

Moments des matrices aléatoires et marches multiples

Oleksiy Khorunzhiy
LMV UVSQ

30 mars 2009, INRIA

- 1 L'ensemble de Wigner et les moments
 - La loi du demi-cercle
 - Les régimes asymptotiques
 - Conjecture d'universalité
- 2 Moments et marches paires
 - Trajectoires et marches
 - Codage selon Füredi et Komlós
 - Classes de Sinai et Soshnikov
 - Instants de BTS
 - Chemins de Dyck, moments exponentiels
- 3 Résumé

Matrices de l'ensemble de Wigner

Matrice : réelle symétrique

$$A_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} a_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n$$

- **Eléments** : variables aléatoires indépendantes $\{a_{ij}, i \leq j\}$
- **Propriétés** : centrées $\mathbf{E}a_{ij} = 0$, de variance $v^2 = \mathbf{E}a_{ij}^2$.
- $\{A^{(n)}\}$ *l'ensemble de Wigner* des matrices aléatoires

La loi du demi-cercle (E. Wigner '55 et '58)

La fonction normalisée de comptage des valeurs propres

$$\sigma_n(\lambda) = \frac{1}{n} \#\{j : \lambda_j^{(n)} \leq \lambda\} \rightarrow \sigma_w(\lambda), \quad n \rightarrow \infty$$

La distribution du demi-cercle

$$\sigma'_w(\lambda) = \frac{1}{2\pi v^2} \sqrt{4v^2 - \lambda^2} \cdot I_{[-2v, 2v]}(\lambda)$$

$$\int \lambda^p d\sigma_n(\lambda) \rightarrow \int \lambda^p d\sigma_w(\lambda), \quad n \rightarrow \infty$$

Moments de $d\sigma_n(\lambda)$

$$\int \lambda^p d\sigma_n(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\lambda_j^{(n)}\right)^p = \frac{1}{n} \text{Tr} \left(A^{(n)}\right)^p$$

Convergence des moments vers les moments de σ_w

$$\mathbf{E} \left\{ \frac{1}{n} \text{Tr} \left(A^{(n)}\right)^p \right\} \rightarrow m_{2s} = \frac{(2s)!}{s!(s+1)!} v^{2s}, \quad n \rightarrow \infty, \quad p = 2s$$

sous la condition que

- "random sign matrix" $a_{ij} = \pm 1$ (Wigner '55)
ou bien
- la loi de a_{ij} est symétrique, $\mathbf{E}(a_{ij})^{2k+1} = 0$ (Wigner '58)

Valeurs propres extrêmes

Le support de $d\sigma_w$ est $[-2\nu, 2\nu]$. Quel est le comportement de $\lambda_{\max}^{(n)}$?

$$\begin{aligned} P\left(\lambda_{\max}^{(n)} \geq 2\nu(1 + \varepsilon)\right) &\leq \frac{\mathbf{E}\left(\lambda_{\max}^{(n)}\right)^{2s}}{(2\nu(1 + \varepsilon))^{2s}} \leq \frac{\mathbf{E}\operatorname{Tr}(A^{(n)})^{2s}}{(2\nu(1 + \varepsilon))^{2s}} \\ &= n \frac{M_{2s}^{(n)}}{(2\nu(1 + \varepsilon))^{2s}} \end{aligned}$$

S. Geman (suivant U. Grenander) : si on montre que

$$M_{2s}^{(n)} \leq (2\nu(1 + \delta))^{2s} \quad \text{lorsque } n, s \rightarrow \infty,$$

alors

$$P\left(\lambda_{\max}^{(n)} \geq 2\nu(1 + \varepsilon)\right) \leq n \left(\frac{1 + \delta}{1 + \varepsilon}\right)^{2s} \rightarrow 0.$$

Bornes asymptotiques

$$M_{2s_n}^{(n)} \leq m_{2s_n} (1 + \delta_n)^{2s_n}, \quad n \rightarrow \infty, (\delta_n \rightarrow 0)$$

- S. Geman '80 ; Z.-D. Bai et al. ('88-'94) : $s_n = O(\log n)$
- Z. Füredi et J. Komlós '81 : $s_n = O(n^{1/6-\epsilon})$
- Ya. Sinaï et A. Soshnikov '98 : $1 \ll s_n \ll n^{1/2}$, puis $s_n \ll n^{2/3}$
- A. Soshnikov '99 : $s_n = O(n^{2/3})$.

