Le développement de certaines périodes exponentielles dans une base entière

Boris Adamczewski

Institut Camille Jordan
CNRS & Université de Lyon
Boris.Adamczewski@math.univ-lyon1.fr
http ://math.univ-lyon1.fr/~adamczew

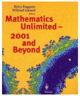
Préambule : ces nombres qui existent

—

Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages !
Immortel Archimède, artiste, ingénieur,
Qui de ton jugement peut priser la valeur ?
Pour moi ton problème eut de pareils avantages.

Périodes

Une période est un nombre complexe dont les parties réelles et imaginaires sont les valeurs d'intégrales absolument convergentes de fractions rationnelles à coefficients rationnels sur des domaines de $\mathbb{R}^n$ définis par des (in)égalités polynomiales à coefficients rationnels.



M. Kontsevich and D. Zagier, *Mathematics unlimited—2001 and beyond*, Springer-Verlag, 2001.

Exemples.

$$\sqrt{2} = \int_{0 \le 2x^2 \le 1} dx, \quad \pi = \int_{x^2+y^2 \le 1} dx dy, \quad \log 3 = \int_1^3 \frac{1}{x} dx,$$

$$\zeta(s) = \int_{1 > x_1 > x_2 > \ldots > x_s > 0} \frac{dx_1}{x_1} \cdots \frac{dx_{s-1}}{x_{s-1}} \cdots \frac{dx_s}{1 - x_s}.$$

Périodes exponentielles

Le nombre e n'est (conjecturalement) pas une période.

Une période exponentielle est définie comme une période mais on autorise l'intégrande à être multiplié par l'exponentielle d'une fonction algébrique.

Par exemple,

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)dx,$$

l'exponentielle d'un nombre algébrique ou les valeurs des fonctions de Bessel et de la fonction Gamma aux points rationnels sont des périodes exponentielles.

L'article de Kontsevitch et Zagier se termine par la remarque suivante :

"*Then all classical constants are periods in an appropriate sense*".

Développement d'une période dans une base entière

Dans cet exposé, on s'intéresse aux développements des périodes dans une base entière, par exemple au développement de $\sqrt{2}$, π ou e en base 10.

$$\sqrt{2} = 1.414\,213\,562\,373\,095\,048\,806\,887\cdots$$

$$\pi = 3.141\,592\,653\,589\,793\,238\,462\,643\cdots$$

$$e = 2.718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\cdots$$

Principe d'indépendance : par défaut, le développement d'une période dans une base entière devrait avoir les mêmes propriétés que celui d'un nombre choisi au hasard.

Attention, ce principe est valable... sauf évidence du contraire (pensez aux nombres rationnels).

La suite des chiffres d'un nombre « choisi au hasard »

Soit X_n la variable aléatoire réelle qui associe à un nombre x la valeur 1 si sa n-ième décimale est égale à 7 et 0 sinon.

Loi forte des grands nombres. Pour presque tout nombre réel x, on a :

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k(x) \to \frac{1}{10}\,.$$

Définition. Un nombre réel est dit simplement normal en base b si chaque chiffre apparaît dans son développement en base b avec la même fréquence $1/b$.

Théorème (Borel). Presque tout nombre réel est un nombre normal.

É. Borel, *Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques*, Rend. Circ. Mat. Palermo, 1909.

Complexité des nombres réels

—

L'approche dynamique.

Complexité des nombres réels

La fonction de complexité de la suite $\mathbf{a} = a_1 a_2 \cdots$ est définie par :

$$p(n, \mathbf{a}) = \mathrm{Card}\{(a_j, a_{j+1}, \ldots, a_{j+n-1}),\ j \geq 1\}.$$

Il s'agit d'une mesure classique de la complexité d'une suite en dynamique symbolique qui raffine la notion d'entropie topologique.

M. Morse and G. A. Hedlund, *Symbolic dynamics*, Amer. J. Math., 1938.

L'entropie topologique de la suite $\mathbf{a}$ est définie par :

$$h(\mathbf{a}) := \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \cdot \log p(n, \mathbf{a}) .$$

La complexité du nombre réel $\xi = 0.a_1 a_2 \cdots$ en base b est alors définie par $p(n, \xi, b) = p(n, \mathbf{a})$.

Si ξ est normal en base b, alors sa complexité est maximale :

$$p(n, \xi, b) = b^n, \quad \forall n \geq 1.$$

Théorème MH1. $\xi \in \mathbb{Q} \iff p(n, \xi, b)$ est bornée pour toute base b.

On comprend dès lors qu'il est difficile (mais intéressant) de minorer la complexité dans une base entière d'un nombre tel que $\zeta(5)$.

Morse et Hedlund ont également donné une première minoration non triviale valable pour tout nombre irrationnel.

