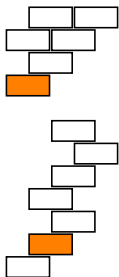
Décomposition des demi-pyramides

[Bétréma, Penaud 1993]



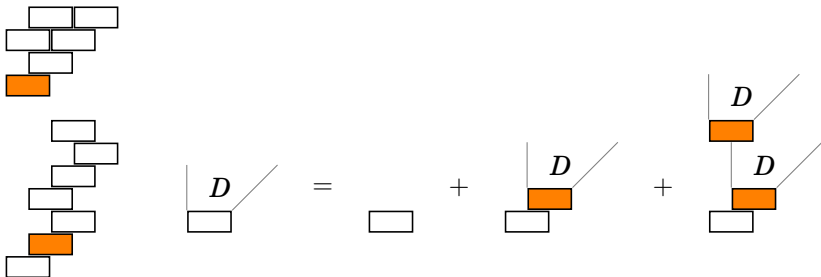
Décomposition des demi-pyramides

[Bétréma, Penaud 1993]



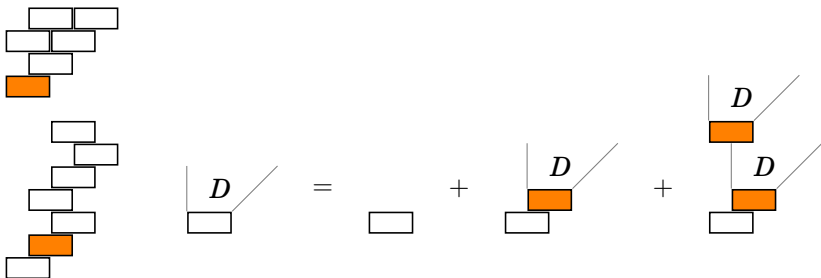
Décomposition des demi-pyramides

[Bétréma, Penaud 1993]



Décomposition des demi-pyramides

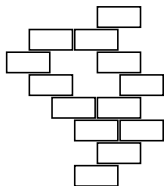
[Bétréma, Penaud 1993]



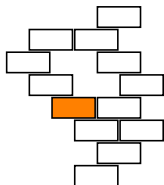
- Série génératrice :

$$D(t) = t(1 + D(t) + D(t)^2).$$

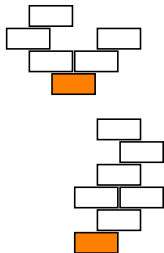
Décomposition des pyramides



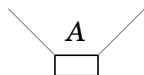
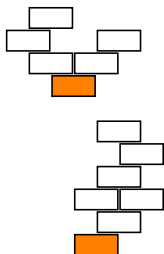
Décomposition des pyramides



Décomposition des pyramides



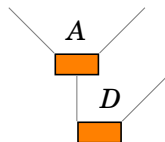
Décomposition des pyramides



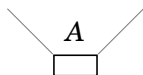
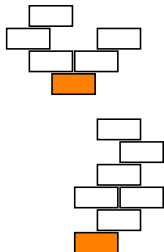
=



+



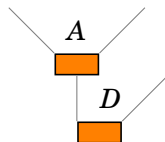
Décomposition des pyramides



=



+



- Série génératrice :

$$A(t) = D(t)(1 + A(t)).$$

Résultats finaux

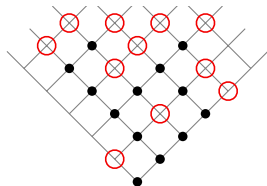
Proposition

Les séries $D(t)$ et $A(t)$ valent :

$$D(t) = \frac{1 - t - \sqrt{1 - 3t}}{2t};$$

$$A(t) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{1+t}{1-3t}} - 1 \right).$$

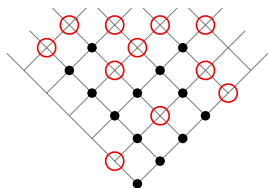
Périmètre et sites adjacents



Cet animal A a pour :

- aire $|A| = 13$;
- périmètre $p(A) = 11$;
- $j(A) = 3$ paires de sites adjacents ;
- $\ell(A) = 1$ boucle.