Conjecture d'universalité de F. Dyson

A. Soshnikov (CMP'99)

Borne universelle pour l'ensemble de Wigner

Soit $\{A^{(n)}\}$ dont a_{ij} ont la loi symétrique sous-gaussienne. Alors la borne

$$M_{2s_n}^{(n)} \leq m_{2s_n} e^{Ct^3 b(t)}, \quad n \rightarrow \infty, \quad s_n = tn^{2/3}$$

ne depend pas des valeurs de $U_{2k} = \mathbf{E}(a_{ij})^{2k} \leq (C'k)^k, \quad k \geq 2.$

Mais l'histoire n'était pas finie.

A. Ruzmaikina (CMP'06), autres auteurs... (à suivre?)

Moments et les sommes sur les trajectoires

L'approche de E. Wigner :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(\frac{1}{n} \operatorname{Tr} (A^{(n)})^{2s} \right) &= \frac{1}{n^{s+1}} \sum_{i_0, i_1, \dots, i_{2s-1}} \mathbf{E} (a_{i_0, i_1} \cdots a_{i_{2s-1}, i_0}) \\ &= \frac{1}{n^{s+1}} \sum_{l_{2s} \in \mathcal{I}_{2s}} P(l_{2s}), \end{aligned}$$

$l_{2s} = (i_0, i_1, \dots, i_{2s-1}, i_0)$ - une trajectoire sur $[1, \dots, n]^{2s}$,

$P(l_{2s})$ - le poids d'une trajectoire fermée l_{2s} de $2s$ pas.

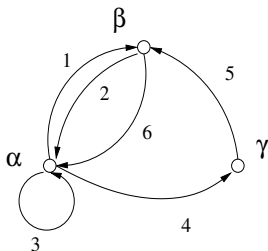
Classes d'équivalence des trajectoires l_{2s}

Classes d'équivalence sont marquées par les marches w_{2s} de $2s$ pas.

Chaque w_{2s} est une suite de $2s + 1$ symboles $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

$$l_6 = (5, 2, 5, 5, 7, 2, 5) \in \mathcal{C}(w_6), \quad w_6 = (\alpha, \beta, \alpha, \alpha, \gamma, \beta, \alpha)$$

$$l'_6 = (1, 2, 1, 1, 8, 2, 1) \in \mathcal{C}(w_6), \quad w_6 = (\alpha, \beta, \alpha, \alpha, \gamma, \beta, \alpha)$$



Classes d'équivalence des trajectoires l_{2s}

Classes d'équivalence sont marquées par les marches w_{2s} de $2s$ pas.

Chaque w_{2s} est une suite de $2s + 1$ symboles $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

$$l_6 = (5, 2, 5, 5, 7, 2, 5) \in \mathcal{C}(w_6), \quad w_6 = (\alpha, \beta, \alpha, \alpha, \gamma, \beta, \alpha)$$

$$l'_6 = (1, 2, 1, 1, 8, 2, 1) \in \mathcal{C}(w_6), \quad w_6 = (\alpha, \beta, \alpha, \alpha, \gamma, \beta, \alpha),$$

Le cardinal de la classe $\mathcal{C}(w_{2s})$ est

$$|\mathcal{C}(w_{2s})| = n(n-1) \cdots (n-V+1), \quad V = |\mathcal{V}(w_{2s})|$$

V étant le nombre des sommets créés pas la marche w_{2s}
= le nombre des sommets dans le (multi)graphe $g(w_{2s})$.

Comme $\mathbf{E}a_{jj} = 0$, chaque arête $\{\alpha, \beta\}$ doit être vu plus qu'une fois

Sommes sur les marches w_{2s}

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(\frac{1}{n} \text{Tr} (A^{(n)})^{2s} \right) &= \frac{1}{n^{s+1}} \sum_{w \in \mathcal{W}_{2s}} P(w) |\mathcal{C}(w)| \\ &= \frac{1}{n^{s+1}} \sum_{w \in \mathcal{W}_{2s}} P(w) n(n-1) \cdots (n - V(w) + 1) \\ &= \frac{1}{n^{s+1}} \sum_{w \in \mathcal{W}_{2s}} P(w) n^{V(w)} (1 + o(1)), \quad \text{pour } s \text{ fixé} \end{aligned}$$

