

La fonction à trois points des quadrangulations planaires

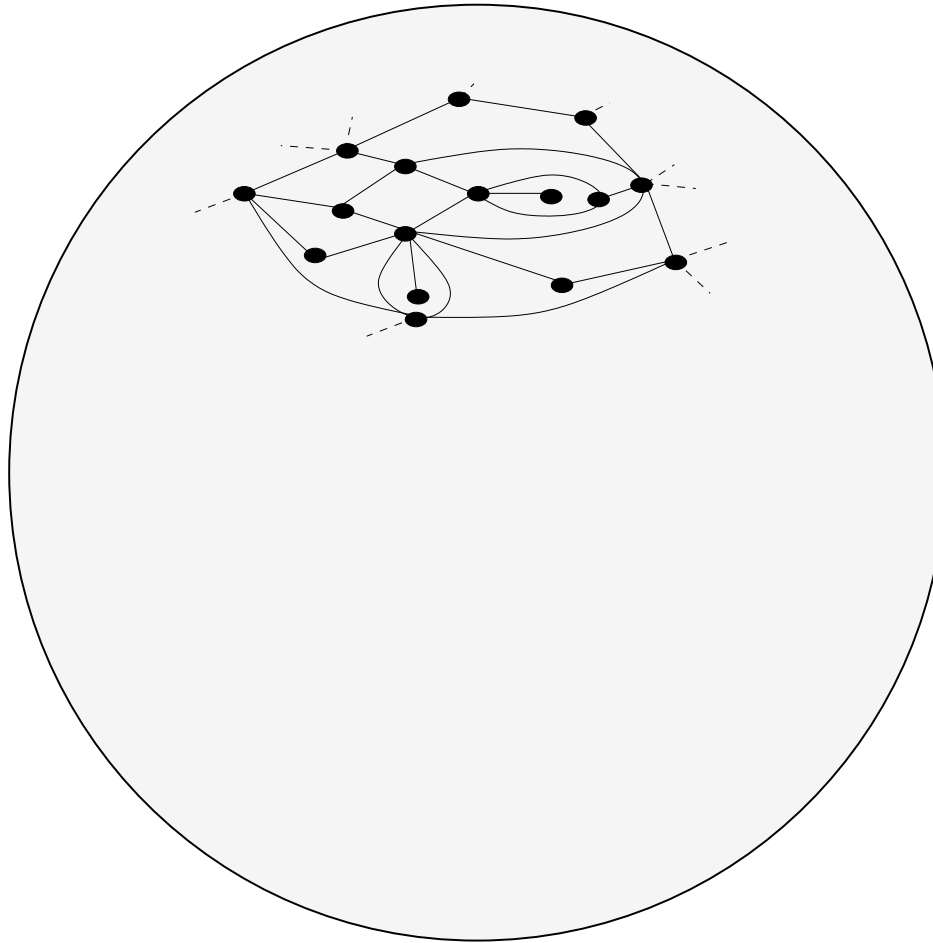
travail en commun avec J. Bouttier

J. Stat. Mech. (2008) P07020, arXiv:0805.2355

Institut de Physique Théorique
CEA Saclay, France

quadrangulations planaires

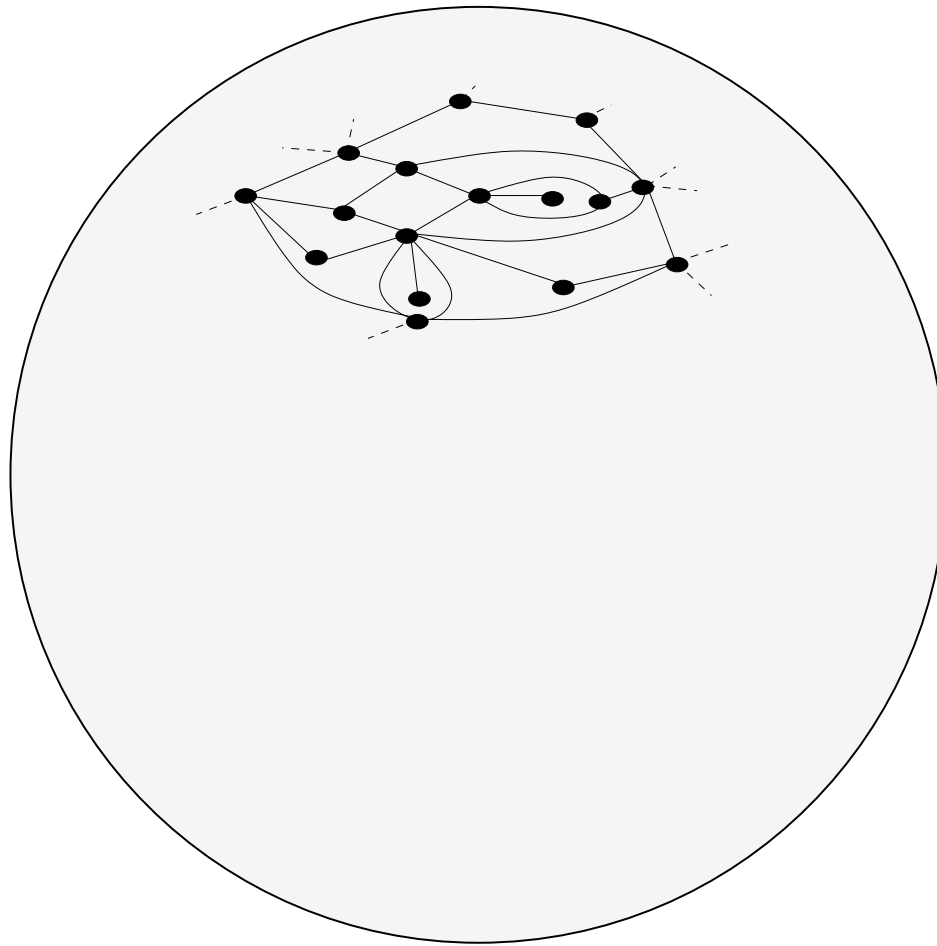
quadrangulation planaire \equiv carte dessinée sur la sphère dont toutes les faces sont des **carrés** (\equiv degré 4, simplement connexes)



considérée à déformations continues près

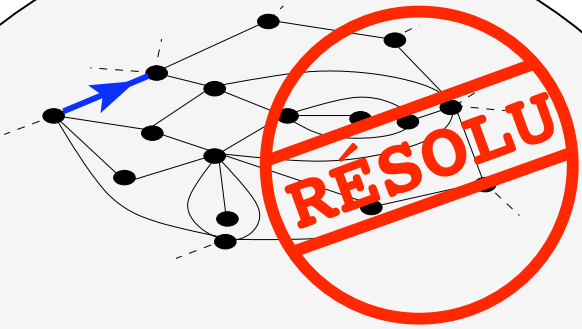
énumération

énumérer les quadrangulations planaires à n faces



énumération

énumérer les quadrangulations planaires à n faces

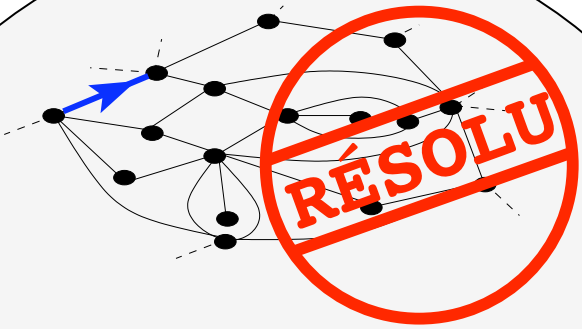


A diagram illustrating a planar quadrangulation with n faces. The diagram shows a network of black dots (vertices) connected by black lines (edges). A blue arrow points to a specific vertex on the left. A large red stamp with the word "RÉSOLU" (SOLVED) is overlaid on the diagram, indicating that the enumeration problem has been solved.

$$\frac{2}{(n+1)(n+2)} 3^n \binom{2n}{n}$$

énumération

énumérer les quadrangulations planaires à n faces



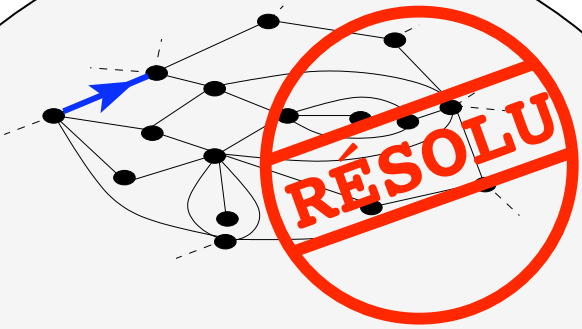
The diagram shows a planar quadrangulation with 10 vertices and 14 edges. A blue arrow points to the left edge of the top-left square. A red stamp with the word "RÉSOLU" is placed over the right side of the diagram.

$$\frac{2}{(n+1)(n+2)} 3^n \binom{2n}{n}$$

Tutte (1962) décomposition récursive

énumération

énumérer les quadrangulations planaires à n faces



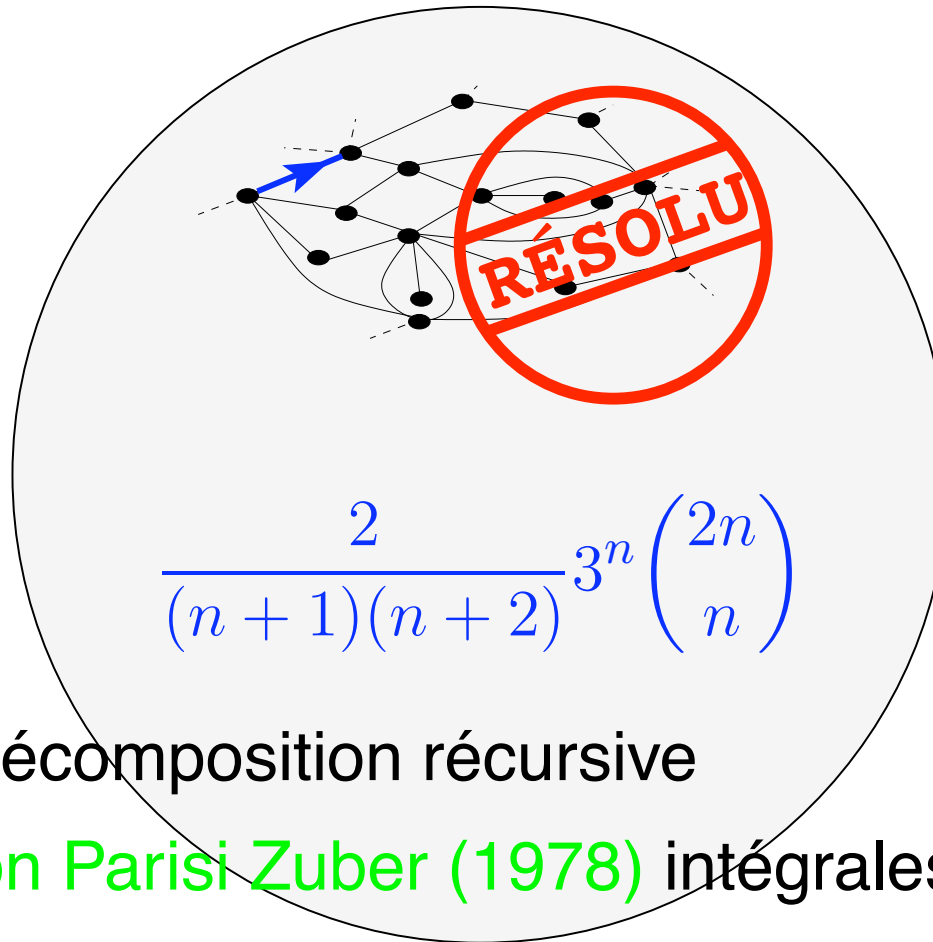
The diagram shows a planar quadrangulation with 10 vertices and 14 edges. A blue arrow points to the left edge of the top-left square. A red stamp with the word "RÉSOLU" is overlaid on the right side of the diagram.

$$\frac{2}{(n+1)(n+2)} 3^n \binom{2n}{n}$$

Tutte (1962) décomposition récursive
Brézin Itzykson Parisi Zuber (1978) intégrales de matrices

énumération

énumérer les quadrangulations planaires à n faces



$$\frac{2}{(n+1)(n+2)} 3^n \binom{2n}{n}$$

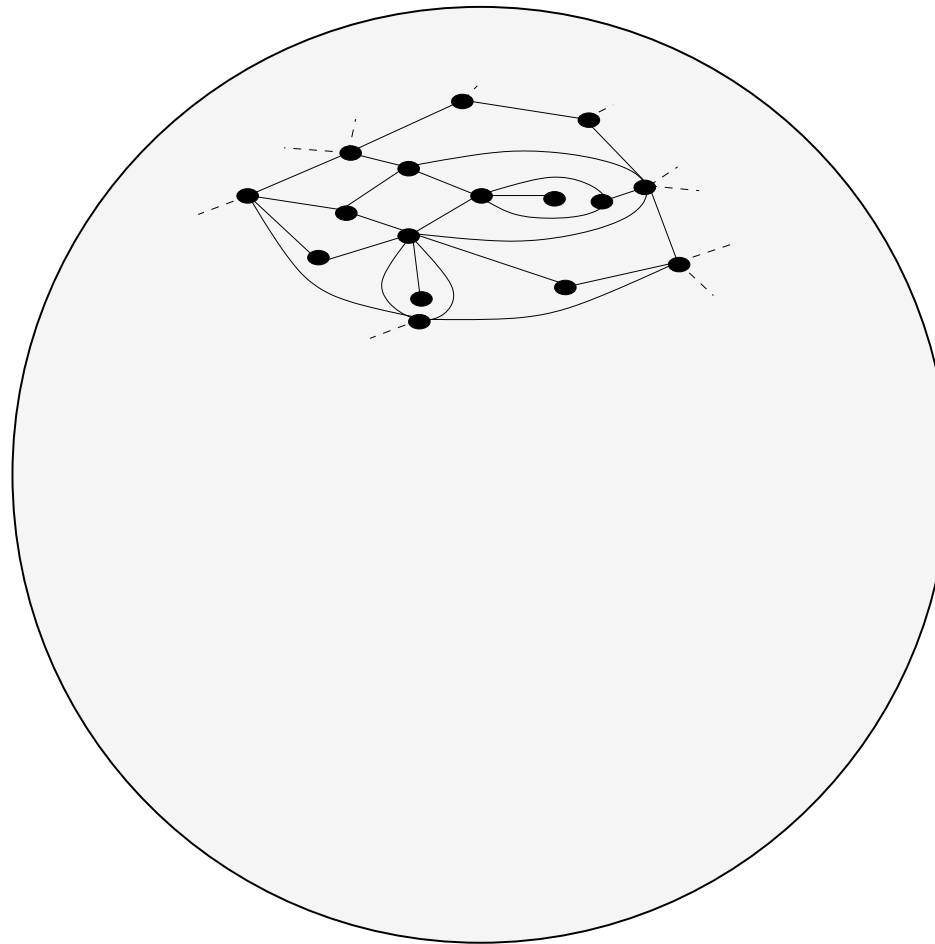
Tutte (1962) décomposition récursive

Brézin Itzykson Parisi Zuber (1978) intégrales de matrices

Schaeffer (1997) bijection avec des arbres

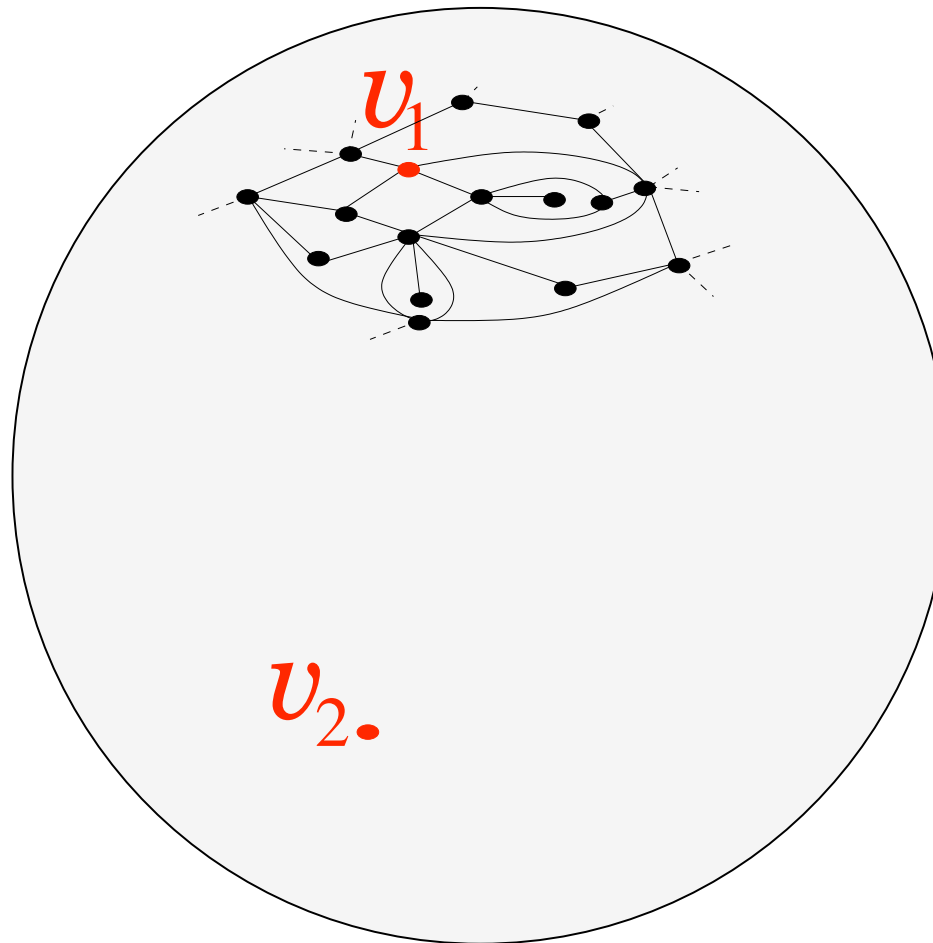
la fonction à deux points

énumérer les quadrangulations planaires à n faces



la fonction à deux points

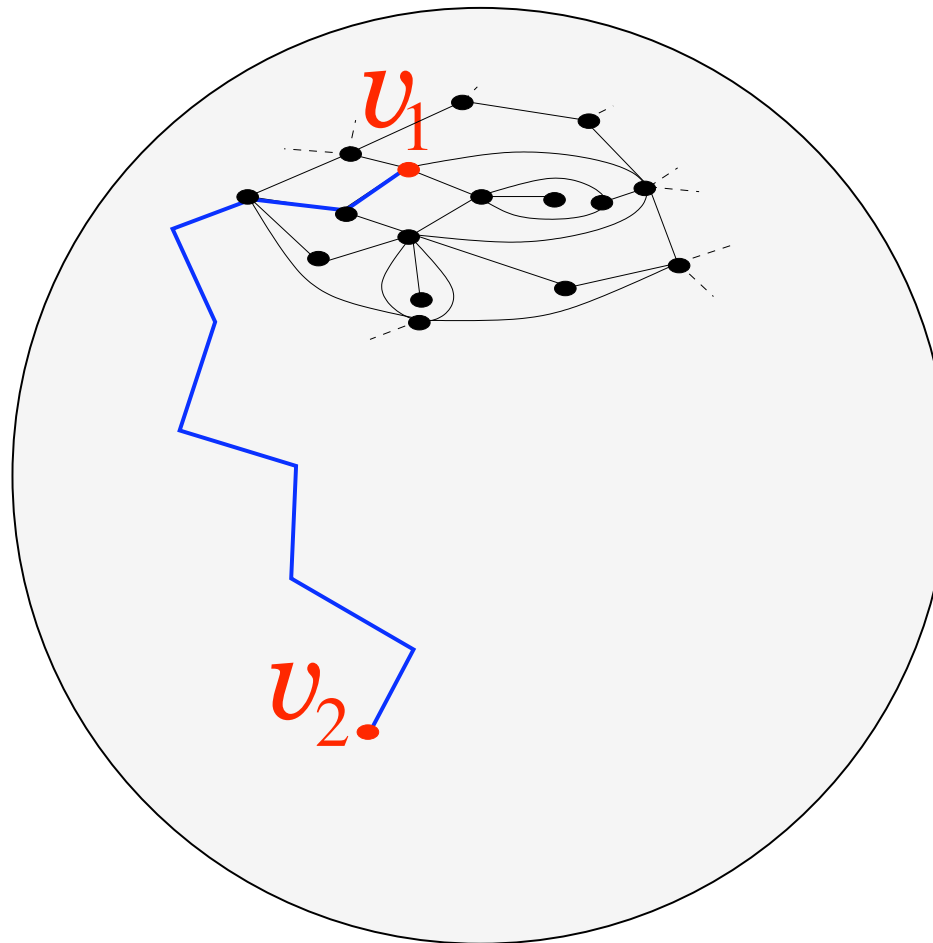
énumérer les quadrangulations planaires à n faces