Théorème MH2. Si ξ est un nombre irrationnel, alors $p(n, \xi, b)$ est strictement croissante et donc

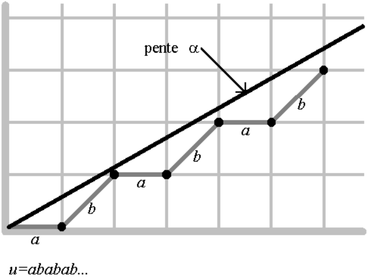
$$p(n, \xi, b) \geq n + 1, \qquad \forall n \geq 1.$$

Nombres sturmiens

Le théorème MH2 est en fait uniformément optimal : il existe des nombres pour lesquels

$$p(n,\xi,b) = n+1, \qquad \forall n \geq 1\,.$$

Ces nombres sont appelés nombres sturmiens car leur développement en base b est un mot sturmien.



L'étude des nombres sturmien se ramène à celle des nombres de la forme

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{b^{\lfloor nx+y \rfloor}}\,,$$

où x est irrationnel et $y > 0$ est un nombre réel.

Les périodes les plus simples

—

(Transcendance des nombres sturmiens)

Une approche fonctionnelle

À la suite de chiffres $\mathbf{a} = (a_n)$, on associe la fonction $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$.

Lorsque cette fonction analytique vérifie une équation fonctionnelle du type

$$f(z^d) = R(z, f(z)),$$

où R est une fraction rationnelle à coefficients rationnels, une approche classique due à Mahler, permet dans certains cas de démontrer la transcendance de $f(z)$ en tout point algébrique non nul z du disque unité complexe.

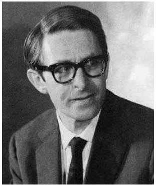
En particulier $f(1/b)$ est un nombre transcendant pour tout entier $b \geq 2$.

K. Mahler, *Arithmetische Eigenschaften der Lösungen einer Klasse von Funktionalgleichungen*, Math. Ann., 1929.

Pour les nombres sturmien, il faut en fait considérer des fonctions de deux variables du type

$$f_{x,y}(z_1, z_2) = \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\lfloor x n_1 + y \rfloor} z_1^{n_1} z_2^{n_2}.$$

Une approche « à la Liouville »



Théorème (Roth). Soient α un nombre algébrique et $\varepsilon > 0$. Alors, l'inégalité

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}},$$

n'a qu'un nombre fini de solutions rationnelles p/q.

K. F. Roth, *Rational approximations to algebraic numbers*, Mathematika, 1955.

Conséquence. Le nombre

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{10^{3^n}}$$

est transcendant.

Remarque. Dans le mot de Fibonacci, il n'y a jamais plus de deux 0 consécutifs...

Principe. Imaginons que le développement en base 10 du nombre réel ξ commence par

$$0.123\,735\,418\;\underbrace{923\,923\,923\,923}_{\text{motif redondant}}\;712\cdots$$

Alors, ξ est proche du nombre rationnel

$$\frac{p}{q} = 0.123\,735\,418\,\overline{923} = 0.123\,735\,418\,923\,923\,923\,923\cdots.$$

Plus précisément,

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{10^{21}} < \frac{1}{q^{1+\varepsilon}}$$

avec

$$\varepsilon = \frac{9}{12} > 0 \quad \text{et} \quad q = 10^9(10^3 - 1).$$

On obtient malheureusement souvent des approximations rationnelles de piètre qualité, mais leur dénominateur a une forme très particulière, à savoir :

$$10^r(10^s - 1)\,.$$

Une version p-adique du théorème de Roth

Théorème (Ridout, 1957). Soient ξ un nombre algébrique, $\varepsilon > 0$ un nombre réel et S un ensemble fini de nombres premiers. Alors, l'inégalité

$$\left(\prod_{\ell \in S} |p|_\ell \cdot |q|_\ell\right) \cdot \left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{2+\epsilon}}$$

n'a qu'un nombre fini de solutions rationnelles.

En choisissant $S = \{2, 5\}$ dans l'exemple précédent, on obtient

$$\underbrace{\left(\prod_{\ell \in S} |p|_\ell \cdot |q|_\ell\right)}_{\leq 10^{-9}} \cdot \left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{2+5/12}} \cdot$$

Ferenczi et Mauduit montrent ensuite que les mots sturmiens commencent par une infinité de motifs de la forme

$$U_n V_n^{2+\varepsilon},$$

où la suite $|U_n|/|V_n|$ est bornée et $\varepsilon > 0$ est fixé.