La contribution principale

On a $V(w) = s + 1$ et $|\mathcal{E}(w)| \leq s$; conclusion : le graphe $g(w)$ est *un arbre plan enraciné de s arêtes*

Les nombres de Catalan

Donc

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(\frac{1}{n} \operatorname{Tr} (A^{(n)})^{2s} \right) &= \frac{1}{n^{s+1}} \sum_{\tau \in \mathcal{T}_s} P(\tau) n^{s+1} (1 + o(1)) \\ &= \sum_{\tau \in \mathcal{T}_s} P(\tau) (1 + o(1)) = v^{2s} \frac{1}{s+1} C_{2s}^s (1 + o(1)) \\ &= v^{2s} \frac{(2s)!}{s!(s+1)!} (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty, s \text{ fixé} \end{aligned}$$

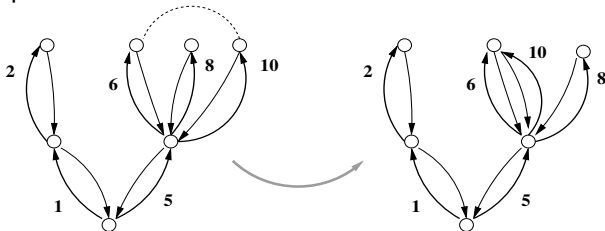
La limite $n \rightarrow \infty, s \rightarrow \infty$

Si le graphe de w_{2s} n'est pas un arbre :

- le nombre de sommets est moins que $s + 1$,
d'où les facteurs $\frac{1}{n}$, mais

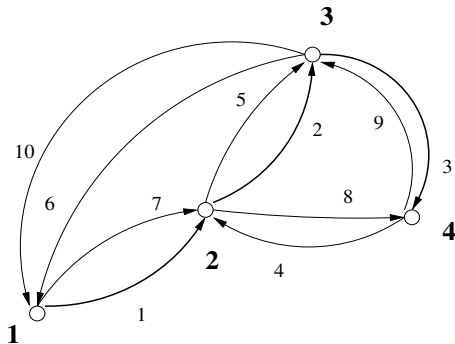
- la marche peut créer des cycles, donc on aura plus de choix pour les pas

Par exemple :



Un exemple de marches

Les marches peuvent avoir une structure plus compliquée :



Codage et le nombre de codes

Question : comment calculer le nombre des marches ?

Proposition :

la famille des marches \mathcal{W}_{2s} est encodée en suites des symboles, puis on estime le nombre de suites (de codes) possibles

Problème :

trouver un codage convenable
qui soit suffisamment optimal = donne des bornes raisonnables

Codage par l'arbre couvrant

Z. Füredi et J. Komlós :

- la marche w_{2s} engendre un (multi)graphe $g(w_{2s}) = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$
on a : le cardinal $|\mathcal{E}(w_{2s})| = 2s$ et le cardinal $|\mathcal{V}(w_{2s})| \leq s + 1$.
- on construit l'arbre (multi-arbre) T couvrant $g(w_{2s})$
à l'aide des arêtes de premiers arrivées aux sommets $\alpha \in \mathcal{V}(w_{2s})$;

On attribue aux arêtes $\{\alpha, \beta\}$ de l'arbre T les signes :

- " + " pour le premier passage (α, β) et
- " - " pour le deuxième passage $\{\alpha, \beta\}$.

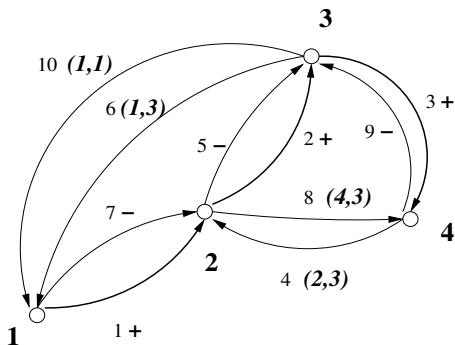
On attribue (u, v) à chaque arête $(\gamma, \delta) \in g(w_{2s})$

- qui effectue le k -ième passage de $\{\alpha, \beta\} \in \mathcal{E}(T)$, $k \geq 3$,
- ou bien qui n'appartient pas au T :

u = le sommet de "l'entrée en arbre", $u = \delta \in \mathcal{V}(T)$

v = le sommet de la sortie de w de l'arbre T après cette entrée

Codage de Füredi-Komlós



$$C(w) = (+, +, +, (2, 3), -, (1, 2), -, (4, 3), -, (1, 1)).$$

Le nombre de codes de F.-K.