et avec 2 sommets marqués

la fonction à deux points

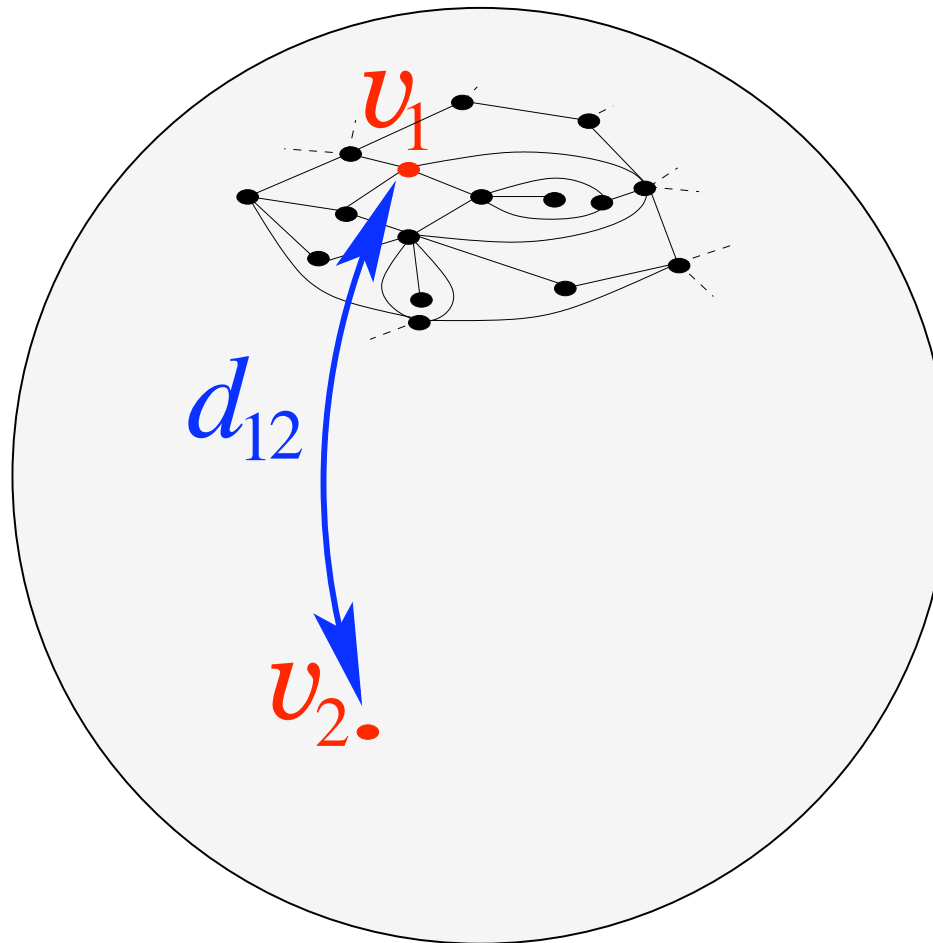
énumérer les quadrangulations planaires à n faces



et avec 2 sommets marqués

la fonction à deux points

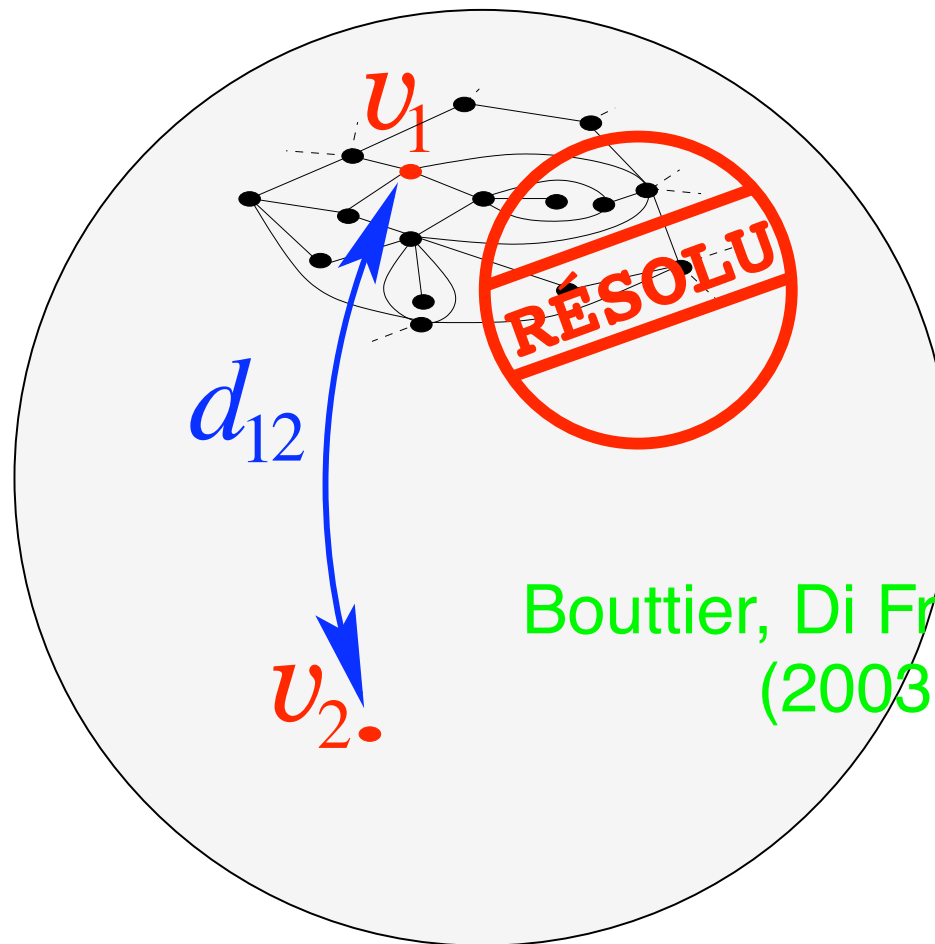
énumérer les quadrangulations planaires à n faces



et avec 2 sommets marqués à distance prescrite

la fonction à deux points

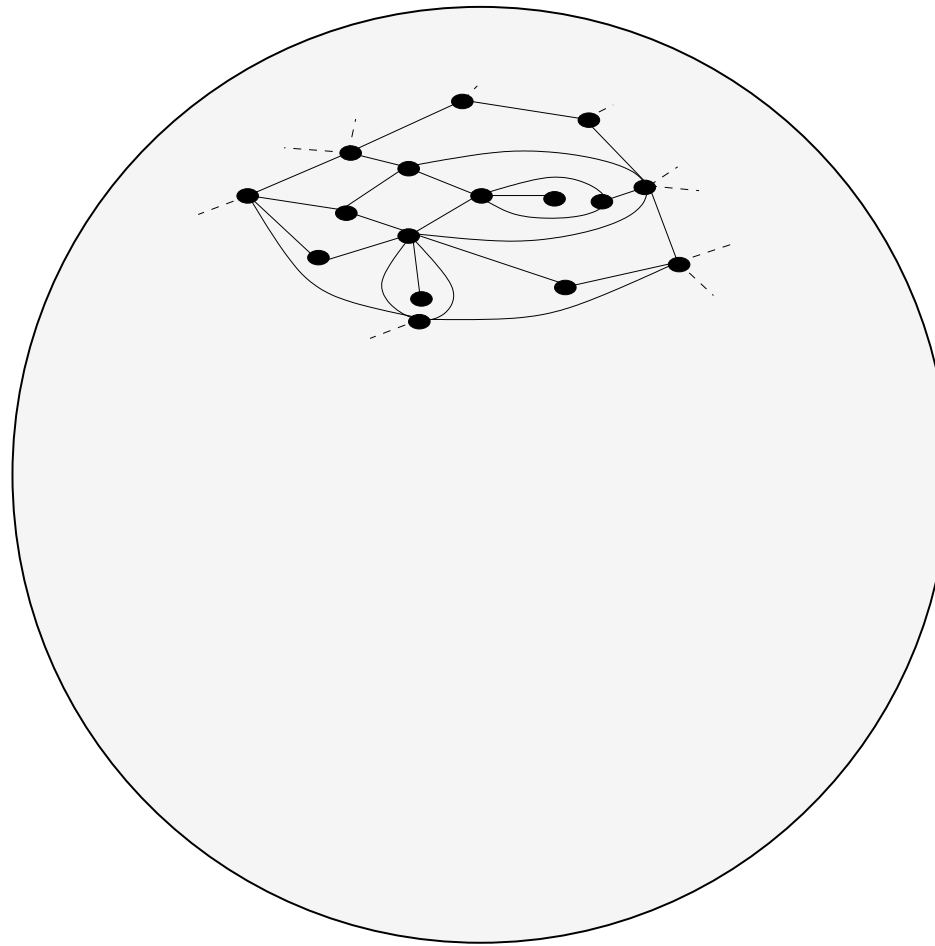
énumérer les quadrangulations planaires à n faces



et avec 2 sommets marqués à distance prescrite

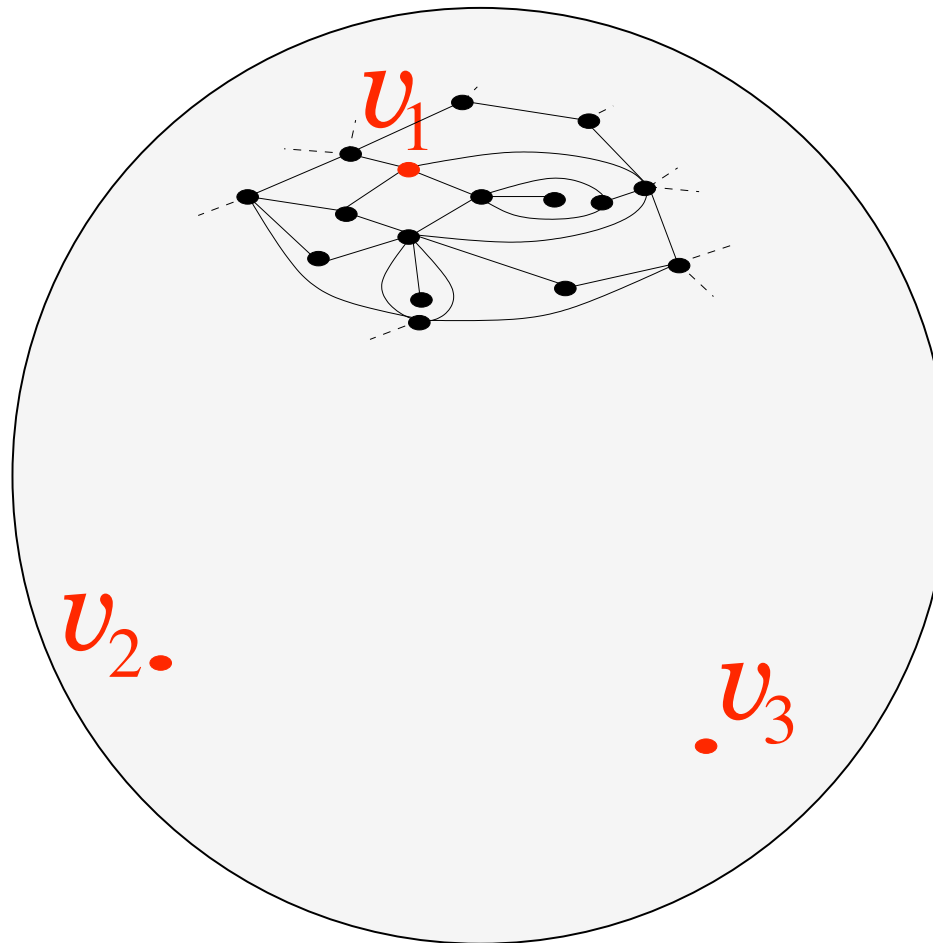
la fonction à trois points

énumérer les quadrangulations planaires à n faces



la fonction à trois points

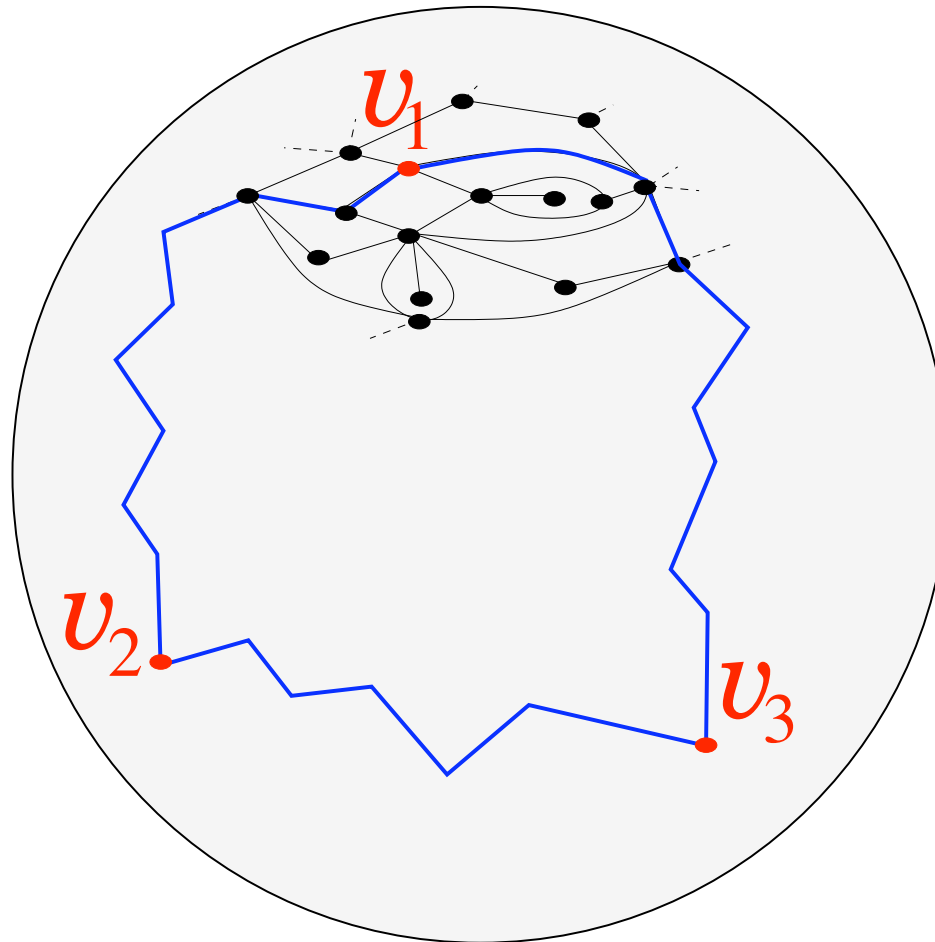
énumérer les quadrangulations planaires à n faces



et avec 3 sommets marqués

la fonction à trois points

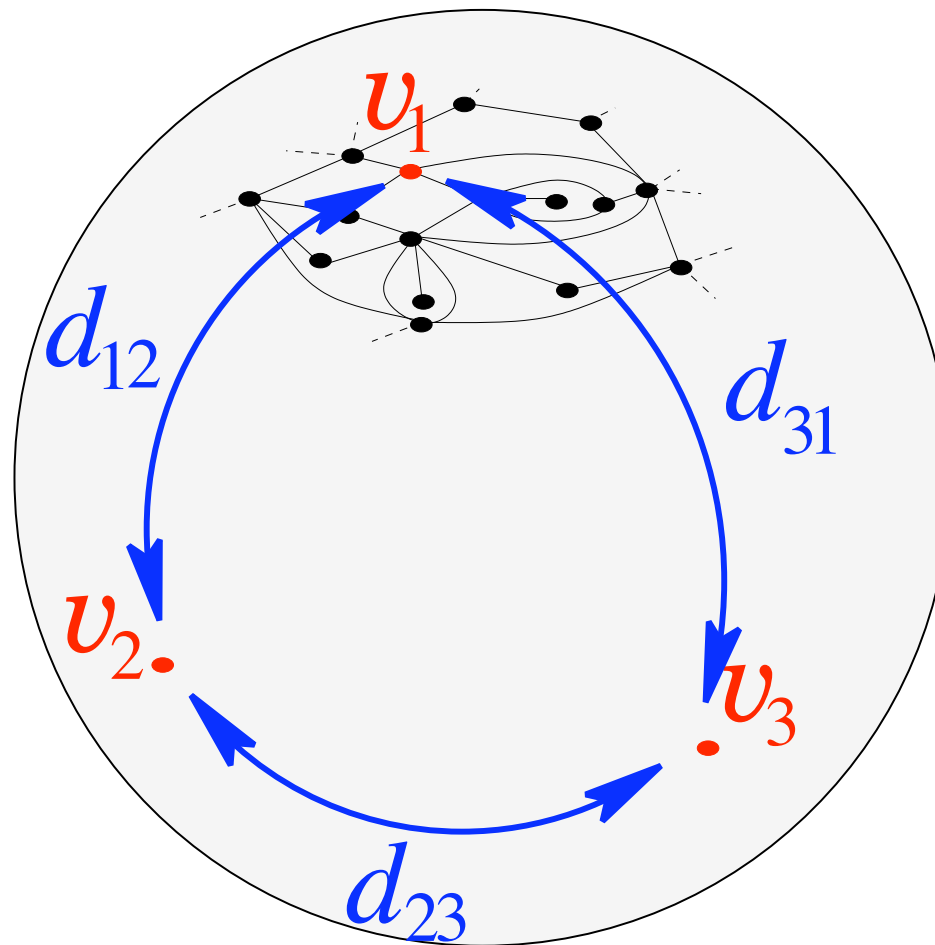
énumérer les quadrangulations planaires à n faces



et avec 3 sommets marqués

la fonction à trois points

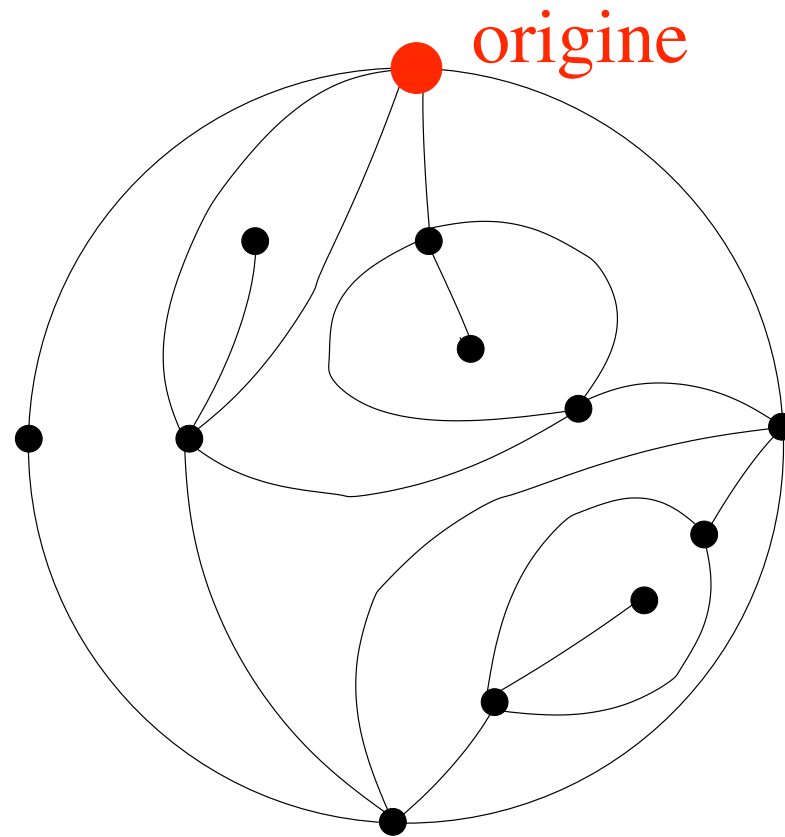
énumérer les quadrangulations planaires à n faces