Transcendance des nombres sturmiens

Théorème (Ferenczi et Mauduit). Soient ξ un nombre algébrique irrationnel et $b \geq 2$ un entier. Alors,

$$\lim_{n\to\infty} p(\xi, b, n) - n = +\infty.$$

S. Ferenczi and Ch. Mauduit, *Transcendence of numbers with a low complexity expansion* , J. Number Theory, 1997.

Au-delà des nombres sturmiens

—

Plus d'arithmétique, moins de combinatoire

L'exposant diophantien d'un mot infini

L'exposant diophantien d'un mot infini $\mathbf{a} = a_1 a_2 \cdots$, noté $\mathbf{dio}(\mathbf{a})$, est défini comme le supremum des nombres réels ρ pour lesquels on peut trouver des préfixes de $\mathbf{a}$ arbitrairement longs de la forme

$$UV^w,$$

où $w \geq 1$ est un nombre réel et

$$|UV^w|/|UV| \geq \rho \cdot$$

B. Adamczewski and J. Cassaigne, *On Diophantine properties of real numbers generated by finite automata*, Compositio Math., 2006.

Ainsi,

$$1 \leq \mathbf{dio}(\mathbf{a}) \leq +\infty.$$

Il facile de vérifier que si $\mathbf{a}$ ultimement périodique, alors $\mathbf{dio}(\mathbf{a}) = +\infty$.

L'exposant diophantien doit s'interpréter comme une mesure de la périodicité d'un mot infini.

Un « théorème de Roth combinatoire »

Théorème ABL. Soient $\xi = 0.a_1a_2\cdots$ un nombre réel algébrique irrationnel et $\mathbf{a} = a_1a_2\cdots$. Alors, on a $\mathbf{dio}(\mathbf{a}) = 1$.

Il s'agit d'une conséquence du résultat diophantien suivant.

Théorème. Soient α un nombre algébrique, b un entier et $\varepsilon > 0$. Alors, il n'existe qu'un nombre fini de nombres rationnels p/q tels que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{1+\varepsilon}}$$

et tels que q soit de la forme $b^r(b^s - 1)$.

Version « formes linéaires à coefficients algébriques ». Il n'existe donc qu'un nombre fini de nombres rationnels de la forme $p/b^r(b^s - 1)$ tels que

$$|L(b^{r+s}, b^r, p)| := |b^{r+s}\alpha - b^r\alpha - p| < \frac{1}{q^{\varepsilon}},$$

où $q = b^r(b^s - 1)$.

Le théorème du sous-espace de Schmidt

Au début des années 70, W. M. Schmidt a obtenu une généralisation spectaculaire du théorème de Roth qui s'exprime en termes d'approximation simultanée de formes linéaires à coefficients algébriques.

W. M. Schmidt, Diophantine approximation, Lecture Notes in Math., Springer, 1980.

Théorème. Soient $m \geq 2$ un entier, $\varepsilon > 0$ et S un ensemble fini de nombres premiers. Soient $L_1, \ldots, L_m$ des formes linéaires de m variables à coefficients algébriques et linéairement indépendantes. Alors, les solutions $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{Z}^m$ de l'inégalité

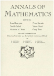
$$\left(\prod_{i=1}^{m} \prod_{\ell \in S} |x_i|_\ell \right) \cdot \prod_{i=1}^{m} |L_i(\mathbf{x})| \leq (\max\{|x_1|, \ldots, |x_m|\})^{-\varepsilon}$$

appartiennent à une union finie de sous-espaces propres de $\mathbb{Q}^m$.

Complexité des nombres algébriques

Théorème. Soient ξ un nombre algébrique irrationnel et $b \geq 2$ un entier. Alors,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{p(\xi, b, n)}{n} = +\infty.$$



B. Adamczewski and Y. Bugeaud, *On the complexity of algebraic numbers I. Expansions in integer bases*, Annals of Math., 2007.

Périodes transcendantes

—

Moins d'arithmétique, plus de combinatoire.

Plus de combinatoire...

V. Berthé, C. Holton and L. Q. Zamboni, *Initial powers of Sturmian words*, Acta Arith., 2006.

Les travaux de Berthé, Holton et Zamboni permettent de prouver le résultat suivant.

Théorème. Soit $\mathbf{a}$ un mot infini tel que la suite $(p(n, \mathbf{a}) - n)_{n \geq 1}$ soit bornée. Alors,

$$\mathbf{dio}(\mathbf{a}) > 2\,.$$

Outils : combinatoire fine des mots sturmiens (développement en fraction continue du paramètre x et utilisation de la numération d'Ostrowski pour le paramètre y).

... moins d'arithmétique

Théorème. Si l'exposant d'irrationalité de ξ est égal à 2, alors

$$\lim_{n\to\infty} p(\xi, b, n) - n = +\infty.$$

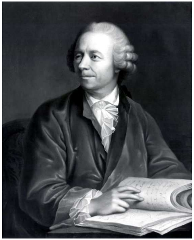
B. Adamczewski, *On the expansion of some exponential periods in an integer base*, Math. Ann., 2010.