Le nombre de codes de Füredi-Komlós possibles pour les marches au $p + 1$ sommets est estimé par :

- le choix de $2p$ pas parmi $2s$ pas borné par C_{2s}^{2p} ;
- le choix des places pour p signes " + " donné par $\frac{1}{p+1} C_{2p}^p$;
- le choix des valeurs pour u et v borné par $(p + 1)^{2s-2p} \cdot (p + 1)^{2s-2p}$.

La contribution de trajectoires de telle classe dans le cas $\mathbf{E}a_{ij}^2 = v^2$ et $|a_{ij}| \leq K$ est bornée par

$$v^{2p} K^{2s-2p} n(n-1) \cdots (n-p) \cdot C_{2s}^{2p} \cdot \frac{1}{p+1} C_{2p}^p \cdot (p+1)^{2(s-p)} \equiv R_{n,s,p}.$$

Borne asymptotique

Il est facile à voir que

$$R_{n,s,p-1} = R_{n,s,p} \times O\left(\frac{s^6}{n}\right),$$

avec le maximum en $p = s$

$$R_{n,s,s} = v^{2s} \frac{(2s)!}{s!(s+1)!} \cdot n^{s+1}(1 + o(1)), \quad s \ll n^{1/6},$$

ce qui nous ramène à la borne asymptotique annoncée

$$M_{2s_n}^{(n)} \leq m_{2s_n} (1 + \delta_n)^{2s_n}, \quad n \rightarrow \infty, \quad s_n = O(n^{1/6-\epsilon})$$

Principe du codage de F.-K.

A quoi ça sert, le couple (u, v) ? Plus précisément, à quoi sert la deuxième variable v ?

Elle détermine (s'il y a un choix) quel arête on doit fermer par le signe " - " qui suit ce couple (u, v) dans le code C .

Par exemple, prenons un code sans v :

$$\tilde{C} = (+, +, (1,), -, +, (1,), (2,), -, (1,), (2,), -, (1,))$$

On voit deux marches w' et w'' possibles des codes

$$C' = (+, +, (1, 4), -, +, (1, 3), (2, 3), -, (1, 4), (2, 4), -, (1, 1))$$

et

$$C'' = (+, +, (1, 4), -, +, (1, 4), (2, 4), -, (1, 3), (2, 3), -, (1, 1))$$

Propriétés du code

Deux conditions évidentes :

- chaque w engendre une seule suite $C = C(w)$ des signes
" + ", " - ", (u, v) ;
- chaque suite C engendre une seule marche w (si elle existe)

La dernière proposition n'est pas (n'était pas) démontrée dans le papier [FK '81].

De plus, il semble qu'on aura des complications avec ce problème.

Non-unicité des marches

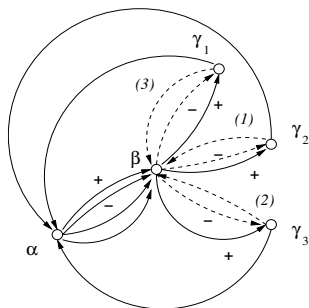
Rapellons-nous que la deuxième variable v sert pour indiquer quel arête on ferme par le signe " - " ;

cette indication utilise le sommet de la sortie de l'arbre T .

Et si on décide de faire, avant de sortir de T , plusieurs pas le long des arêtes marqués par " - " ?

La situation se tourne mal...

Exemple de marches



Supposons qu'on se trouve dans le sommet β ayant plusieurs arêtes sortants (β, γ_i) marqués par "+" et non-fermés par "-".

On ferme un des (β, γ_j) et on revient à β , puis on ferme un autre (β, γ_k) et on revient à β .

La suite correspondante de F-K ne distingue pas j et k .

Compléter le code de F-K

Conclusion :

Il existe des codes de F-K C et des marches w, w' tels que $C(w) = C(w')$ et $w \neq w'$

Question ouverte :

Comment peut-on compléter le code de Füredi-Komlós pour qu'il reste simple et efficace ?

Pourquoi garder le code de F-K ?