et avec 3 sommets marqués à distances prescrites

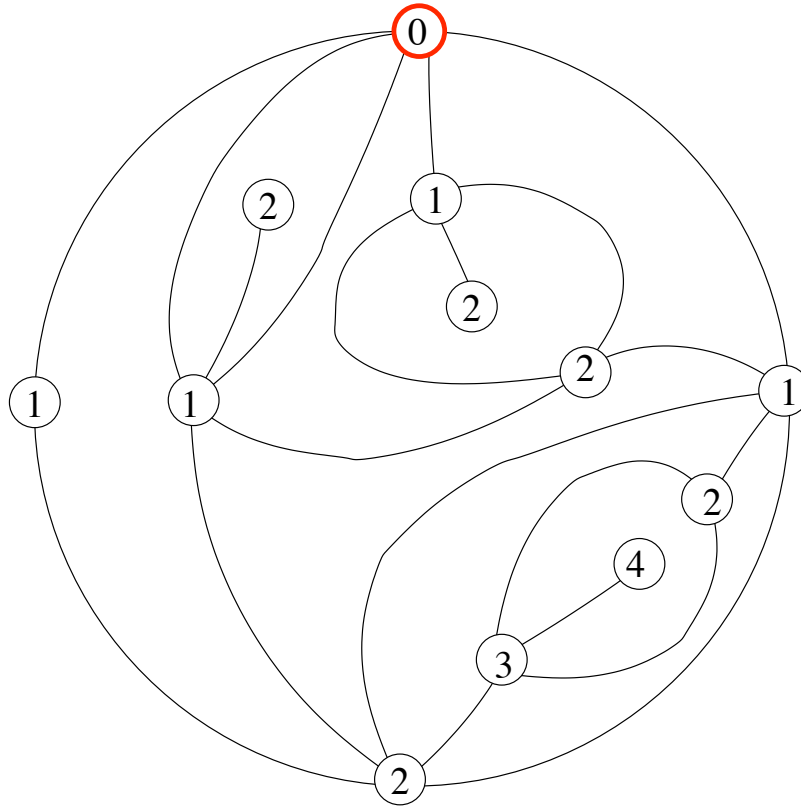
la bijection de Schaeffer

partant d'une quadrangulation planaire **pointée**



la bijection de Schaeffer

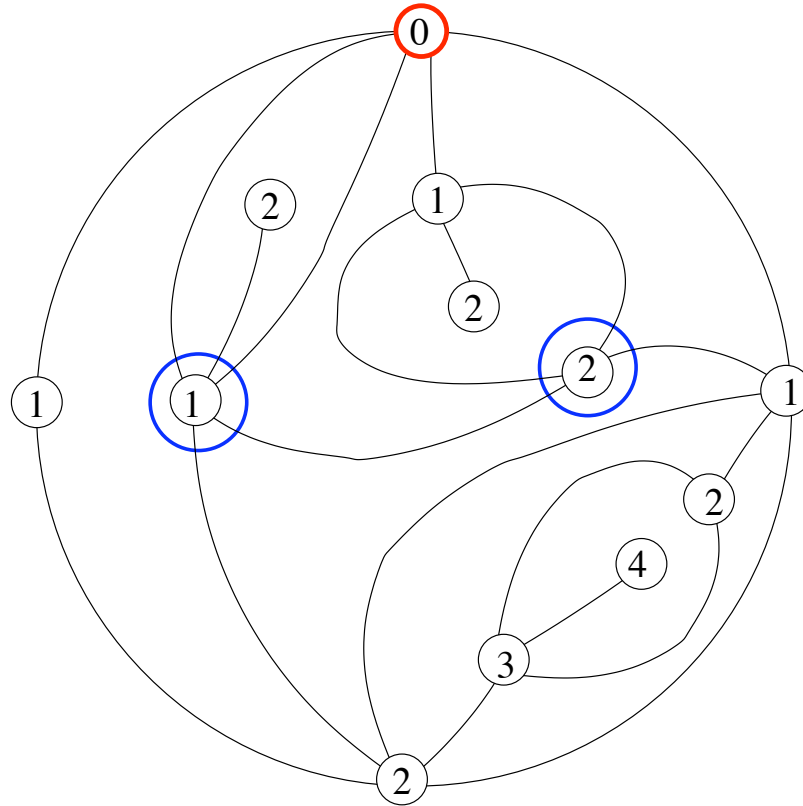
partant d'une quadrangulation planaire **pointée**



chaque sommet v reçoit une étiquette $\ell(v)$ égale à sa distance à l'origine

la bijection de Schaeffer

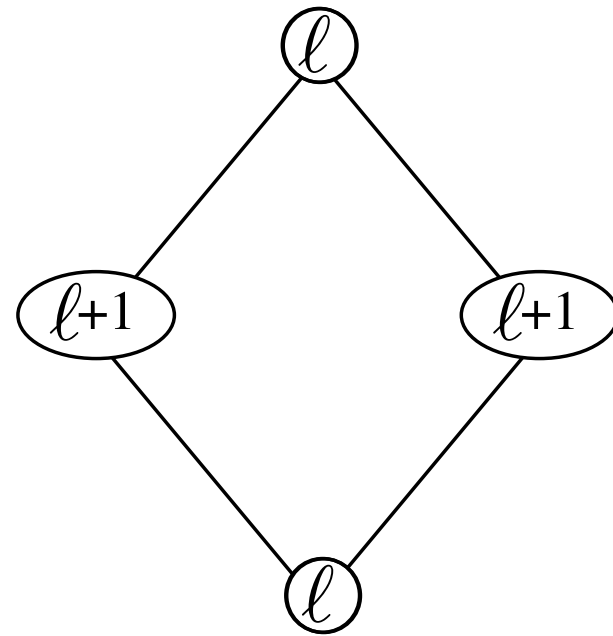
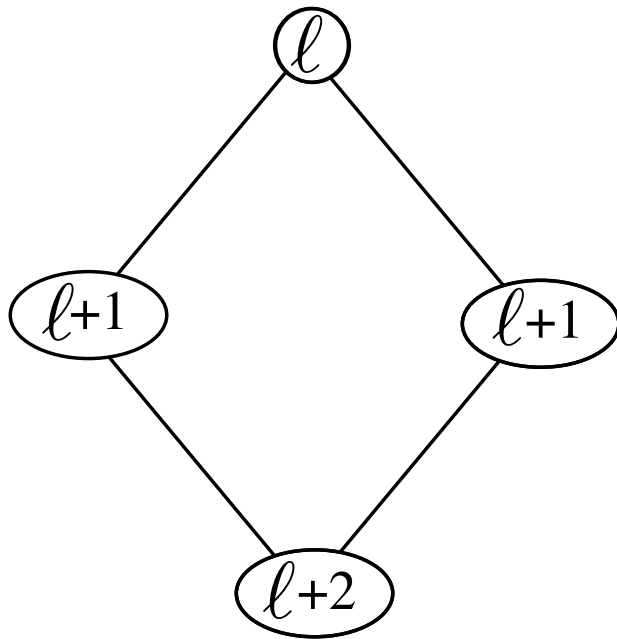
partant d'une quadrangulation planaire **pointée**



$|\ell(v) - \ell(v')| = 1$ si v et v' sont voisins sur la quadrangulation

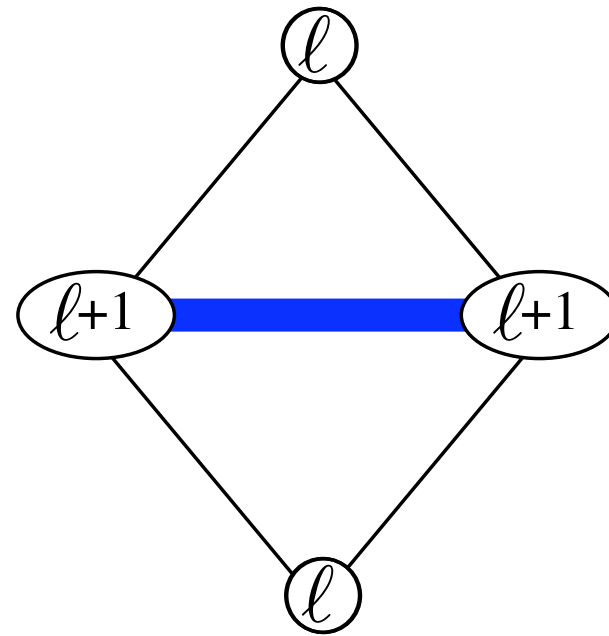
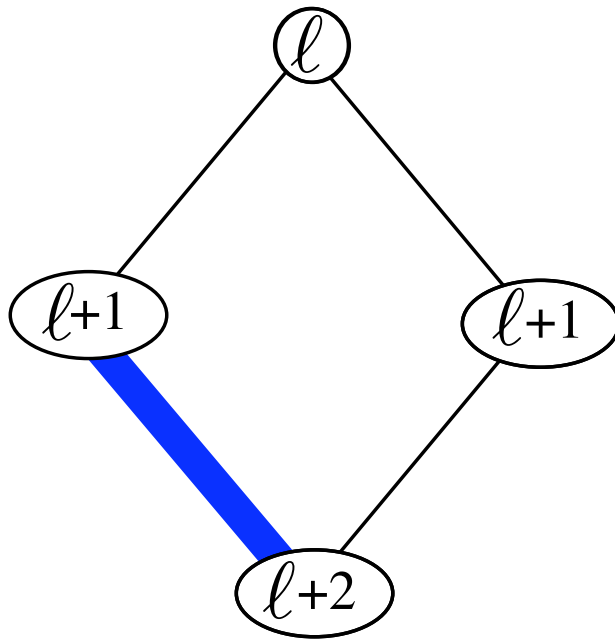
faces \rightarrow arêtes

\rightarrow deux types de faces



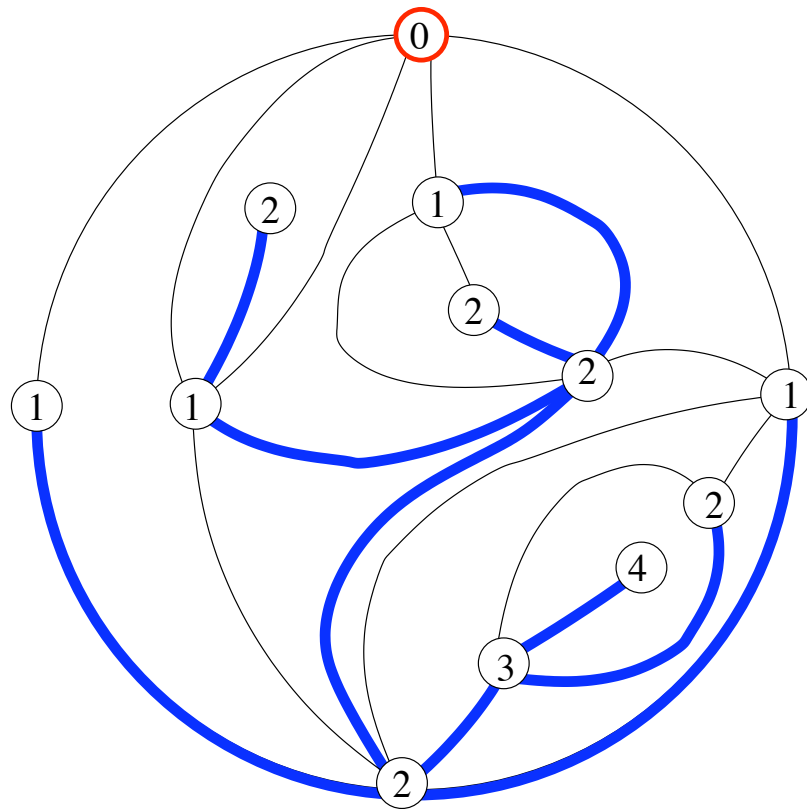
faces \rightarrow arêtes

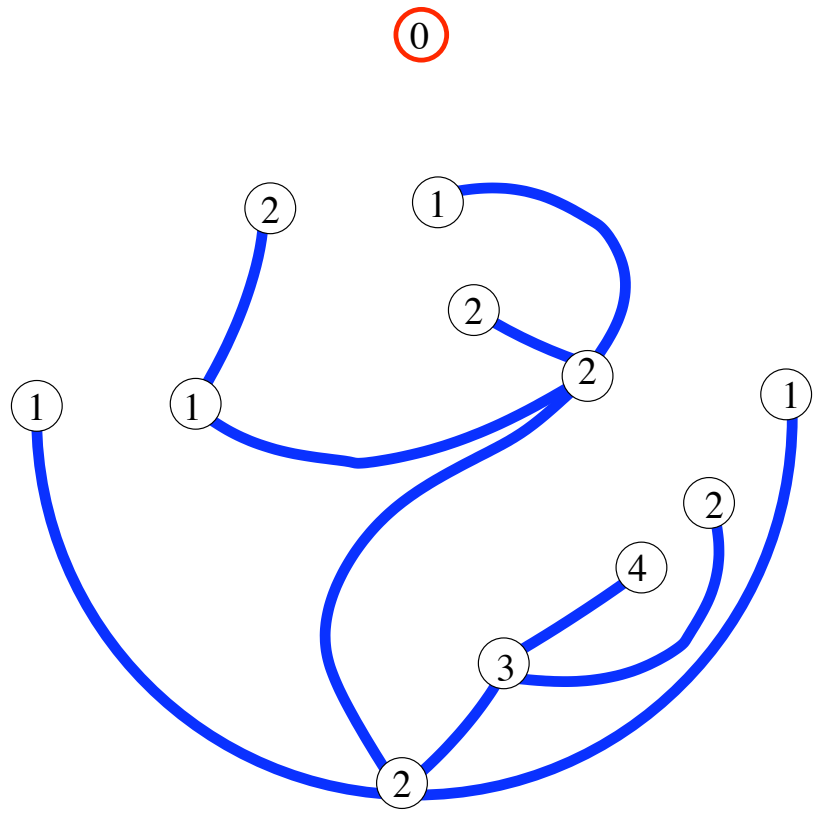
\rightarrow deux types de faces

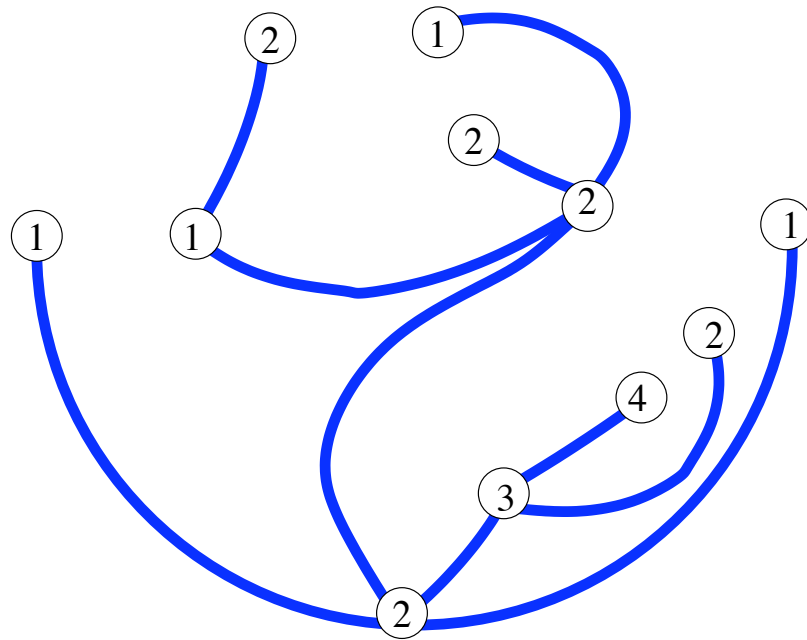


construction de Schaeffer:

associer une arête à chaque face

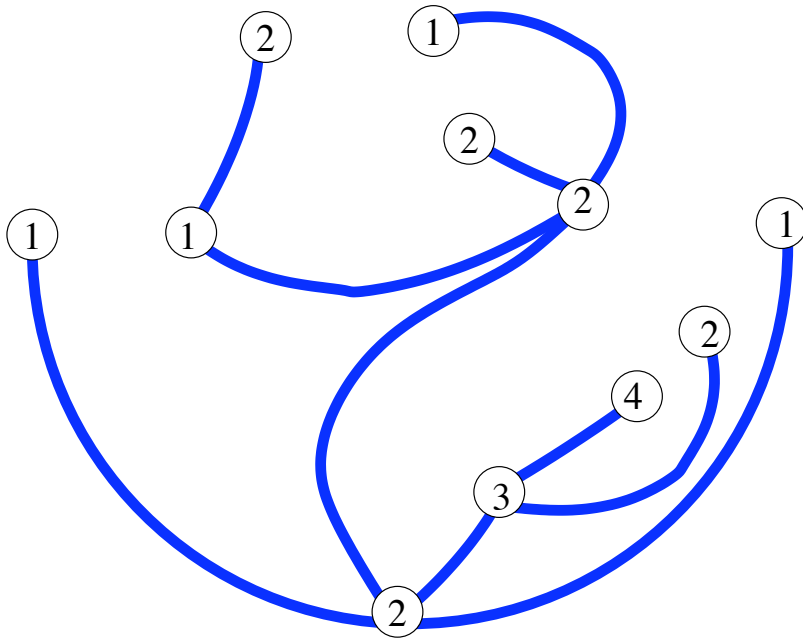






on obtient un arbre planaire **bien-étiqueté**

arbres bien-étiquetés



bien-étiqueté:

bijection 1:

quadrangulations pointées

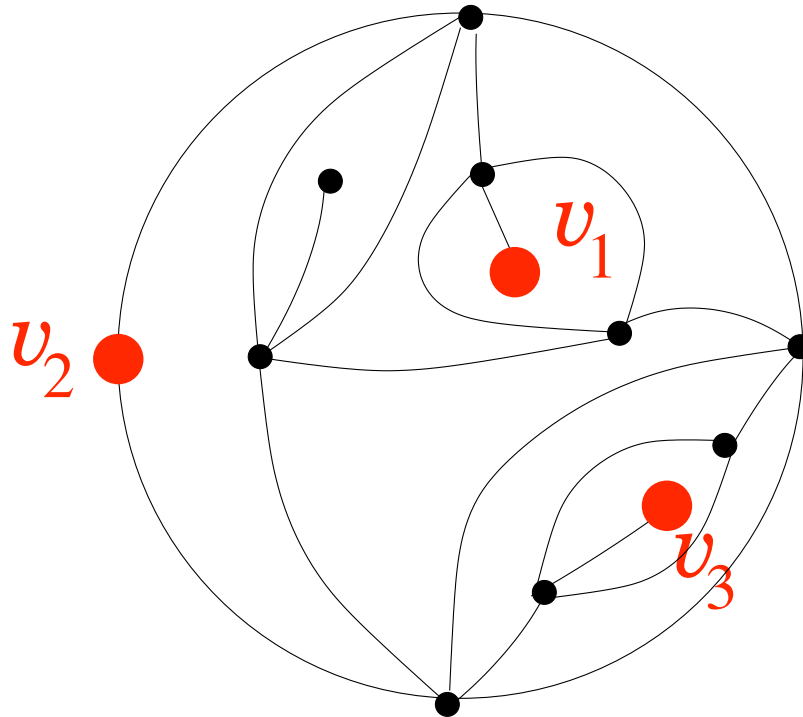


arbres bien-étiquetés

- ◇ $|\ell(v) - \ell(v')| \leq 1$ si v et v' sont voisins
- ◇ $\min_{v \in \text{arbre}} \ell(v) = 1$

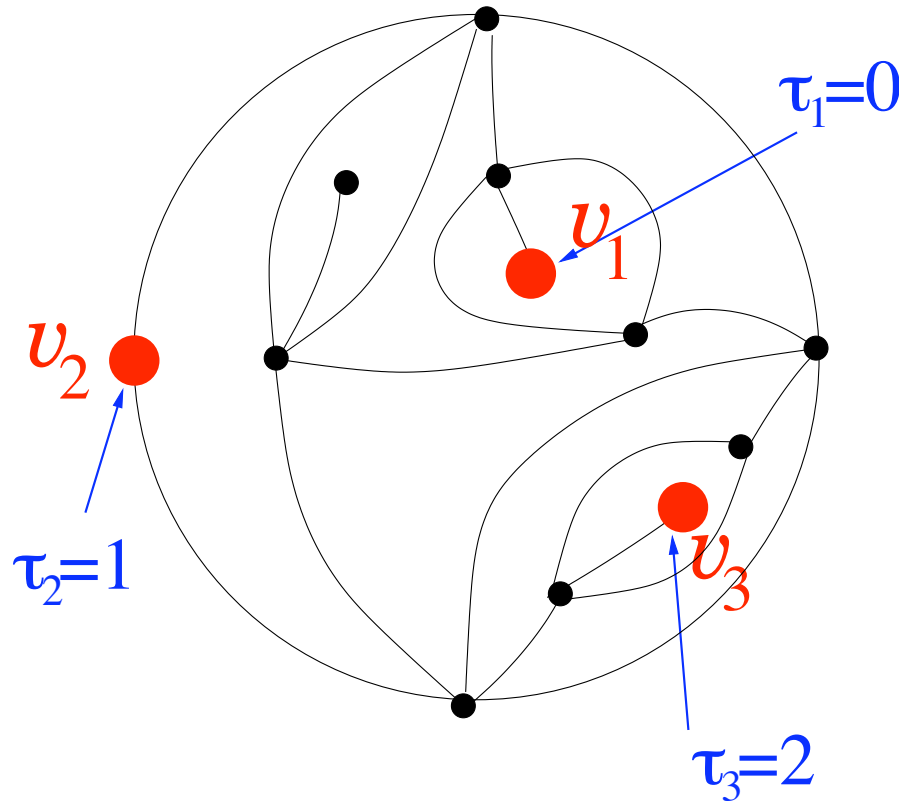
la bijection de Miermont

partant d'une quadrangulation planaire **multi-pointée**
avec p sommets marqués (et distingués) v_1, \dots, v_p
satisfaisant $d(v_i, v_j) \geq 2$



la bijection de Miermont

à chaque sommet marqué v_i est associé un retard τ_i (entier)



la bijection de Miermont

à chaque sommet marqué v_i est associé un retard τ_i (entier)

les retards doivent satisfaire:

$$\diamond |\tau_i - \tau_j| < d(v_i, v_j) \quad \forall i \neq j \quad (\text{cond. 1})$$

$$\diamond \tau_i - \tau_j = d(v_i, v_j) \pmod{2} \quad (\text{cond. 2})$$

pour chaque sommet v , on considère la “distance retardée” à v_j

$$\ell_j(v) \equiv d(v, v_j) + \tau_j$$

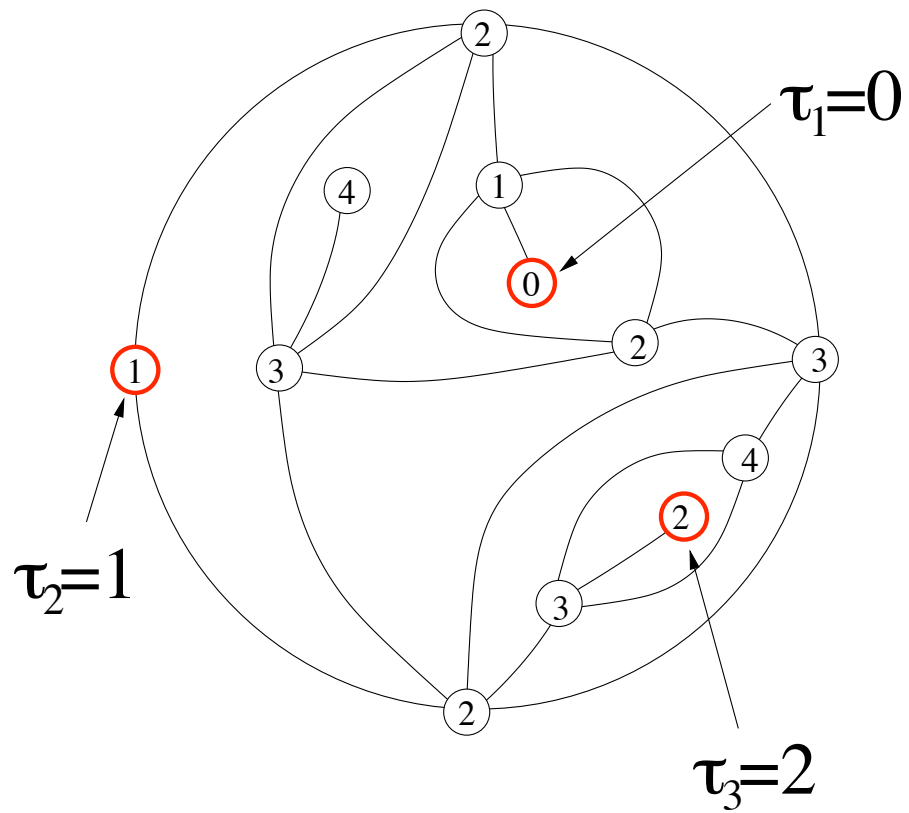
le sommet v reçoit maintenant une étiquette:

$$\ell(v) \equiv \min_{j=1, \dots, p} \ell_j(v) = \min_{j=1, \dots, p} (d(v, v_j) + \tau_j)$$

qui est la “distance” au sommet marqué le plus proche, où la distance à v_j incorpore une pénalité τ_j