Périmètre et sites adjacents



Cet animal A a pour :

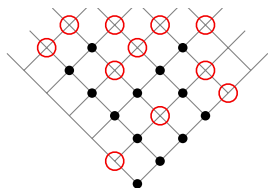
- aire $|A| = 13$;
- périmètre $p(A) = 11$;
- $j(A) = 3$ paires de sites adjacents ;
- $\ell(A) = 1$ boucle.

Lemme

Tout animal A vérifie :

$$p(A) = 1 + |A| - j(A).$$

Périmètre et sites adjacents



Cet animal A a pour :

- aire $|A| = 13$;
- périmètre $p(A) = 11$;
- $j(A) = 3$ paires de sites adjacents ;
- $\ell(A) = 1$ boucle.

Lemme

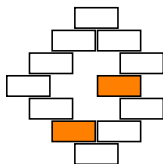
Tout animal A vérifie :

$$p(A) = 1 + |A| - j(A).$$

- On en déduit :

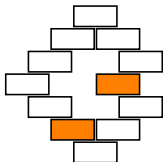
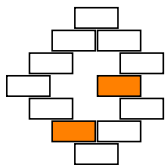
$$P(t) = A(t) + tA'(t) - J(t).$$

Factorisation des empilements marqués



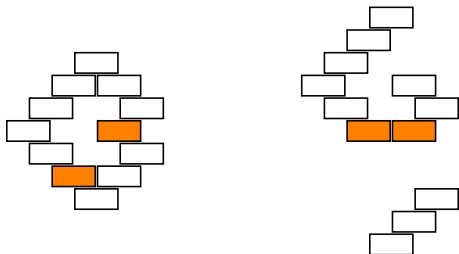
- Les pièces marquées doivent être **indépendantes**.

Factorisation des empilements marqués



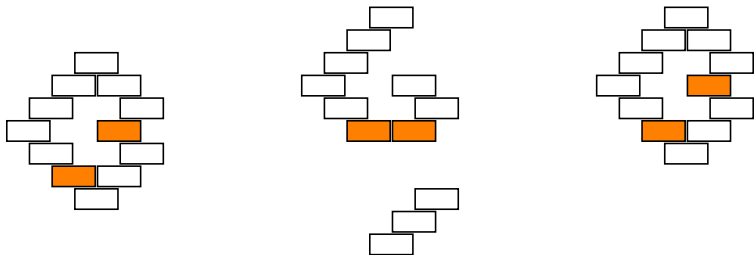
- Les pièces marquées doivent être **indépendantes**.
- On peut factoriser :

Factorisation des empilements marqués



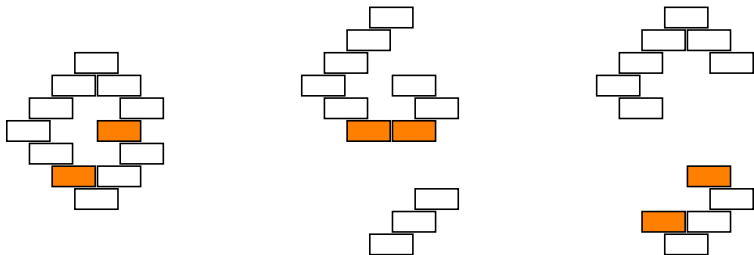
- Les pièces marquées doivent être **indépendantes**.
- On peut factoriser :
 - en poussant les pièces **vers le haut**;

Factorisation des empilements marqués



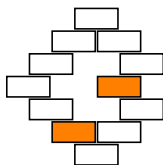
- Les pièces marquées doivent être **indépendantes**.
- On peut factoriser :
 - en poussant les pièces **vers le haut**;

Factorisation des empilements marqués

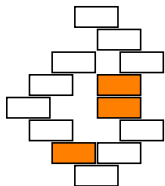


- Les pièces marquées doivent être **indépendantes**.
- On peut factoriser :
 - en poussant les pièces **vers le haut** ;
 - en les tirant **vers le bas**.

Empilements presque stricts

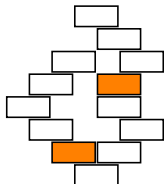
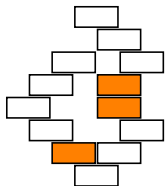


Empilements presque stricts



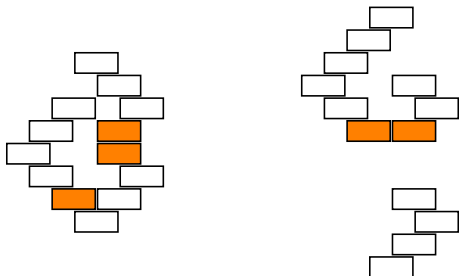
- Les pièces marquées d'un empilement presque strict **peuvent** être dédoublées.