A) Zh.-D. Bai *et al* : les graphes basés essentiellement sur le même arbre couvrant, $T_1 = T$

B) Ya. Sinaiï et Soshnikov : méthode différente, plus puissante, mais dans les cadres plus étroites : la loi de a_{ij} est symétrique

A son tour, les travaux de Sinaiï et Soshnikov et de Ruzmaikina ont des difficultés fatales avec le même type de graphes qui possèdent des sommets avec un grand nombre des arêtes "off-spread + " non-fermés

Dans [O.K. et V. Vengerovsky '08] on a complété les preuves de [SS,S,R].

BTS-instants

Dans le coeur du problème se trouve un phénomène qui nous ramène par nécessité à la notion de l'instant du temps où la structure arboresque de la marche est cassée ("instant of broken tree structure" = "BTS-instant").

Ayant effectué plusieurs BTS-instants pendant son cours, la marche peut créer des grands "off-spreads" des arêtes non-fermés sans risque d'avoir utilisé un arbre de Catalan atypique (ayant des sommets de grande degré).

Une notion similaire au BTS-instant peut être introduite pour étudier les graphes de "positive off-spread" dans le cadres de l'approche de Füredi-Komlós [O.K., travail en cours]

Conclusion :

Les résultats de Furédi-Komlós, de Sinai-Soshnikov et de Soshnikov sont vrais, mais il faut les compléter par l'analyse des marches avec un nombre de BTS-instants

Les observations similaires

Des cycles dans lesquels l'arête "primaire" de l'arbre (marqué par " – " dans le code de F-K) est suivi par l'arête secondaire (marqué par (u, v)) ont été observée indépendamment dans [O. Feldheim et S. Sodin, décembre 08]
A universality result for the smallest eigenvalues of certain sample covariance matrices, Preprint arXiv :0812.1961
(marches irréductibles = marches sans arêtes "aller-retour").

Marches paires

Le code de F-K concerne les marches multiples \Rightarrow chaque arête doit être passé plus qu'une fois.

Ya. Sinaiï et A. Soshnikov ont étudié les matrices dont éléments a_{ij} ont la loi de probabilité symétrique.

Donc chaque arête $\{\alpha, \beta\}$ doit être vu un nombre paire de fois.

Définition

Les marches fermées w_{2s} dont chaque arête est vu un nombre paire de fois sont appelées *les marches paires*.

On peut introduire les instants marqués et les instants de l'auto-intersection.

Les notions fondamentales

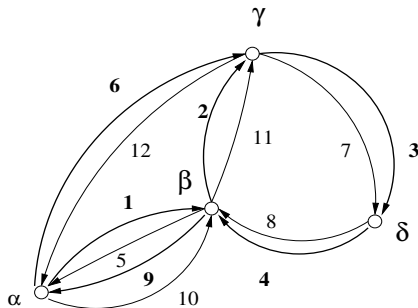
Instants marqués = quand on voit l'arête donnée pour la première, troisième, cinquième, etc. . . .fois.

Arêtes marqués et non-marqués - les analogues des arêtes " + " et de " - " de F-K

Instants d'auto-intersection = quand on arrive au sommet donné α deux, trois, quatre fois, etc. . . .par des arêtes marqués

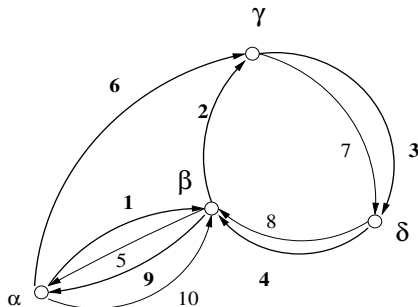
Sommet ouvert de l'auto-intersection = quand on arrive à α ou se termine un autre arête marqué et non-fermé ;
il y a plusieurs possibilités pour continuer la marche par les arêtes non-marqués (voir les arêtes " - ")

Un exemple de marches paires



Les instants de BTS

BTS-instant = quand le pas marqué p est suivi par un pas non-marqué qui ne ferme pas ce p



BTS-instants : 5, 7

Classes d'équivalence des marches

La marche w_{2s} appartient à une classe de Sinai-Soshnikov $C(\bar{\nu})$, $\bar{\nu} = (\nu_2, \nu_3, \dots, \nu_s)$, si le graphe de w_{2s} possède

- ν_2 sommets de degré d'auto-intersection $\kappa = 2$;
- ν_3 sommets de degré $\kappa = 3$;
- ...
- ν_s sommets de degré $\kappa = s$.