L'exposant d'irrationalité de ξ est égal à 2 si pour tout $\varepsilon > 0$, l'inégalité

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}},$$

n'a qu'un nombre fini de solutions rationnelles p/q.

On a plus besoin d'information p-adique !



$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}$$

La formule d'Euler implique que l'exposant d'irrationnalité de e est égal à 2.

On en déduit le résultat suivant.

Corollaire. On a $\lim_{n \to \infty} p(n, e, b) - n = +\infty$, pour tout entier $b \geq 2$.

Application à d'autres périodes exponentielles

- Il est en fait possible de remplacer le nombre e par :

$$e^a,\ a \in \mathbb{Q}, a \neq 0;$$

$$\tan\left(\frac{1}{a}\right), \sqrt{a}\tan\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right), \frac{1}{\sqrt{a}}\tan\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right);$$

$$\tanh\left(\frac{2}{a}\right),\ a \in \mathbb{N}, a \neq 0, \sqrt{\frac{v}{u}}\tanh\left(\frac{1}{\sqrt{uv}}\right),\ u, v \in \mathbb{N}, uv \neq 0;$$

$$\frac{J_{(p/q)+1}(2/q)}{J_{p/q}(2/q)},\ p/q \in \mathbb{Q},\ \text{où } J_\lambda(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iz/2)^{2n}}{n!\,\Gamma(\lambda+n+1)}$$

désigne la fonction de Bessel de première espèce.

- Opérations du type $\times\mathbb{Q} + \mathbb{Q}$.

- On peut aussi faire agir $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ sur n'importe lequel de ces nombres ($(a\xi + b)/(c\xi + d)$ avec $|ad - bc| = 1$).

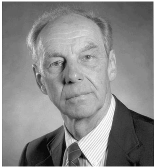
De façon surprenante, on ne sait pas améliorer le théorème de Morse et Hedlund pour des périodes comme π, $\log 2$ ou $\zeta(3)$!

Complexité(s) des nombres réels

—

Une digression sur l'approche algorithmique

Complexité algorithmique : le problème d'Hartmanis et Stearns



En 1965, Hartmanis et Stearns ont développé l'aspect quantitatif de la notion de calculabilité introduite par Turing. Ils ont introduit la notion de complexité algorithmique en temps pour les nombres réels calculables.

J. Hartmanis and R. E. Stearns, *On the computational complexity of algorithms*, Trans. Amer. Math. Soc., 1965.

Définition. Un nombre réel est dit calculable en temps $T(n)$ s'il existe une machine de Turing qui produit les n premiers chiffres de son développement binaire (ou dans une base entière) en au plus $O(T(n))$ opérations.

Problème. Existe-t-il des nombres algébriques irrationnels calculables en temps réel par une machine de Turing ?

La conjecture de Cobham

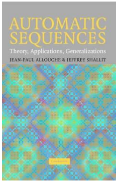
En 1968, Cobham proposa de restreindre le problème de Hartmanis et Stearns au cas d'une classe de machines de Turing simples qui calculent en temps réel : les automates finis.

Conjecture. La suite des chiffres du développement d'un nombre algébrique irrationnel dans une base entière est trop complexe pour pouvoir être engendrée par un automate fini.

A. Cobham, *On the Hartmanis-Stearns problem for a class of tag machines*, Symposium on Switching and Automata Theory, 1968.

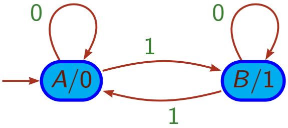
De façon équivalente, il faut donc démontrer que tout nombre irrationnel engendré par un automate fini est transcendant.

Nombres réels engendrés par automates finis



Une suite (a_n) est k-automatique, s'il existe un automate fini qui, lorsqu'on lui donne en entrée le développement de l'entier n en base k, produit en sortie le symbole a_n.

L'exemple le plus célèbre est la suite de Thue–Morse (t_n) définie par $t_n = 0$ si la somme des chiffres binaires de n est paire et $t_n = 1$ si cette somme est impaire.



On obtient :

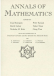
$$t_0 t_1 t_2 t_3 \cdots = 01101001100101 \cdots .$$

Un nombre réel est engendré par un automate fini si son développement dans une base entière est automatique.

Confirmation de la conjecture de Cobham

L'approche fondée sur l'exposant diophantien et le théorème du sous-espace permet de confirmer la conjecture de cobham.

Théorème. Le développement d'un nombre algébrique irrationnel dans une base entière ne peut être engendré par un automate fini.



B. Adamczewski and Y. Bugeaud, *On the complexity of algebraic numbers I. Expansions in integer bases*, Annals of Math., 2007.