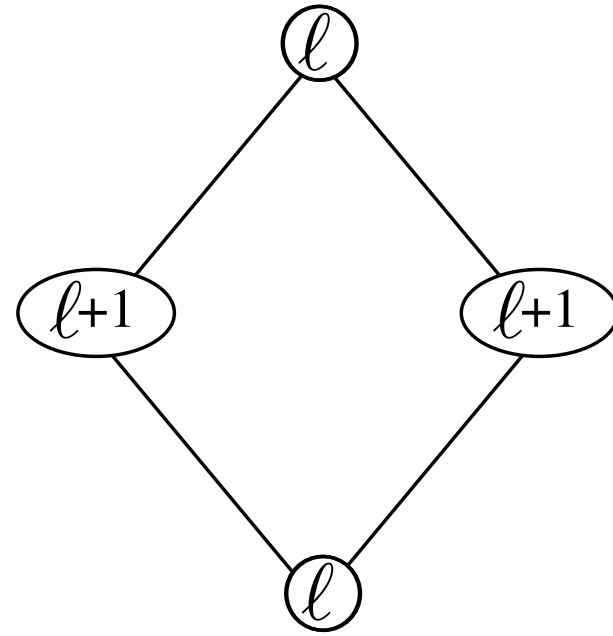
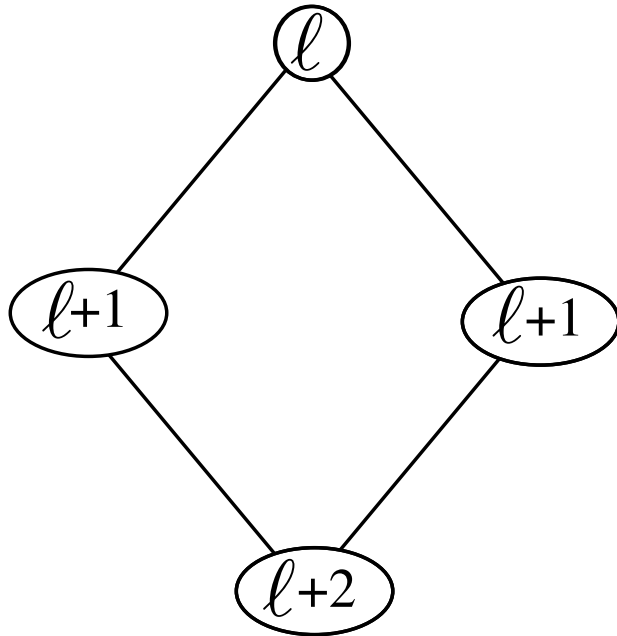
→ en particulier, la condition 1 assure que

$$\ell(v_i) = \tau_i$$



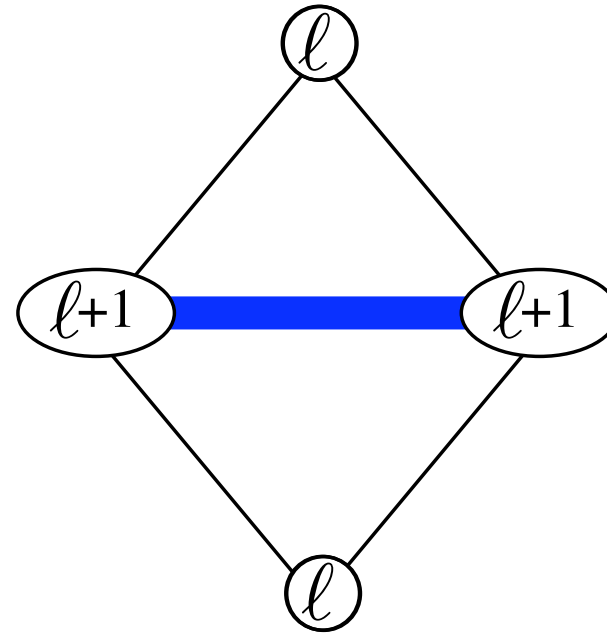
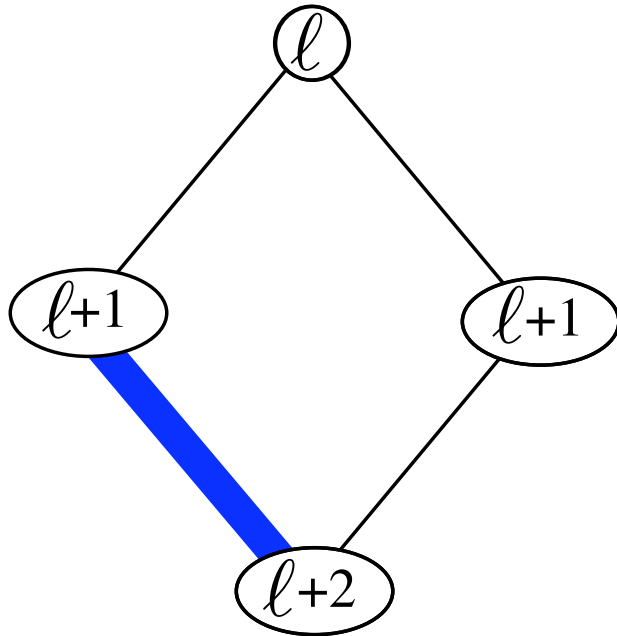
faces \rightarrow arêtes

grâce à la condition 2, la parité de $\ell_j(v)$ est indépendante de j et, de nouveau, $|\ell(v) - \ell(v')| = 1$ si v et v' sont voisins sur la quadrangulation

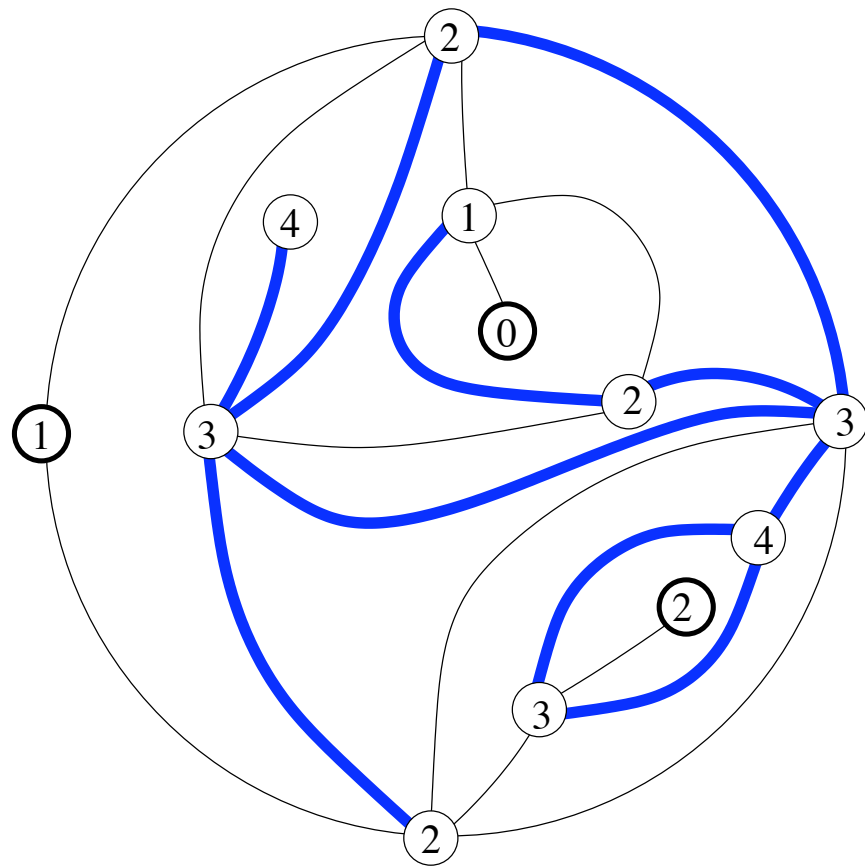


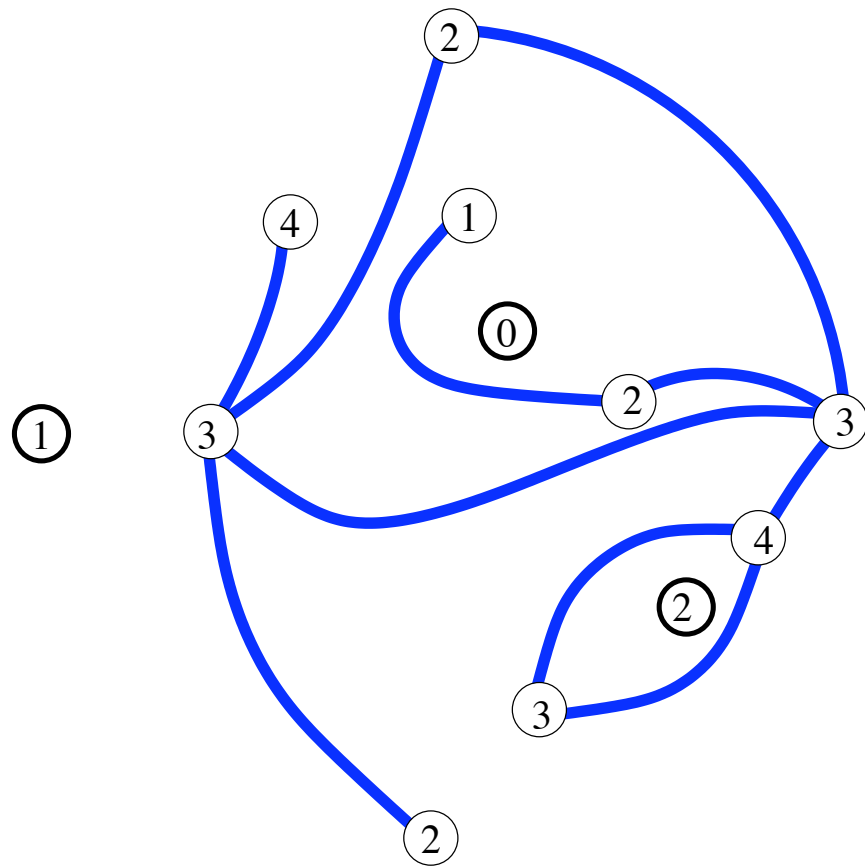
faces \rightarrow arêtes

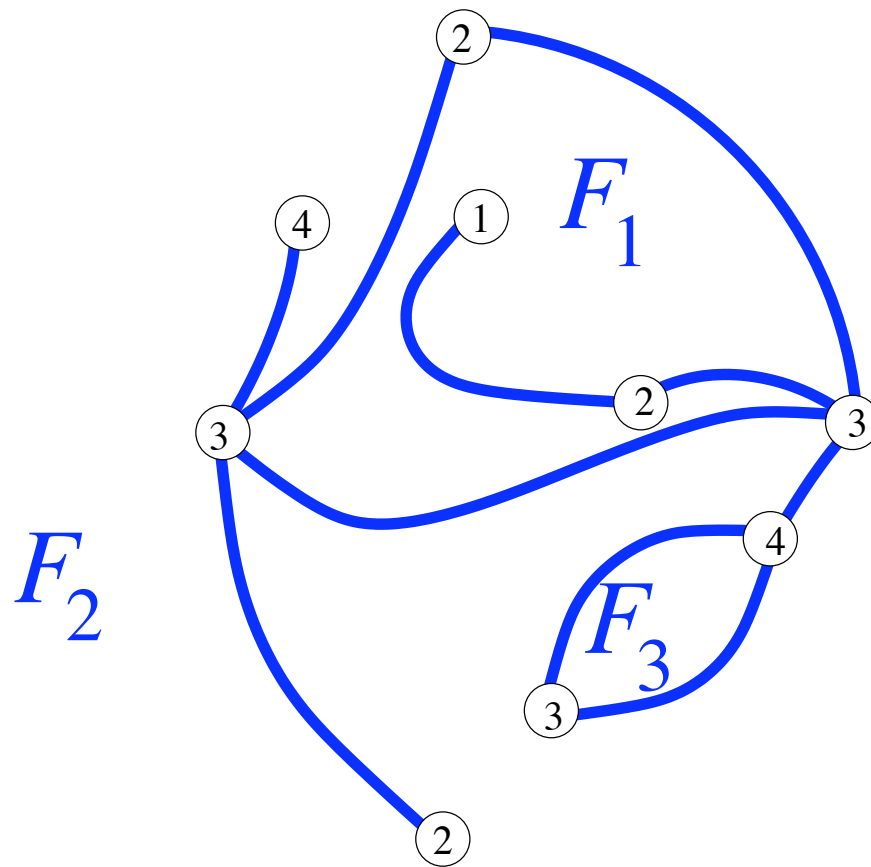
grâce à la condition 2, la parité de $\ell_j(v)$ est indépendante de j et, de nouveau, $|\ell(v) - \ell(v')| = 1$ si v et v' sont voisins sur la quadrangulation



associer une arête à chaque face

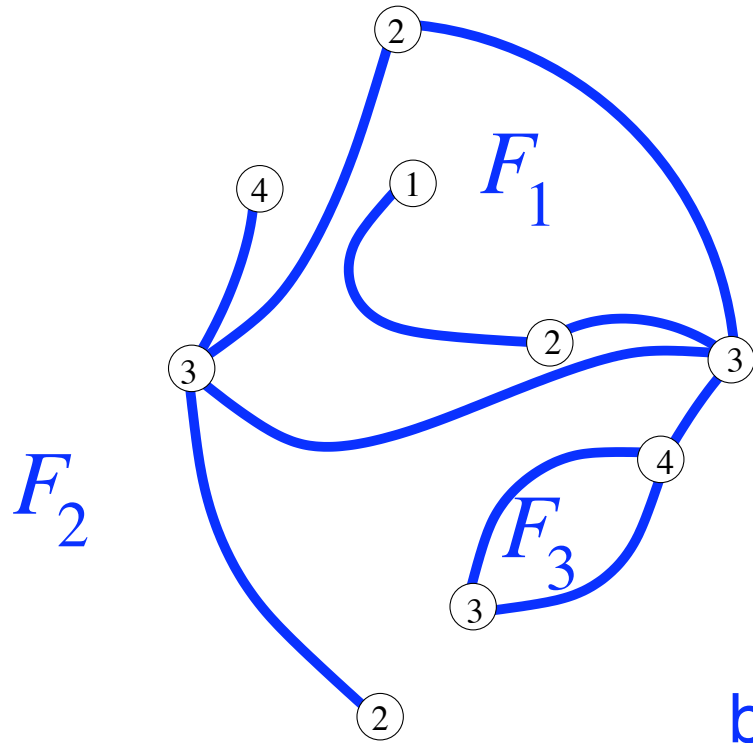






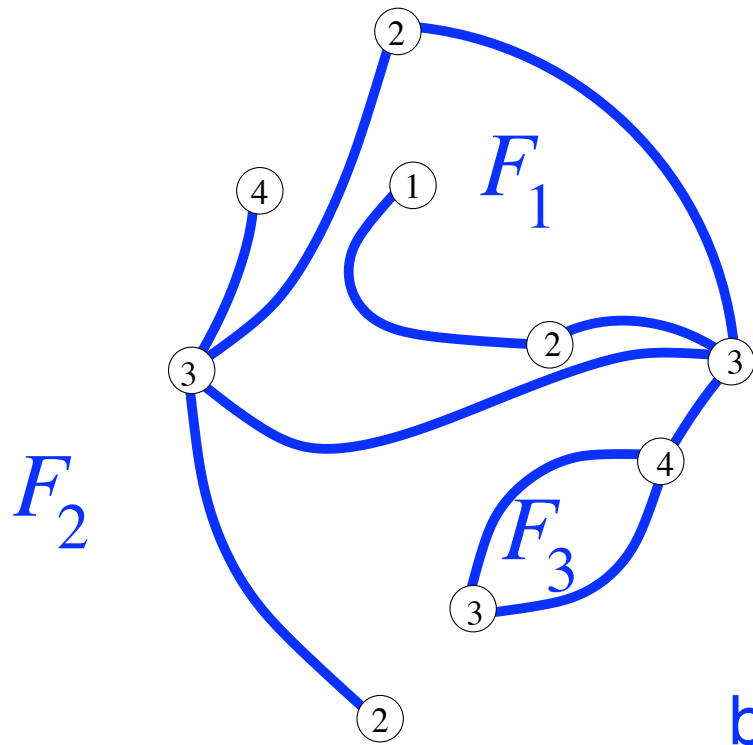
on obtient une carte planaire **bien-étiquetée** à p faces

cartes bien-étiquetées



bien-étiquetée:

cartes bien-étiquetées

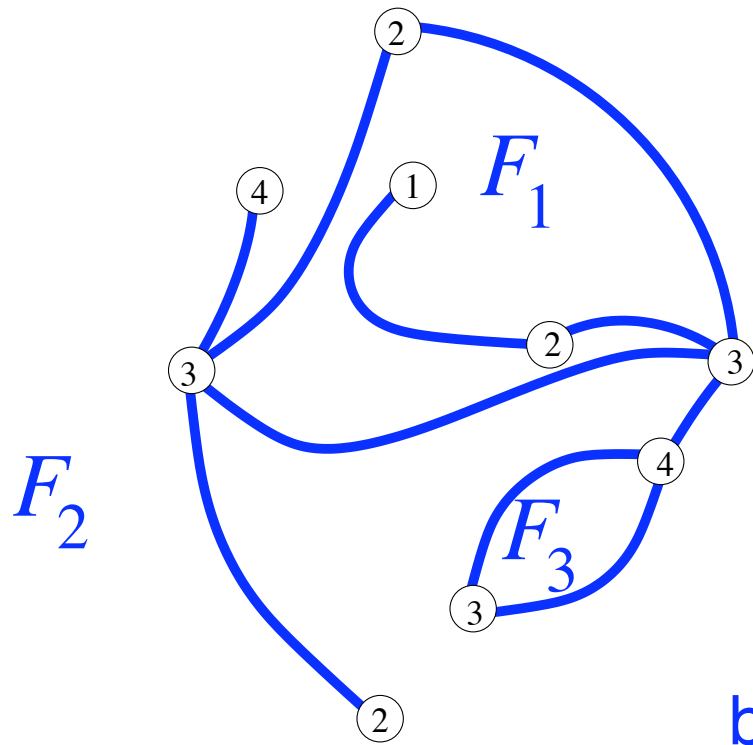


bien-étiquetée:

◇ les étiquettes varient d'au plus 1 entre voisins

$|\ell(v) - \ell(v')| \leq 1$ si v et v' sont voisins sur la carte

cartes bien-étiquetées



bien-étiquetée:

◇ les étiquettes varient d'au plus 1 entre voisins

$|\ell(v) - \ell(v')| \leq 1$ si v et v' sont voisins sur la carte

◇ $\min_{v \text{ incident à } F_i} \ell(v) = 1 + \tau_i$

bijection 2: pour une valeur fixée des retards

quadrangulations p -pointées

avec des sommets marqués satisfaisant

- ◇ $d(v_i, v_j) > |\tau_i - \tau_j| \forall i \neq j$
- ◇ $d(v_i, v_j) = \tau_i - \tau_j \pmod{2}$



cartes bien-étiquetées à p faces

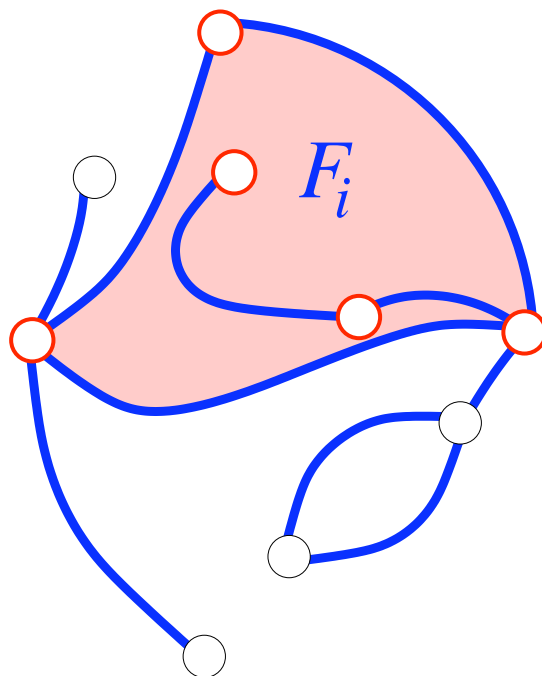
avec de étiquettes satisfaisant

- ◇ $|\ell(v) - \ell(v')| \leq 1$ si v et v' sont voisins
- ◇ $\min_{v \text{ incident à } F_i} \ell(v) = 1 + \tau_i$

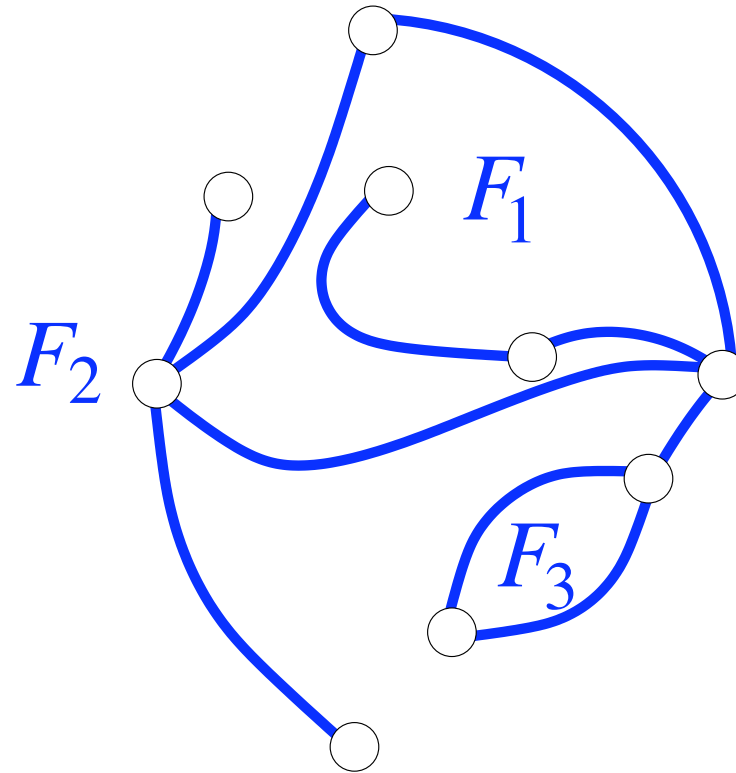
ce codage garde trace de **certaines** des distances:

si v est incident à F_i , alors le minimum de $\ell_j = d(v, v_j) + \tau_j$ est atteint pour $j = i$ et on a donc:

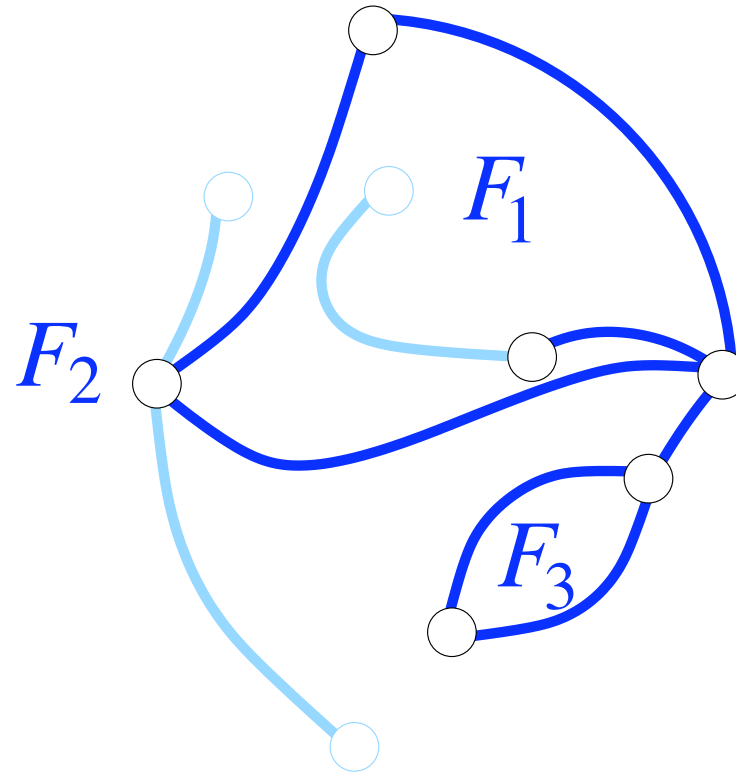
$$d(v, v_i) = \ell(v) - \tau_i$$



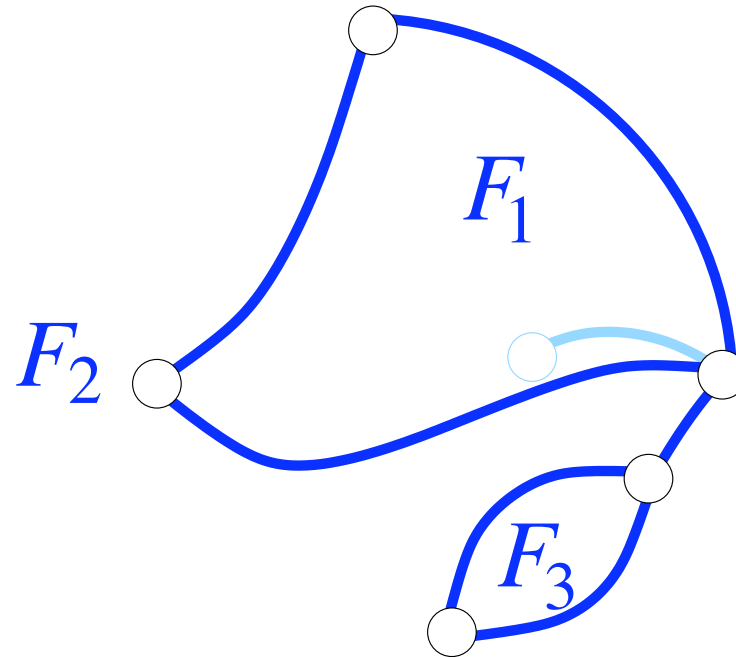
les cartes planaires peuvent se classer selon leur squelette



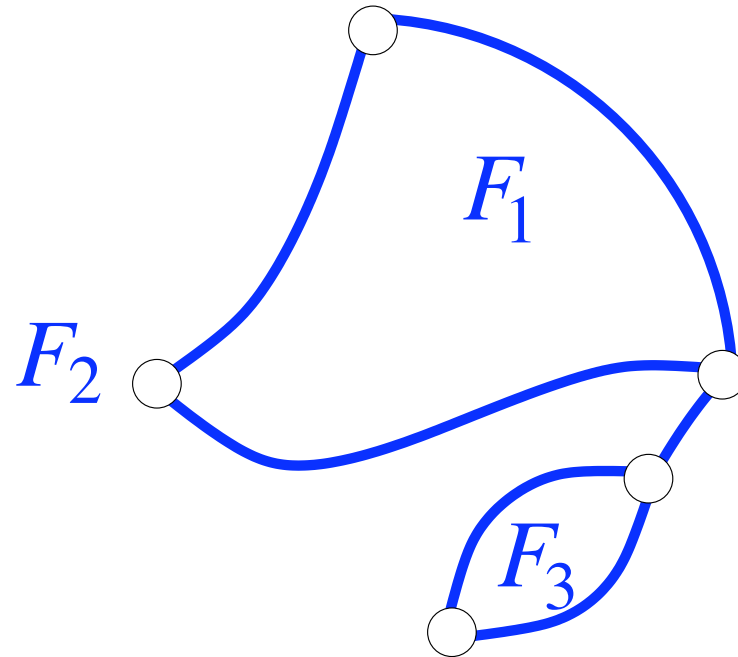
les cartes planaires peuvent se classer selon leur squelette



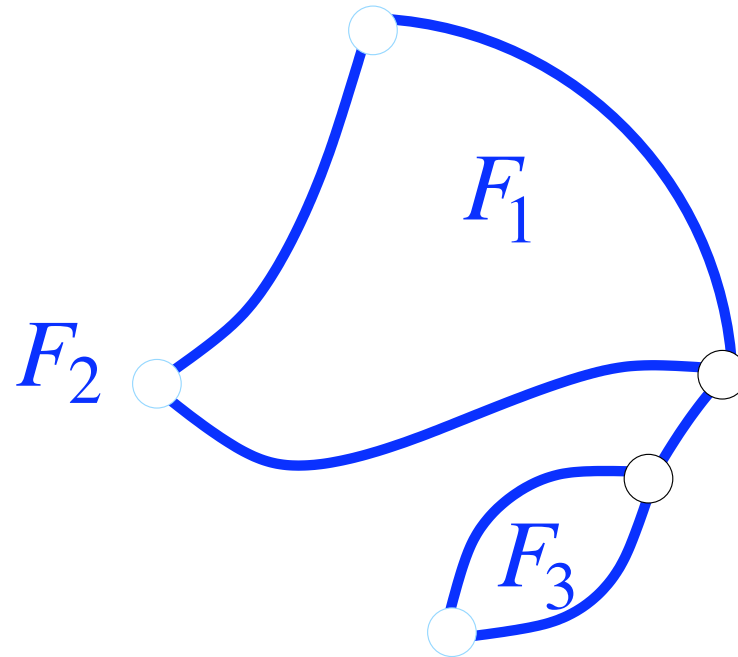
les cartes planaires peuvent se classer selon leur squelette



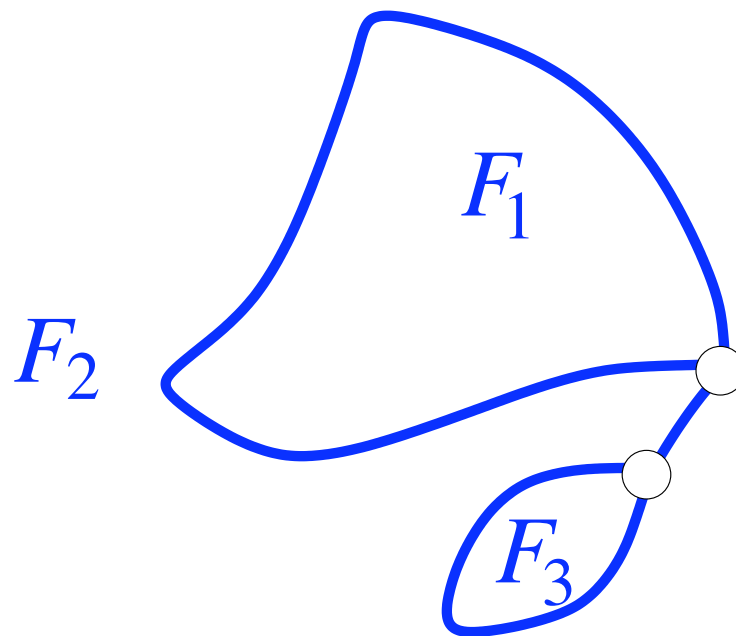
les cartes planaires peuvent se classer selon leur squelette



les cartes planaires peuvent se classer selon leur squelette



les cartes planaires peuvent se classer selon leur squelette

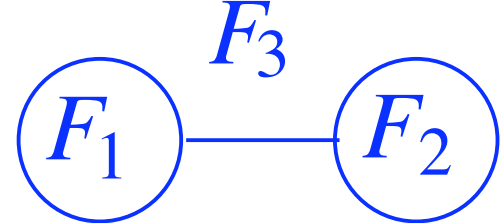
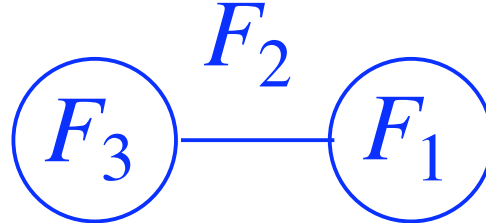
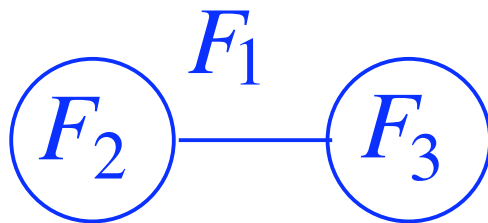
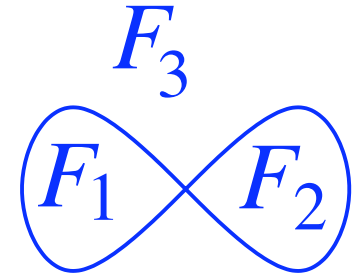
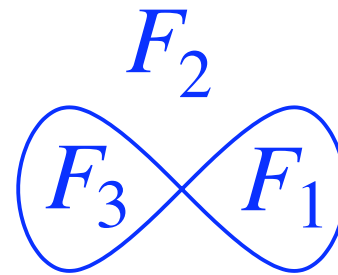
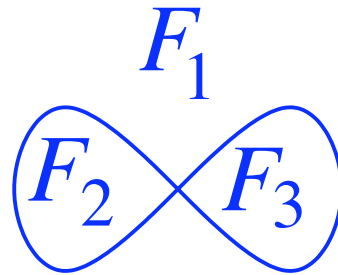
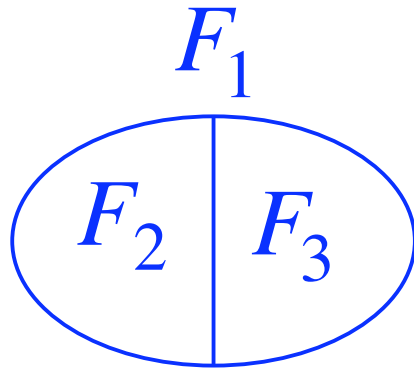


sommets de degré $\geq 3 \Rightarrow$ nombre fini de squelettes

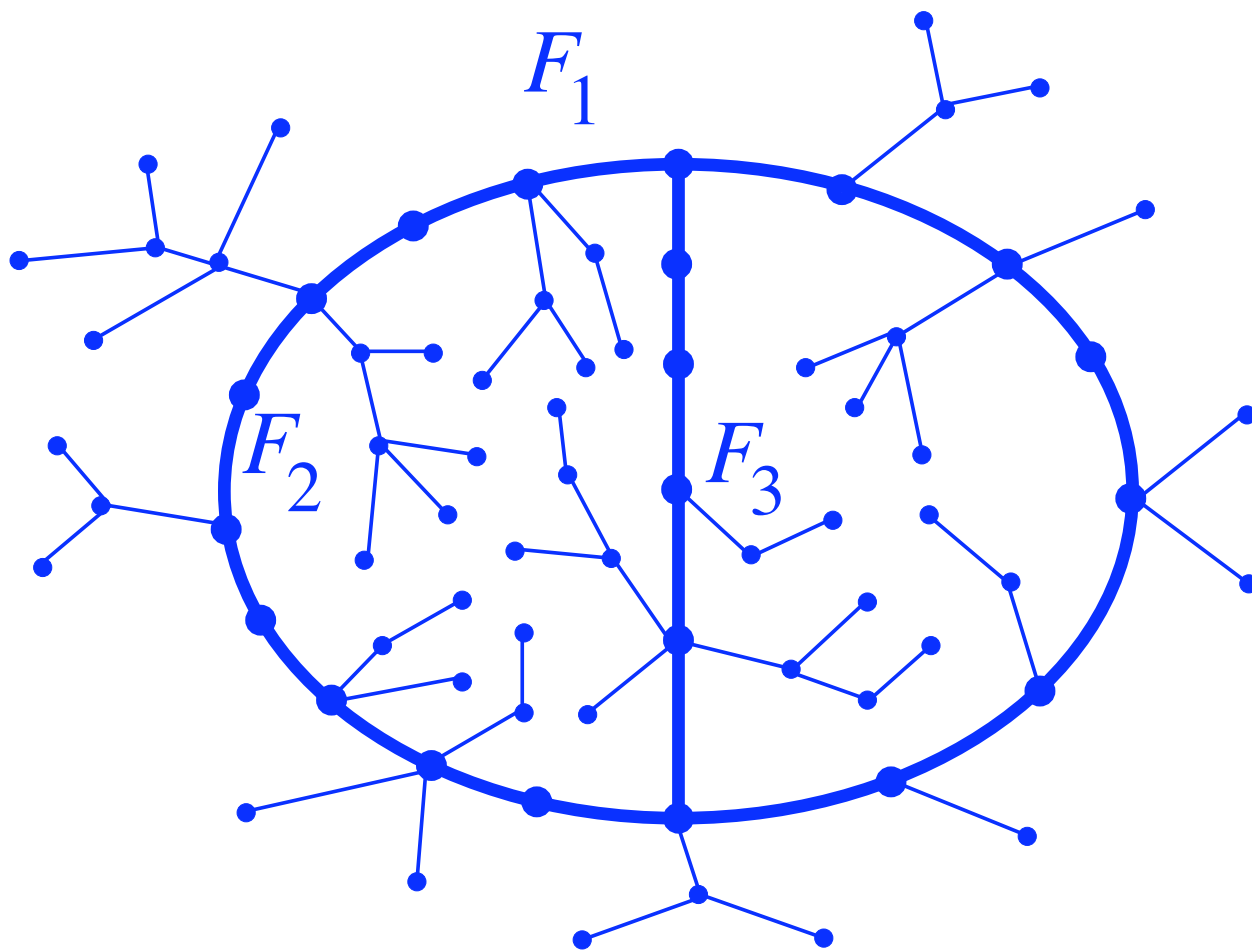
cas de 3 sommets marqués

cartes planaires à 3 faces (distinguées)