Le nombre de marches

Le nombre de marches de même classe $C(\bar{\nu})$ est borné par

$$\left(\frac{s^2}{2!}\right) \cdot \left(\frac{s^3}{3!}\right) \cdots \left(\frac{s^s}{s!}\right) \cdot W(\bar{\nu}),$$

ici $W(\bar{\nu})$ estime le nombre de choix des sommets où on arrive par les arêtes non-marqués.

Le nombre de trajectoires l_{2s} est estimé par

$$\frac{(2s)!}{s!(s+1)!} n(n-1) \cdots (n-|\mathcal{V}|+1) \cdot \frac{1}{\nu_2!} \left(\frac{s^2}{2n}\right)^{\nu_2} \cdots \frac{1}{\nu_s!} \left(\frac{s^s}{s!n^{s-1}}\right)^{\nu_s} \cdot W(\bar{\nu})$$

Dans $[SS, S]$, on trouve beaucoup des astuces techniques pour se débrouiller avec cette expression.

Dans son papier [CMP '06], A. Ruzmaikina a observé que certaine borne d'une partie de l'ensemble des trajectoires n'était pas correctement démontré des [S].

Elle a proposé un chemin pour compléter la preuve...

mais finalement le papier [R] souffre de même défaut d'inattention que [SS] et [S].

En gros, on a supposé que le graphe $g(w_{2s})$ peut contenir un sommet β de grand degré

des arêtes marqués sortants dans les deux cas suivants :

- lorsque le chemin de Dyck (plus presisement, son graphe) contient un sommet de grand degré et
- lorsque β est un sommet de grand degré κ des arêtes entrants.

Mais il y a une troisième possibilité : quand w_{2s} contient un grand nombre des instants de BTS.

Le rôle des instants de BTS

Les instants de BTS produisent des "shifts" dans la structure arboresque de $w_{2s}(\theta)$ par rapport au chemin de Dyck d'origine θ .

Cela permèts "d'apporter" au sommet donné β des arêtes provenant des parties différents de θ .

Ce qui demande l'analyse plus profonde et plus compliqué des marches w_{2s} et des classes $C(\bar{\nu})$.

Auto-intersections ouvertes et instants de BTS

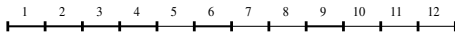
La notion de l'instant de BTS ajoute de l'information à la notion de l'instant de l'auto-intersection ouverte introduite par Sinai et Soshnikov.

Plus précisément : il peut arriver que la marche arrive au sommet ouvert de l'auto-intersection, mais la structure arboresque n'est pas cassé.

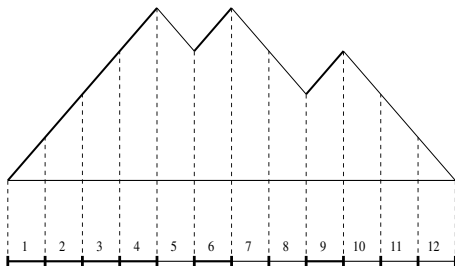
Important : le nombre de BTS-instants est borné par le nombre des instants des auto-intersections ouvertes. Cela donne le moyen pour contrôler le nombre de marches correspondantes.

Chemins de Dyck

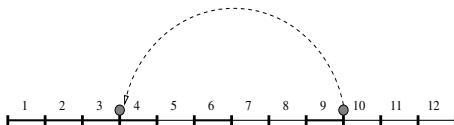
Une marche paire de $2s$ pas : s pas marqués et s pas non-marqués



D'ou la structure du chemin de Dyck.

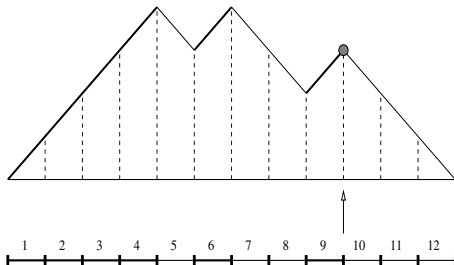


Dans le sens inverse, on commence avec le choix d'un chemin de Dyck et on détermine les instants (marqués) d'auto-intersection.



Auto-intersections ouvertes

Si l'instant d'auto-intersection est ouvert, on doit tomber sur le sommet d'un arête marqué non-fermé à cet instant.