Empilements presque stricts



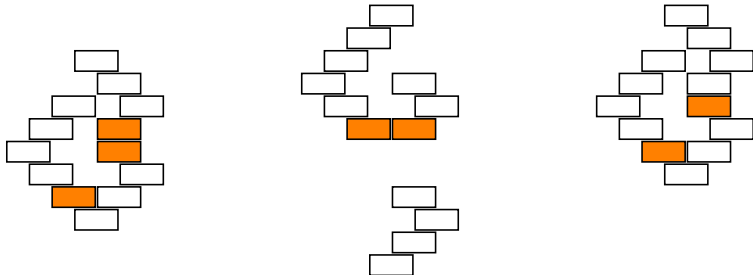
- Les pièces marquées d'un empilement presque strict **peuvent** être dédoublées.

Empilements presque stricts



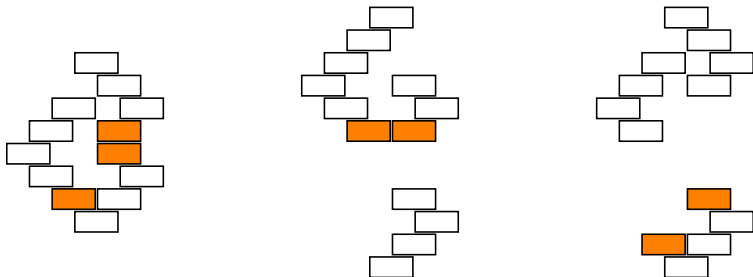
- Les pièces marquées d'un empilement presque strict **peuvent** être dédoublées.

Empilements presque stricts



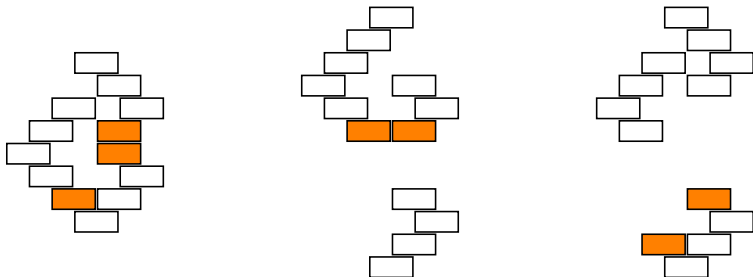
- Les pièces marquées d'un empilement presque strict **peuvent** être dédoublées.

Empilements presque stricts



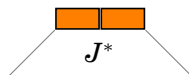
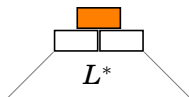
- Les pièces marquées d'un empilement presque strict **peuvent** être dédoublées.
- On a deux **bijections**
 $\{\text{emp. presque stricts}\} \longleftrightarrow \{\text{paires d'emp. stricts}\}.$

Empilements presque stricts



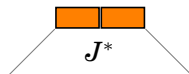
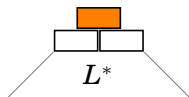
- Les pièces marquées d'un empilement presque strict **peuvent** être dédoublées.
- On a deux **bijections**
 $\{\text{emp. presque stricts}\} \longleftrightarrow \{\text{paires d'emp. stricts}\}.$
- Avec m pièces marquées : **facteur** $(1+t)^m$ dans les SG.

Boucles et sites adjacents



- On tire les pièces **vers le bas**.

Boucles et sites adjacents



- On tire les pièces **vers le bas**.
- On considère des empilements **presque stricts** :

$$J^*(t) = (1 + t)^2 J(t);$$

$$L^*(t) = (1 + t)L(t).$$

Boucles et sites adjacents



- On tire les pièces **vers le bas**.
- On considère des empilements **presque stricts** :

$$J^*(t) = (1 + t)^2 J(t);$$

$$L^*(t) = (1 + t)L(t).$$

- On a alors :

$$L^*(t) = tJ^*(t).$$

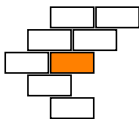
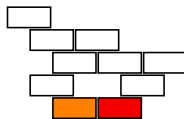
Boucles et sites adjacents