→ sept squelettes possibles



carte = squelette + arbres attachés



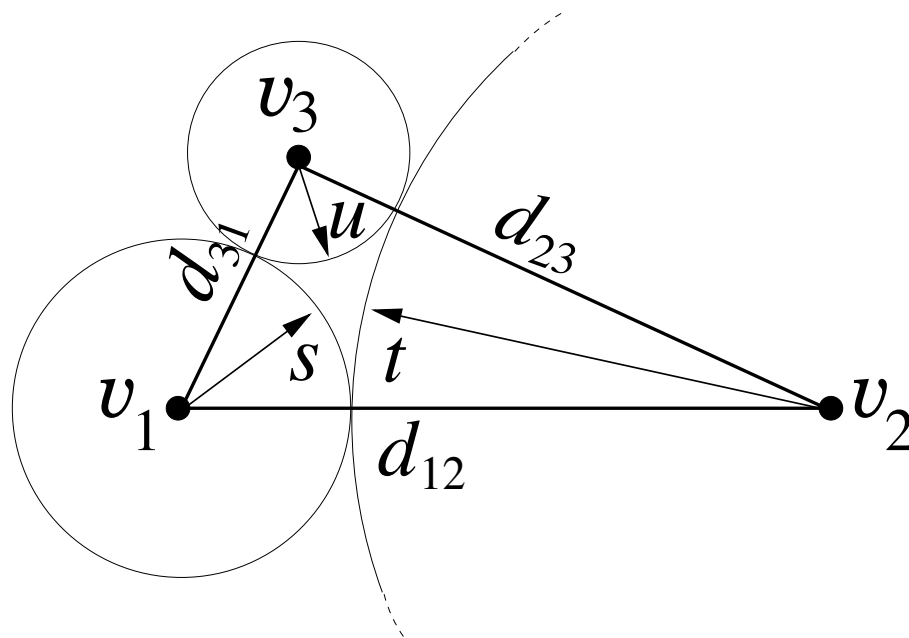
paramétrisation des distances

pour 3 points, on peut utiliser la paramétrisation suivante:

$$d_{12} \equiv d(v_1, v_2) = s + t$$

$$d_{23} \equiv d(v_2, v_3) = t + u$$

$$d_{31} \equiv d(v_3, v_1) = u + s$$



avec $s, t, u \geq 0$

choix des retards

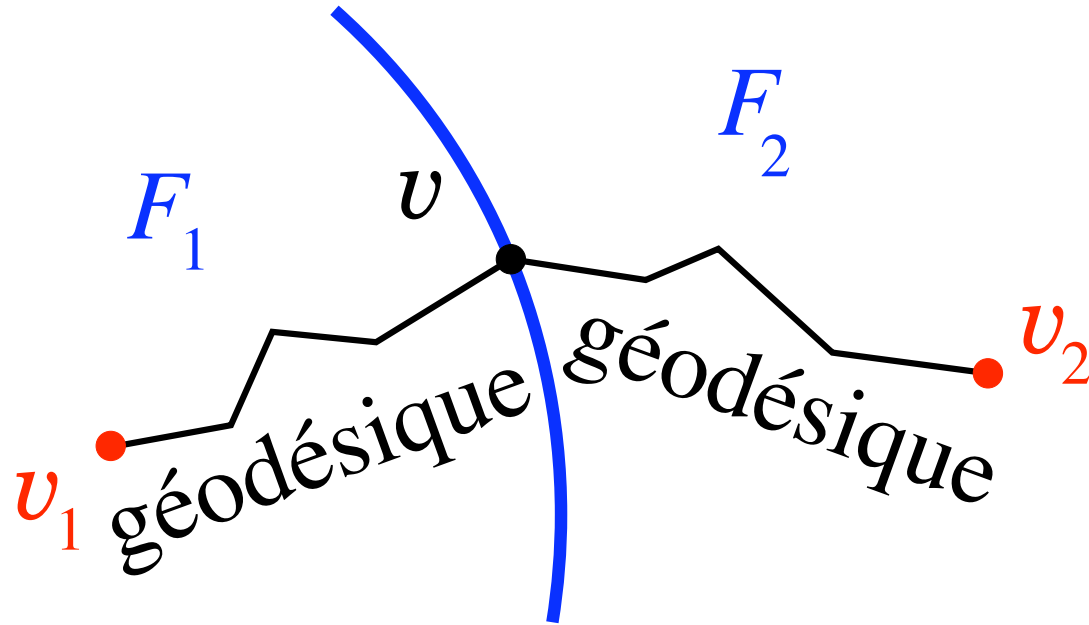
idée: relier les retards aux distances en choisissant:

$$\tau_1 = -s, \quad \tau_2 = -t, \quad \tau_3 = -u$$

- ◇ $\tau_1 - \tau_2 = -s + t = s + t \pmod{2} = d(v_1, v_2) \pmod{2}$
- ◇ $|\tau_1 - \tau_2| = |d_{23} - d_{31}| \leq d_{12}$ (inégalités triangulaires)
et égalité seulement si les 3 sommets sont "alignés":
par exemple $d_{23} - d_{31} = d_{12}$ seulement si v_1 se trouve sur un chemin géodésique entre v_2 et v_3
- on suppose les 3 sommets non-alignés $\Leftrightarrow s, t, u > 0$
- on traitera le cas de sommets alignés plus tard (inclut le cas où deux sommets sont voisins immédiats)

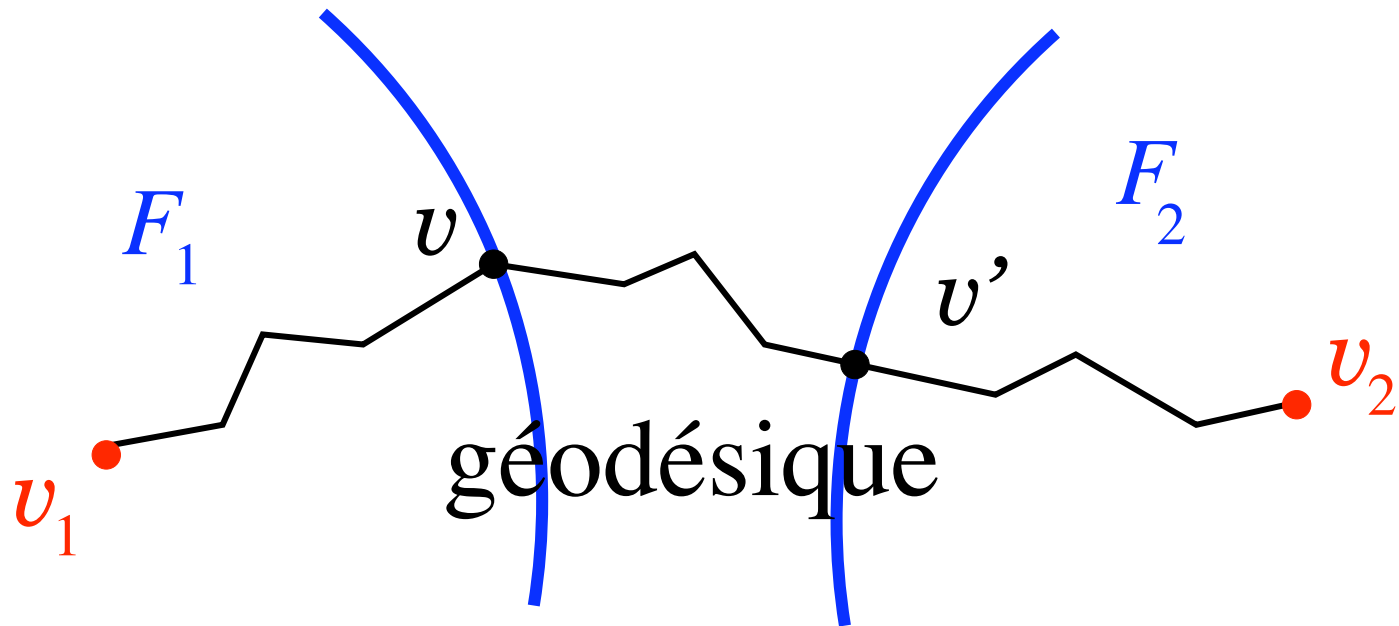
nouvelles contraintes sur les étiquettes:

- ◇ sommet à la frontière entre deux faces



$$\text{longueur} = \ell(v) - \tau_1 + \ell(v) - \tau_2 = 2\ell(v) + (s + t) \geq s + t = d_{12}$$

$\Rightarrow \ell(v) \geq 0$ pour les sommets à la frontière entre deux faces
sur la carte bien-étiquetée



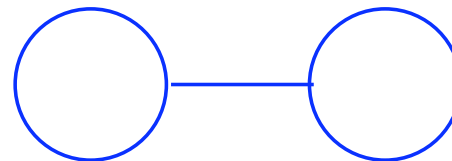
$$\begin{aligned}
 s + t = d_{12} &= \ell(v) - \tau_1 + \ell(v') - \tau_2 + d(v, v') \\
 &= \ell(v) + \ell(v') + d(v, v') + s + t
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ell(v) + \ell(v') + d(v, v') = 0$$

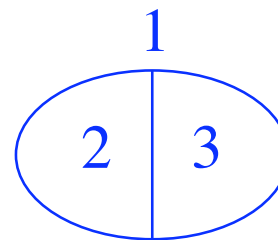
$$\Rightarrow v = v' \text{ et } \ell(v) = 0$$

F_1 et F_2 doivent avoir une frontière commune (+ permutations)

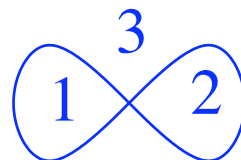
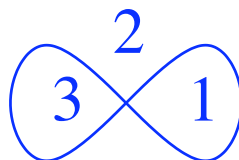
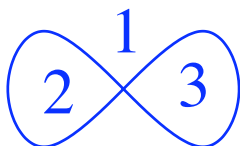
élimine les squelettes du type:



les seuls squelettes possibles sont

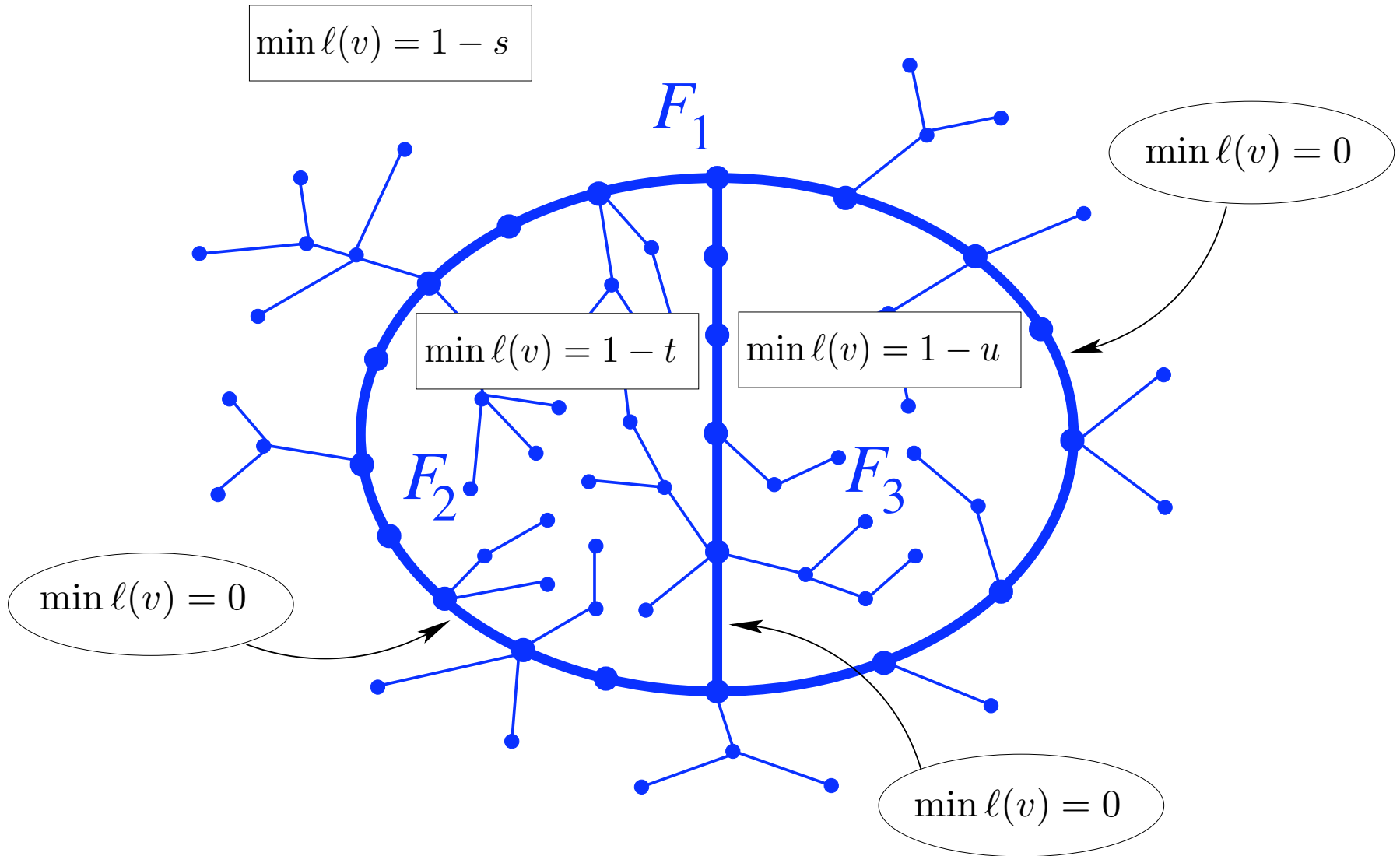


et



en pratique, ces derniers cas peuvent être vus comme des versions dégénérées du précédent quand une des frontières est réduite à un seul sommet.

règles sur les étiquettes



bijection 3:

quadrangulations triplement-pointées

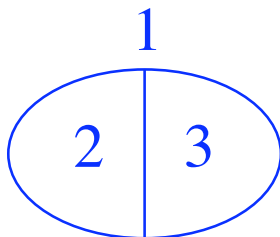
avec sommets marqués à distances prescrites

$d_{12} = s + t$, $d_{23} = t + u$ et $d_{31} = u + s$ avec $s, t, u > 0$

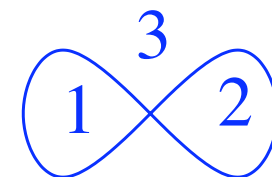
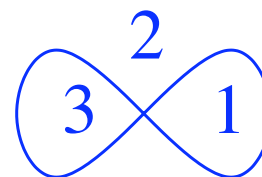
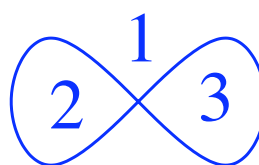


cartes bien-étiquetées à 3 faces

avec un squelette



ou ses versions dégénérées



bijection 3:

quadrangulations triplement-pointées

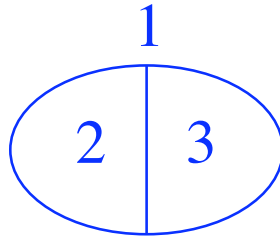
avec sommets marqués à distances prescrites

$$d_{12} = s + t, d_{23} = t + u \text{ et } d_{31} = u + s$$

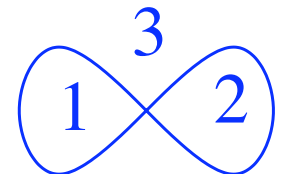
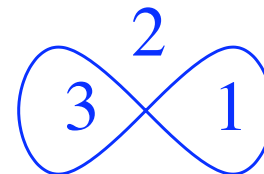
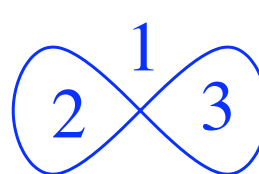


cartes bien-étiquetées à 3 faces

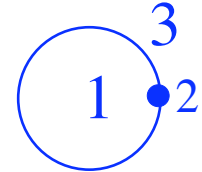
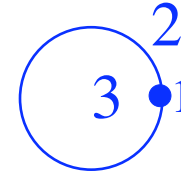
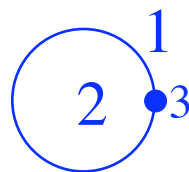
avec un squelette



ou ses versions dégénérées

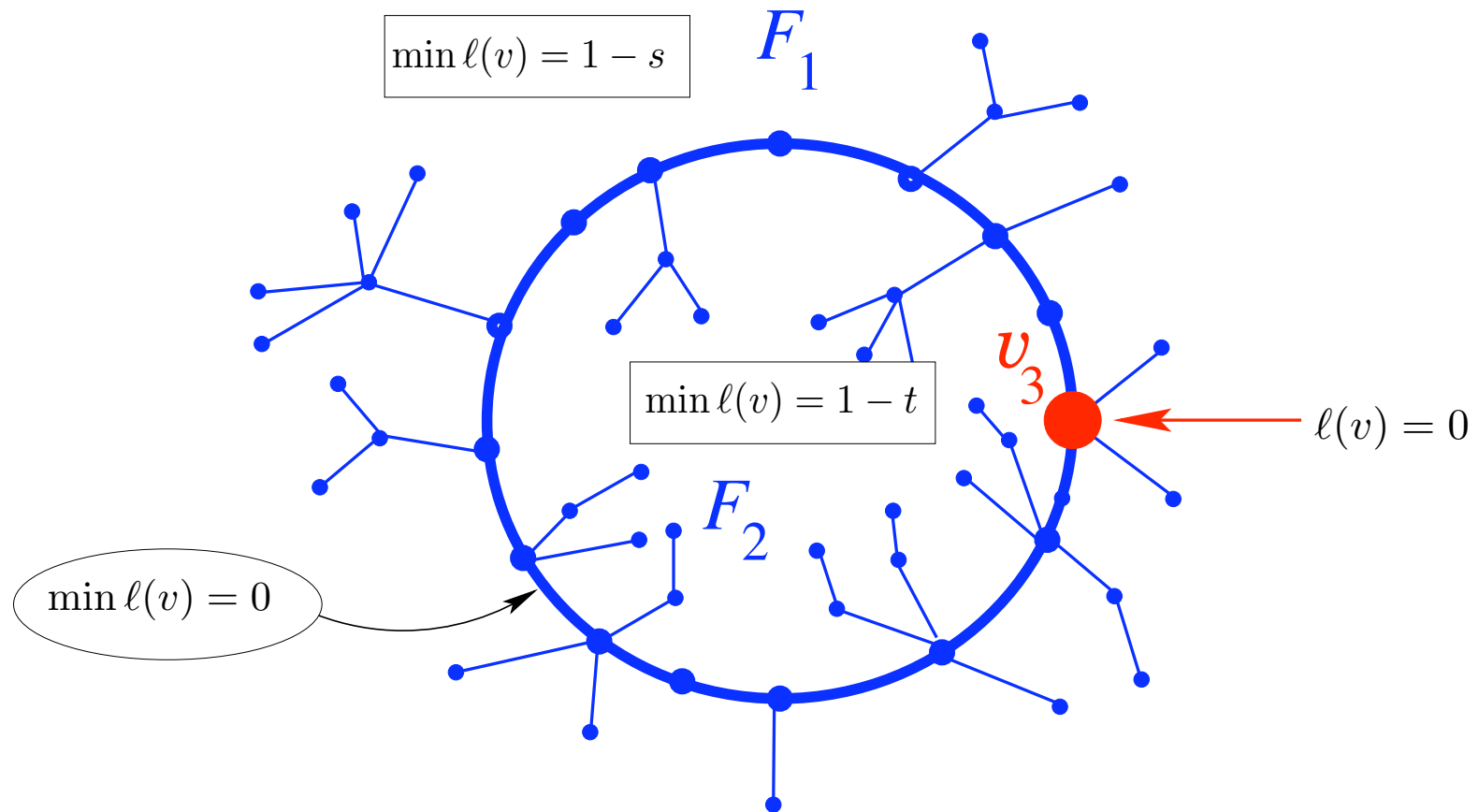


ou ses versions dégénérées

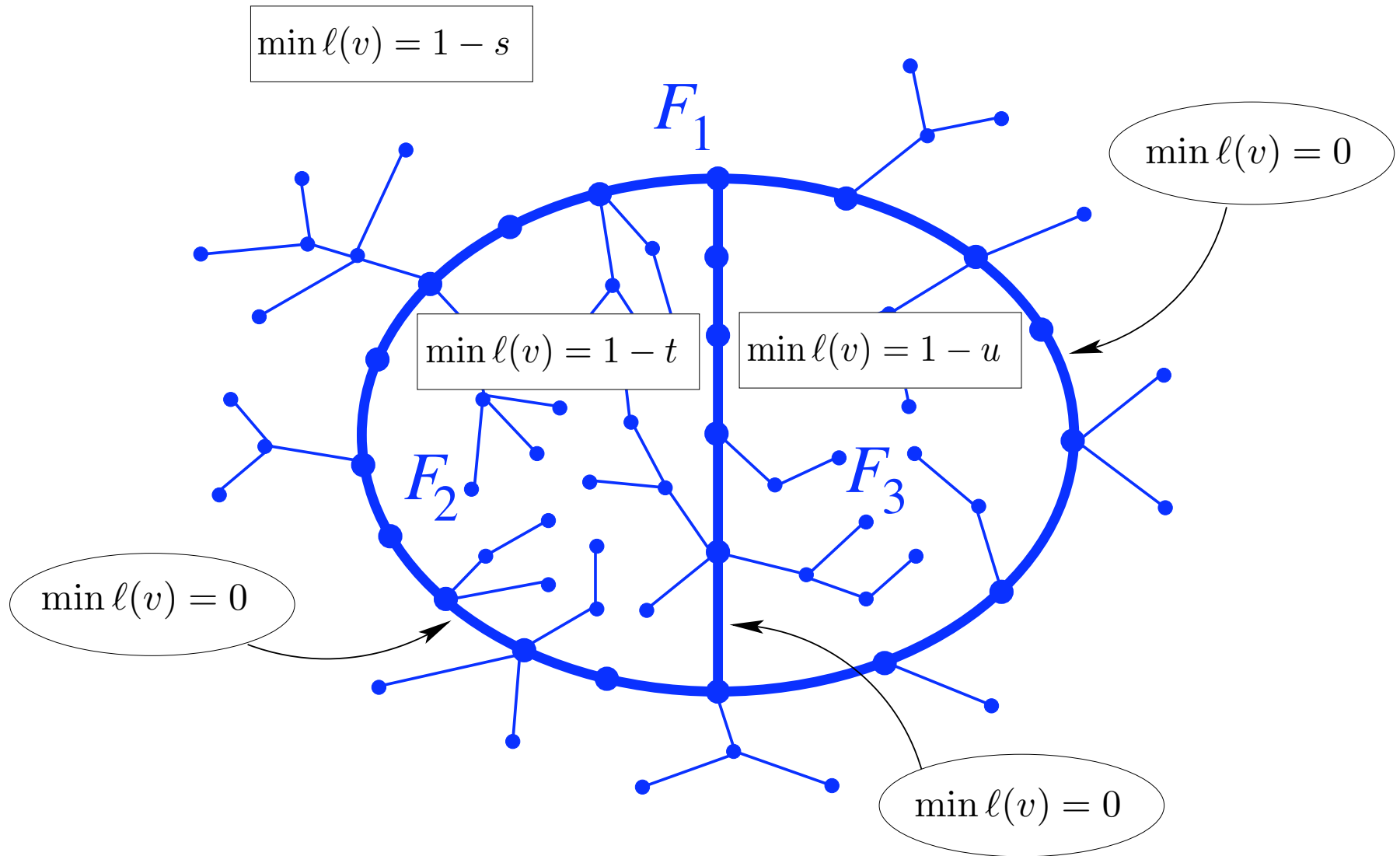


cas aligné

si v_3 se trouve entre v_1 et v_2 ($d_{31} = s$, $d_{23} = t$, $d_{12} = s + t$)
appliquer la construction de Miermont pour v_1 et v_2
seulement, avec des retards $\tau_1 = -s$ et $\tau_2 = -t$