Le nombre d'instants possibles pour créer l'auto-intersection ouverte est borné par le nombre de pas marqués non-fermés à cet instant, donc borné par l'hauteur maximale $M(\theta)$ du chemin de Dyck θ_{2s} qu'on utilise.

La borne pour les moments exponentiels de maximum

Dans [SS,S,R] et aussi dans [O.K. et V.Vengerovsky '08], on a utilisé la proposition admise :

La borne supérieure pour les moments exponentiels de $M(\theta)$

Soit Θ_{2s} l'ensemble des chemins de Dyck de $2s$ pas. Pour $\theta \in \Theta_{2s}$, on pose $M(\theta) = \max_{1 \leq t \leq 2s} \theta(t)$. Alors

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{(2s)!/s!(s+1)!} \sum_{\theta \in \Theta_{2s}} \exp\left(\lambda \frac{M(\theta)}{\sqrt{s}}\right) = B(\lambda) < +\infty$$

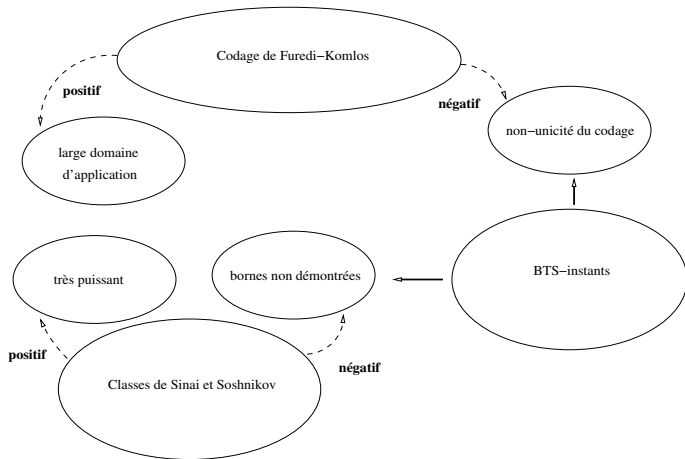
Preuve : tout récemment dans [O.K. et J.-F. Marckert '09]

Conclusions

Conclusion :

Il est très intéressant d'étudier les marches fermées multiples ; dans ces études, le codage le plus optimal possible pourrait être très utile

Le schéma de l'exposé d'aujourd'hui



Bibliographie

[W'55] E. Wigner, Characteristic vectors of bordered matrices with infinite dimensions, *Ann. Math.* **61** (1955) 548-465

[W'58] E. Wigner, On the distribution of the roots of certain symmetric matrices, *Ann. Math.* **67** (1958) 325-327

[G] S. Geman, A limit theorem for the norm of random matrices, *Ann. Probab.* **8** (1980) 252-261

[FK] Z. Füredi et J. Komlós, The eigenvalues of random symmetric matrices, *Combinatorica* **1** (1981) 233-241

[BY] Z.-D. Bai and Y. Q. Yin, Necessary and sufficient conditions for the almost sure convergence of the largest eigenvalue of Wigner matrices, *Ann. Probab.* **16** (1988) 1729-1741

Bibliographie

- [SS] Ya. Sinaiï and A. Soshnikov, A refinement of Wigner's semicircle law in a neighborhood of the spectrum edge for random symmetric matrices, *Func. Anal. Appl.* **32** (1998) 114-131
- [S] A. Soshnikov, Universality at the edge of the spectrum in Wigner random matrices, *Commun. Math. Phys.* **207** (1999) 697-733
- [R] A. Ruzmaikina, Universality of the edge distribution of the eigenvalues of Wigner random matrices with polynomially decaying distribution fo entries, *Commun. Math. Phys.* **261** (2006) 277-296
- [KV] O.K. and V. Vengerovsky, Even walks and estimates of high moments of large Wigner random matrices, *arXiv :0806.0157*

Bibliographie

[FS] O. N. Feldheim and S. Sodin, A universality result for the smallest eigenvalues of certain sample covariance matrices, *arXiv :0812.1961*

[KM] O. K. and J.-F. Marckert, Uniform bounds for exponential moments of maximum of Dyck paths, *arXiv :0902.1229*

Remerciements

Je vous remercie pour l'intérêt à ces travaux
(et spécialement, Prof. B. Chauvin)