Proposition

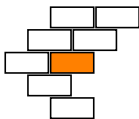
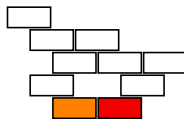
La série $L(t)$ vaut :

$$L(t) = t(1 + t)J(t).$$

Résultat


 $M(t)$

 $W(t)$

Résultat

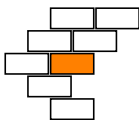
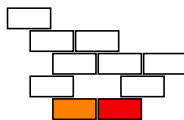

 $M(t)$

 $W(t)$

Théorème

La série $J(t)$ vaut :

$$J(t) = \frac{tM(t) - W(t)}{1 + t}.$$

Résultat


 $M(t)$

 $W(t)$

Théorème

La série $J(t)$ vaut :

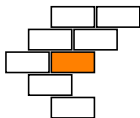
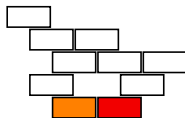
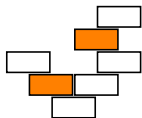
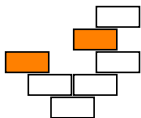
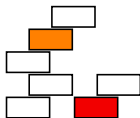
$$J(t) = \frac{tM(t) - W(t)}{1 + t}.$$

- Ces séries valent :

$$M(t) = tA'(t);$$

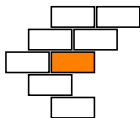
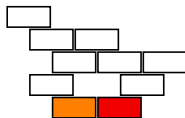
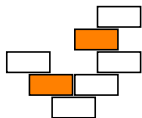
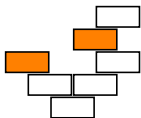
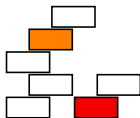
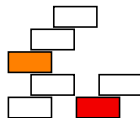
$$W(t) = D(t)A(t).$$

Séries auxiliaires


 $M(t)$

 $W(t)$

 $I_2(t)$

 $I_3(t)$

 $X_2(t)$

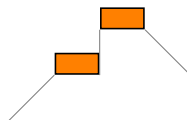
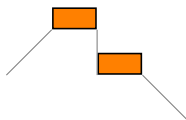
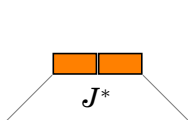
 $X_3(t)$

Séries auxiliaires


 $M(t)$

 $W(t)$

 $I_2(t)$

 $I_3(t)$

 $X_2(t)$

 $X_3(t)$

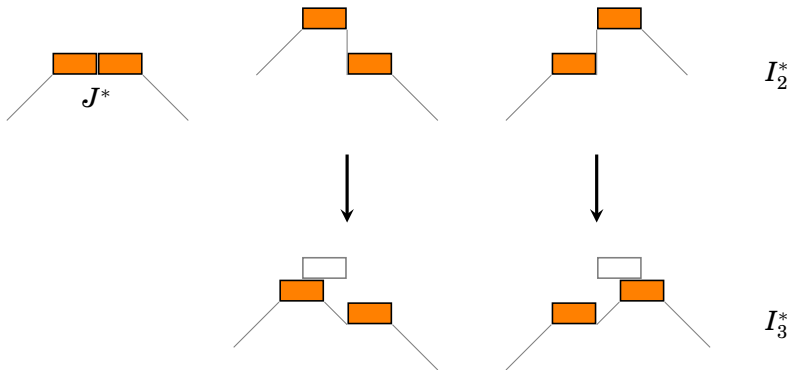
- Versions **presque strictes** : $M^*(t)$, $W^*(t)$, $I_2^*(t)$, $I_3^*(t)$,
 $X_2^*(t)$, $X_3^*(t)$.

Première bijection


 I_2^*

- On tire les pièces marquées **vers le bas**.

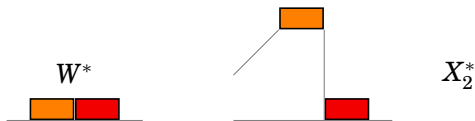
Première bijection



- On tire les pièces marquées **vers le bas**.
- On a :

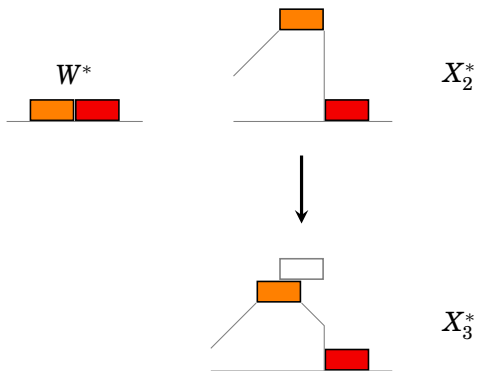
$$I_2^*(t) - J^*(t) = tI_3^*(t).$$

Deuxième bijection



- On tire encore les pièces marquées **vers le bas**.