énumération de cartes bien-étiquetées

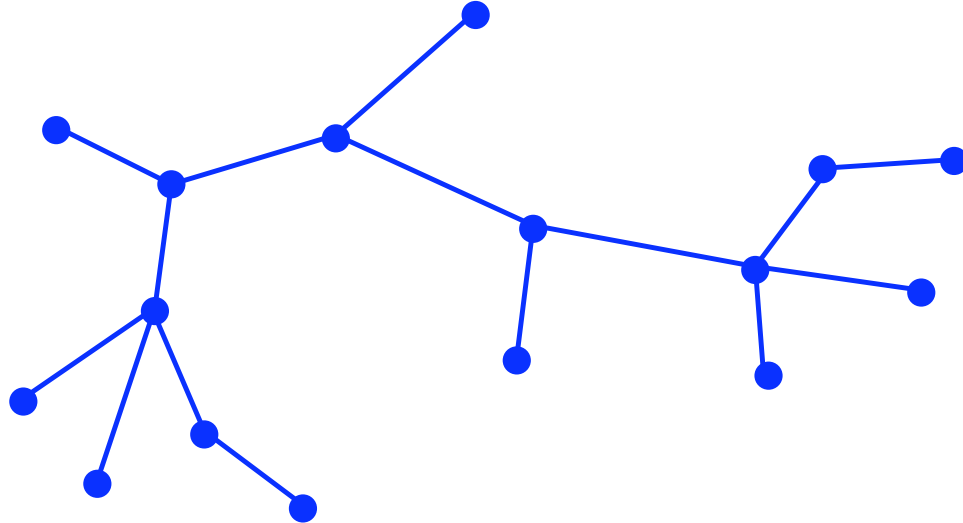


fonctions génératrices

poids g par face de la quadrangulation

\Leftrightarrow poids g par arête de la carte bien-étiquetée

arbre bien-étiqueté

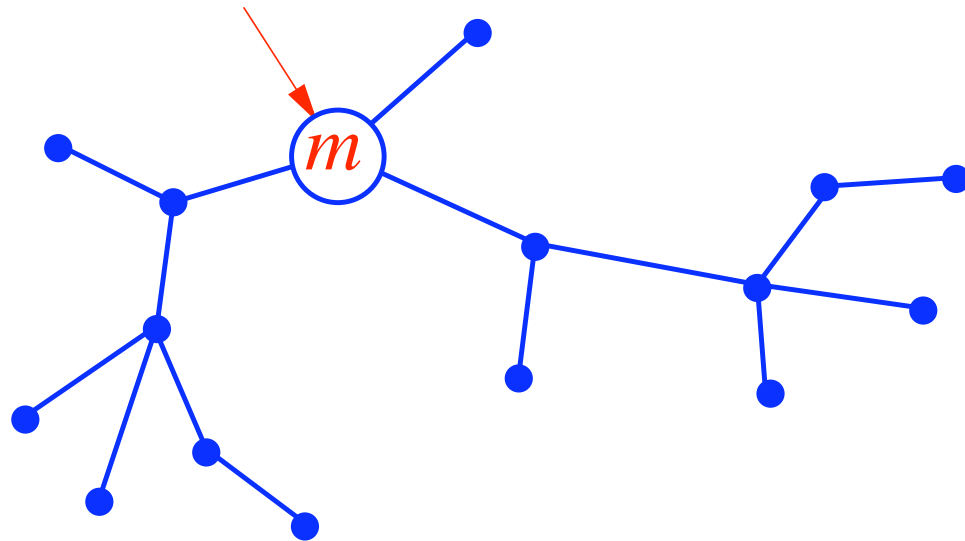


fonctions génératrices

poids g par face de la quadrangulation

\Leftrightarrow poids g par arête de la carte bien-étiquetée

arbre bien-étiqueté



pour avoir une récurrence simple

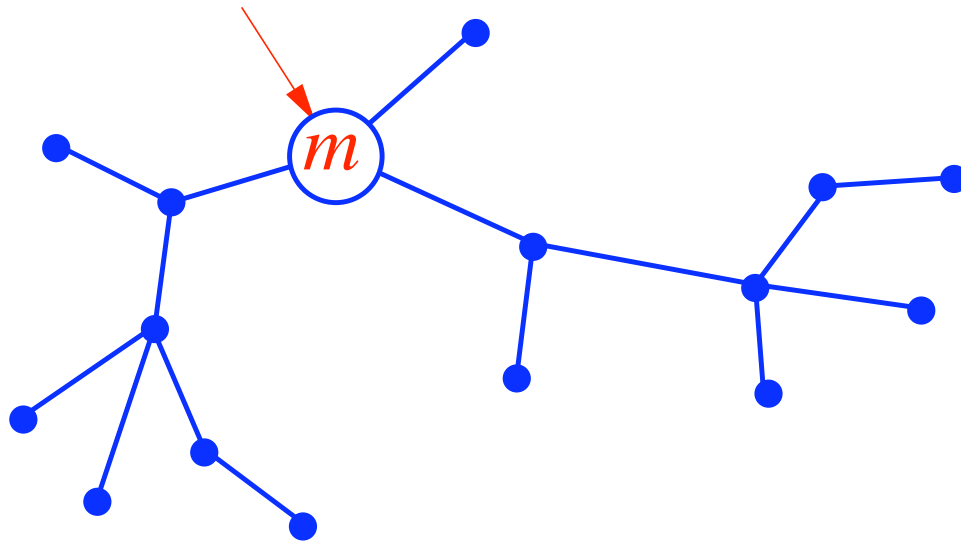
◇ arbres plantés \equiv coin marqué d'étiquette m

fonctions génératrices

poids g par face de la quadrangulation

\Leftrightarrow poids g par arête de la carte bien-étiquetée

arbre bien-étiqueté



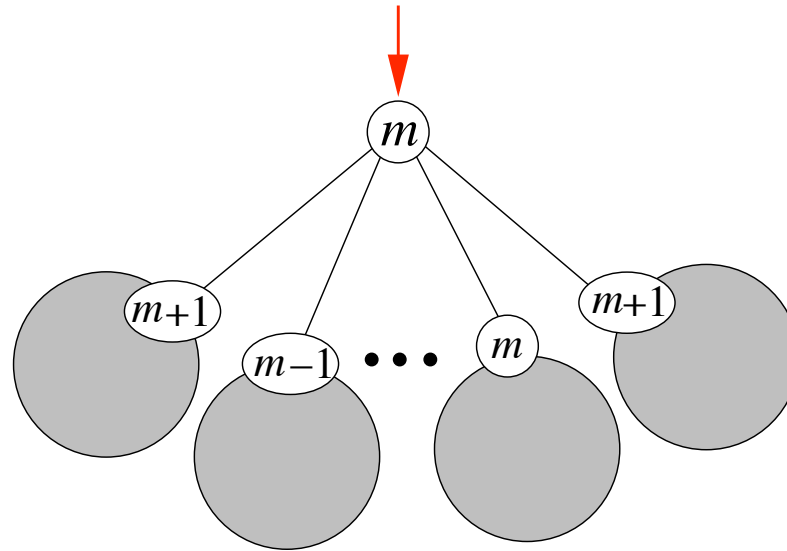
pour avoir une récurrence simple

◇ arbres plantés \equiv coin marqué d'étiquette m

◇ on impose seulement $\min_{v \in \text{arbre}} \ell(v) \geq 1$

récurrence

$$R_m = \sum_{k \geq 0} (g(R_{m-1} + R_m + R_{m+1}))^k$$



$$= \frac{1}{1 - g(R_{m+1} + R_m + R_{m-1})}$$

pour $m \geq 1$ avec la condition initiale $R_0 = 0$

solution

$$R_m = R \frac{[m][m+3]}{[m+1][m+2]}$$

où $R = 1/(1 - 3gR)$, c.à.d.

$$R = \frac{1 - \sqrt{1 - 12g}}{6g}$$

où

$$[m] \equiv \frac{1 - x^m}{1 - x}$$

et où $x + x^{-1} + 1 = 1/(gR^2)$, c.à.d.

$$x = \frac{1 - 24g - \sqrt{1 - 12g} + \sqrt{6}\sqrt{72g^2 + 6g\sqrt{1 - 12g}} - 1}{2(6g + \sqrt{1 - 12g} - 1)}$$

dans la suite, nous aurons à considérer la fonction génératrice des arbres bien-étiquetés avec un coin marqué d'étiquette m et avec la condition:

$$\min_{v \in \text{arbre}} \ell(v) \geq 1 - s$$

cette fonction génératrice n'est autre que: R_{m+s}
comme obtenu par un simple décalage de s des étiquettes.

dans la suite, nous aurons à considérer la fonction génératrice des arbres bien-étiquetés avec un coin marqué d'étiquette m et avec la condition:

$$\min_{v \in \text{arbre}} \ell(v) \geq 1 - s$$

cette fonction génératrice n'est autre que: R_{m+s}
comme obtenu par un simple décalage de s des étiquettes.

si nous voulons plutôt: $\min_{v \in \text{arbre}} \ell(v) = 1 - s$

alors nous devons soustraire les configs. avec
 $\min \geq 2 - s = 1 - (s - 1)$, c.à.d. prendre

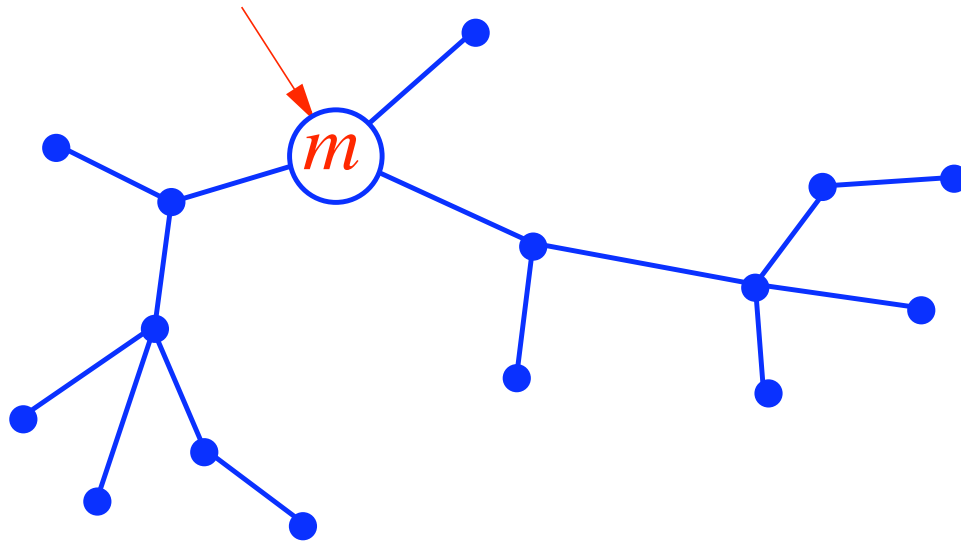
$$R_{m+s} - R_{m+(s-1)}$$

fonction à deux points

une origine marquée + un sommet marqué à distance m
 \Leftrightarrow arbre bien-étiqueté avec un sommet marqué d'étiquette m

fonction à deux points

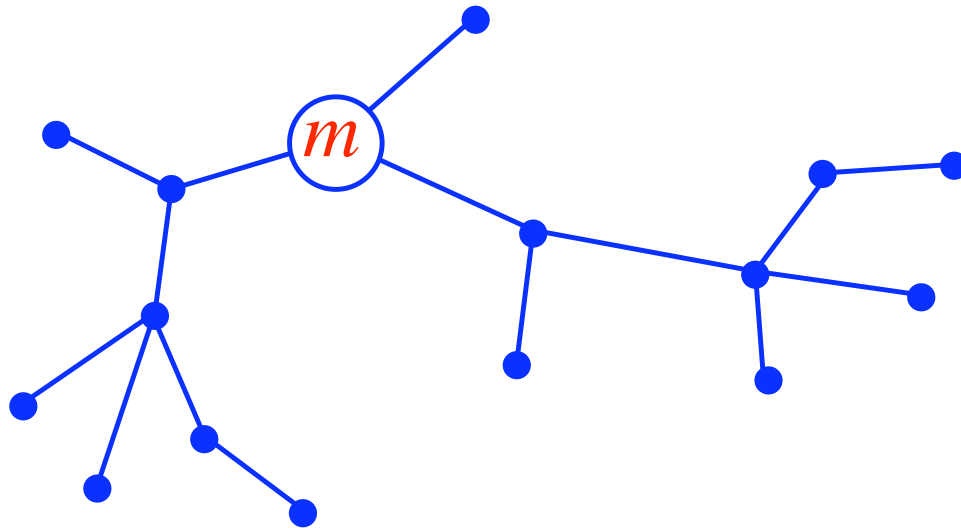
une origine marquée + un sommet marqué à distance m
 \Leftrightarrow arbre bien-étiqueté avec un sommet marqué d'étiquette m



◇ coin marqué d'étiquette m : R_m

fonction à deux points

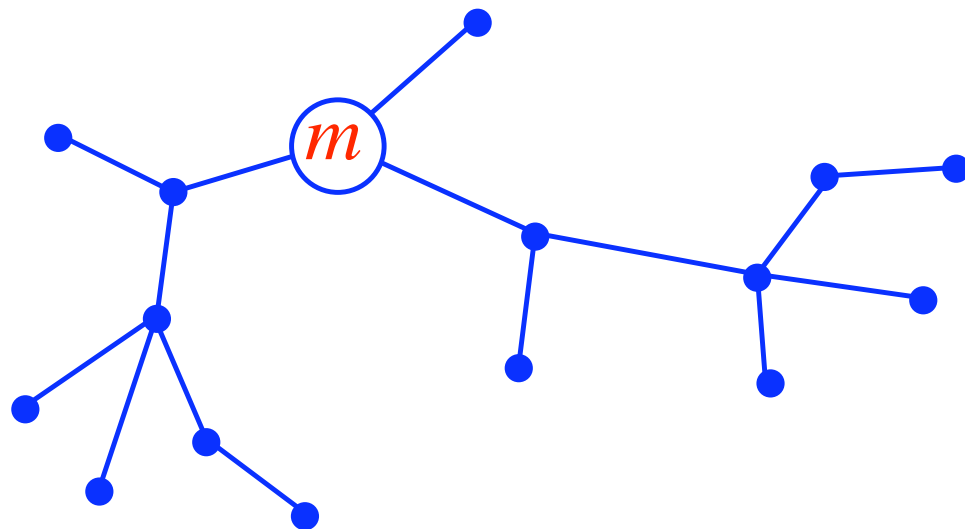
une origine marquée + un sommet marqué à distance m
 \Leftrightarrow arbre bien-étiqueté avec un sommet marqué d'étiquette m



◇ **sommet** marqué d'étiquette m : $L_m = \log R_m$

fonction à deux points

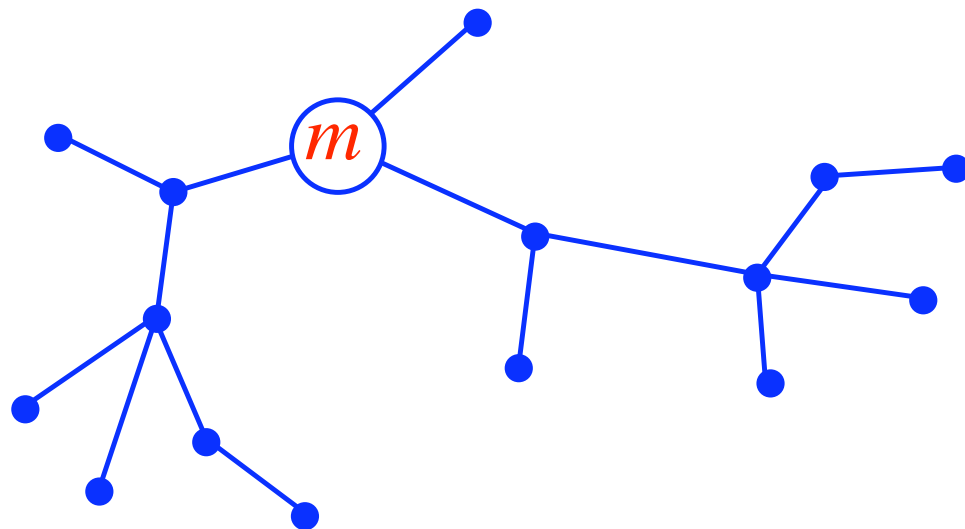
une origine marquée + un sommet marqué à distance m
 \Leftrightarrow arbre bien-étiqueté avec un sommet marqué d'étiquette m



- ◇ **sommet** marqué d'étiquette m : $L_m = \log R_m$
- ◇ on impose $\min_{v \in \text{arbre}} \ell(v) \geq 1$

fonction à deux points

une origine marquée + un sommet marqué à distance m
 \Leftrightarrow arbre bien-étiqueté avec un sommet marqué d'étiquette m



- ◇ **sommet** marqué d'étiquette m : $L_m - L_{m-1} = \log(R_m / R_{m-1})$
- ◇ on impose $\min_{v \in \text{arbre}} \ell(v) = 1$

fonction à deux points

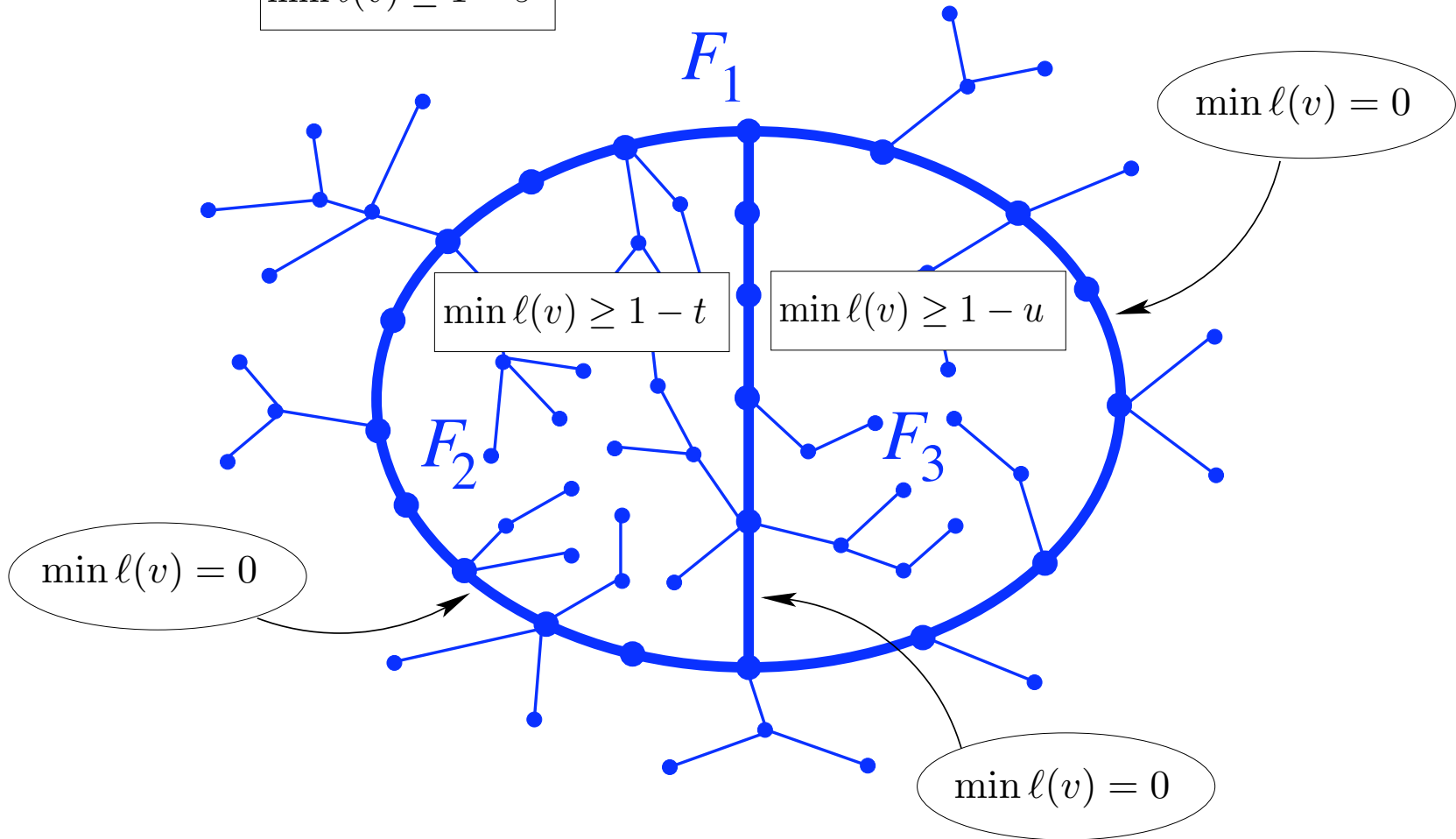
une origine marquée + un sommet marqué à distance m
 \Leftrightarrow arbre bien-étiqueté avec un sommet marqué d'étiquette m

$$G(m; g) = \begin{cases} \log \left(\frac{([m])^2 [m+3]}{[m-1] ([m+2])^2} \right) & \text{pour } m \geq 2 \\ \log \left(R \frac{[1][4]}{[2][3]} \right) & \text{pour } m = 1 \end{cases}$$