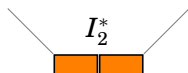
Deuxième bijection



- On tire encore les pièces marquées **vers le bas**.
- On a :

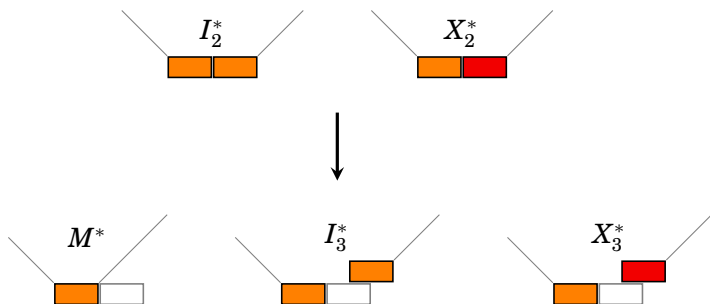
$$X_2^*(t) - W^*(t) = tX_3^*(t).$$

Troisième bijection



- On pousse les pièces marquées **vers le haut**.

Troisième bijection



- On pousse les pièces marquées **vers le haut**.
- On a :

$$I_2^*(t) + X_2^*(t) = t(M^*(t) + I_3^*(t) + X_3^*(t)).$$

Fin de la preuve

- Les trois bijections nous donnent :

$$J^*(t) = I_2^*(t) - tI_3^*(t);$$

$$W^*(t) = X_2^*(t) - tX_3^*(t);$$

$$tM^*(t) = I_2^*(t) + X_2^*(t) - tI_3^*(t) - tX_3^*(t).$$

Fin de la preuve

- Les trois bijections nous donnent :

$$J^*(t) = I_2^*(t) - tI_3^*(t);$$

$$W^*(t) = X_2^*(t) - tX_3^*(t);$$

$$tM^*(t) = I_2^*(t) + X_2^*(t) - tI_3^*(t) - tX_3^*(t).$$

- On en tire :

$$J^*(t) = tM^*(t) - W^*(t).$$

Fin de la preuve

- Les trois bijections nous donnent :

$$J^*(t) = I_2^*(t) - tI_3^*(t);$$

$$W^*(t) = X_2^*(t) - tX_3^*(t);$$

$$tM^*(t) = I_2^*(t) + X_2^*(t) - tI_3^*(t) - tX_3^*(t).$$

- On en tire :

$$J^*(t) = tM^*(t) - W^*(t).$$

- Ceci équivaut à :

$$J(t) = \frac{tM(t) - W(t)}{1+t}.$$

Nombre moyen de sites adjacents, voisins, boucles

Théorème

Les séries $J(t)$, $P(t)$, $L(t)$ valent :

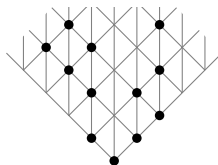
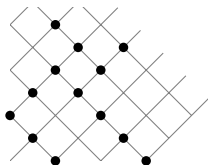
$$J(t) = \frac{1}{2t(1+t)} \left(1 - \frac{1 - 4t + t^2 + 4t^3}{\sqrt{1+t}(1-3t)^{3/2}} \right);$$

$$P(t) = \frac{1}{2t(1+t)} \left(-1 + t + t^2 + \frac{1 - 3t + t^2 + t^3 - 3t^4}{\sqrt{1+t}(1-3t)^{3/2}} \right);$$

$$L(t) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1 - 4t + t^2 + 4t^3}{\sqrt{1+t}(1-3t)^{3/2}} \right).$$

[Conway 1996, Bousquet-Mélou 1998]

Autres résultats



- Cette méthode fonctionne pour **d'autres réseaux carrés** (demi-animaux, etc.).
- Elle fonctionne pour des animaux à **plusieurs sources**.
- Elle fonctionne sur le **réseau triangulaire** (sauf périmètre).