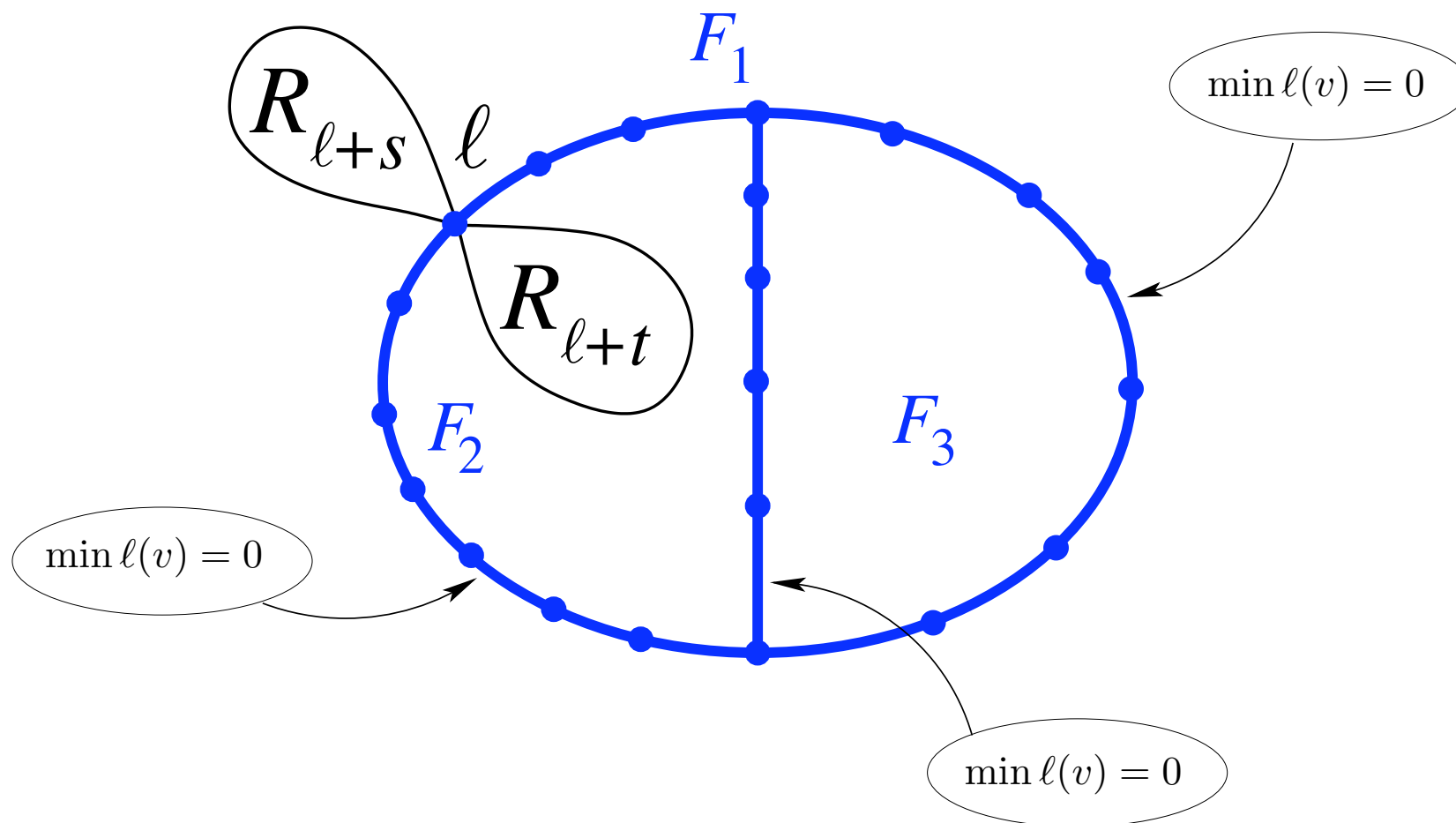
\equiv fonction génératrice des quadrangulations
doublement-pointées dont les deux sommets marqués (et
distingués) sont à distance m l'un de l'autre

on considère la fonction génératrice $F(s, t, u; g)$

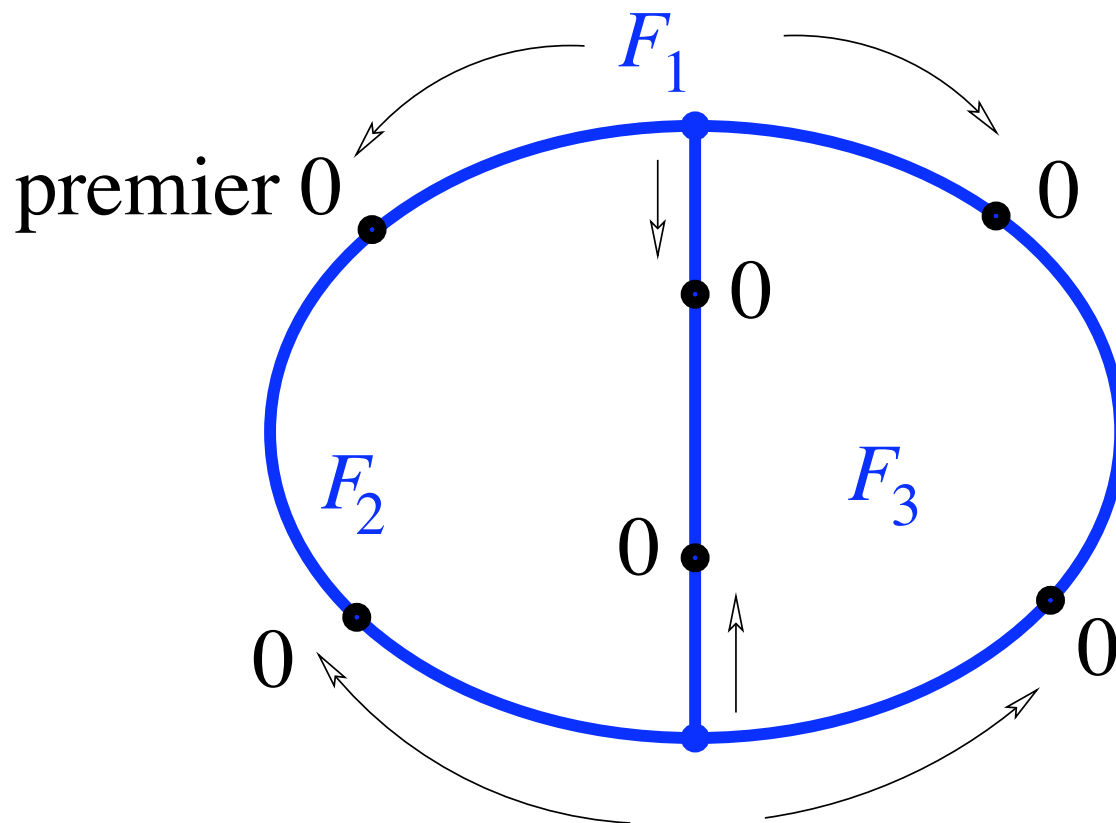
$$\min \ell(v) \geq 1 - s$$



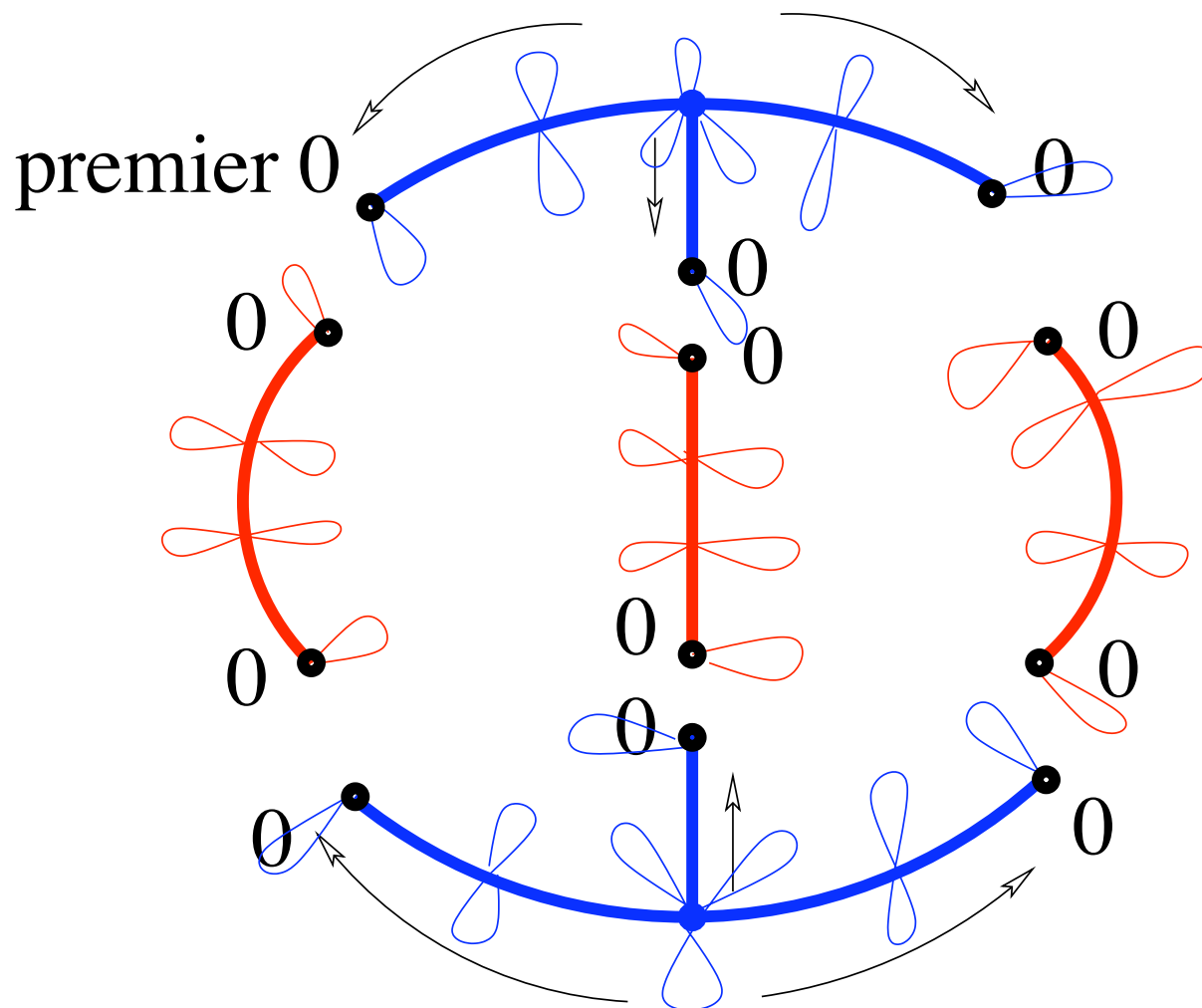
on considère la fonction génératrice $F(s, t, u; g)$



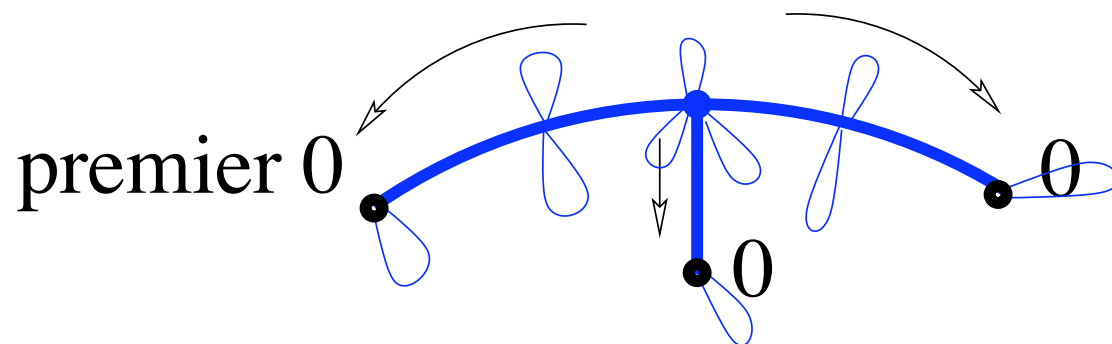
on considère la fonction génératrice $F(s, t, u; g)$



on considère la fonction génératrice $F(s, t, u; g)$



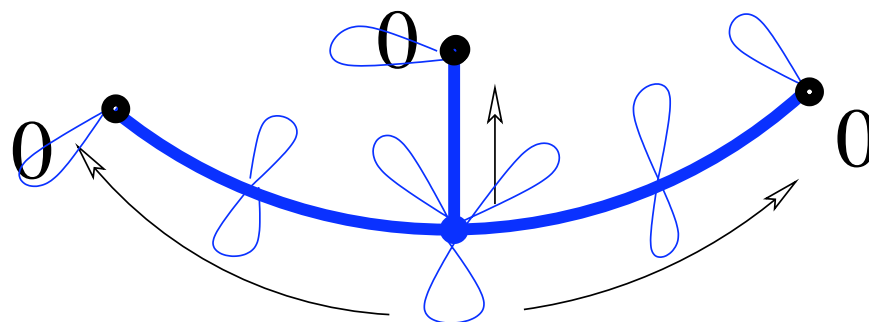
on considère la fonction génératrice $F(s, t, u; g)$



$X_{s,t}$

$X_{t,u}$

$X_{u,s}$



on considère la fonction génératrice $F(s, t, u; g)$

$$Y_{s,t,u}$$

$$X_{s,t}$$

$$X_{t,u}$$

$$X_{u,s}$$

$$Y_{s,t,u}$$

$$F(s, t, u; g) = X_{s,t} X_{t,u} X_{u,s} (Y_{s,t,u})^2$$

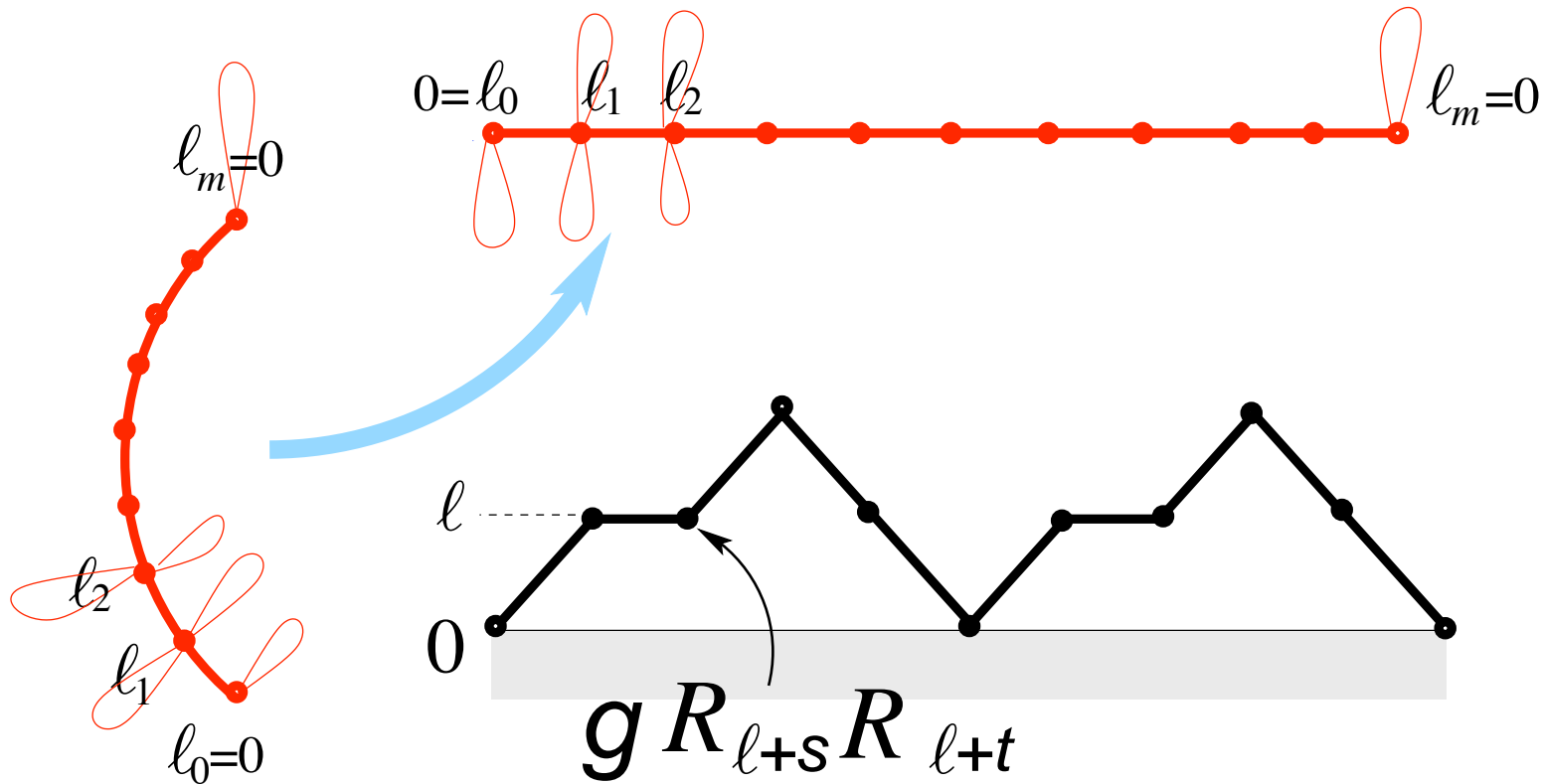
$Y_{s,t,u}$

$X_{s,t}$

$X_{t,u}$

$X_{u,s}$

$Y_{s,t,u}$



$$X_{s,t} = \sum_{m \geq 0} \sum_{\text{chemins de Motzkin de longueur } m} \prod_{k=0}^{m-1} g R_{\ell_k+s} R_{\ell_k+t}$$

$\mathcal{M}=(0=\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_m=0)$

récurrence:

$$X_{s,t} = 1 + gR_s R_t X_{s,t} (1 + gR_{s+1} R_{t+1} X_{s+1,t+1})$$

réurrence:

$$X_{s,t} = 1 + gR_s R_t X_{s,t} (1 + gR_{s+1} R_{t+1} X_{s+1,t+1})$$

solution: \rightarrow

$$X_{s,t} = \frac{[3][s+1][t+1][s+t+3]}{[1][s+3][t+3][s+t+1]}$$

réurrence:

$$X_{s,t} = 1 + gR_s R_t X_{s,t} (1 + gR_{s+1} R_{t+1} X_{s+1,t+1})$$

solution: \rightarrow

$$X_{s,t} = \frac{[3][s+1][t+1][s+t+3]}{[1][s+3][t+3][s+t+1]}$$

de même, récurrence pour $Y_{s,t,u}$:

$$Y_{s,t,u} = 1 + g^3 R_s R_t R_u R_{s+1} R_{t+1} R_{u+1} \\ \times X_{s+1,t+1} X_{t+1,u+1} X_{u+1,s+1} Y_{s+1,t+1,u+1}$$

réurrence:

$$X_{s,t} = 1 + gR_s R_t X_{s,t} (1 + gR_{s+1} R_{t+1} X_{s+1,t+1})$$

solution: \rightarrow

$$X_{s,t} = \frac{[3][s+1][t+1][s+t+3]}{[1][s+3][t+3][s+t+1]}$$

de même, récurrence pour $Y_{s,t,u}$:

$$Y_{s,t,u} = 1 + g^3 R_s R_t R_u R_{s+1} R_{t+1} R_{u+1} \\ \times X_{s+1,t+1} X_{t+1,u+1} X_{u+1,s+1} Y_{s+1,t+1,u+1}$$

solution:

$$Y_{s,t,u} = \frac{[s+3][t+3][u+3][s+t+u+3]}{[3][s+t+3][t+u+3][u+s+3]}$$

fonction à trois points

$$F(s, t, u; g) = X_{s,t} X_{t,u} X_{u,s} (Y_{s,t,u})^2$$

$$= \frac{[3] ([s+1][t+1][u+1][s+t+u+3])^2}{[1]^3 [s+t+1][s+t+3][t+u+1][t+u+3][u+s+1][u+s+3]}$$

et la fonction à trois points grand-canonique des quadrangulations s'écrit

$$G(d_{12}, d_{23}, d_{31}; g) = \Delta_s \Delta_t \Delta_u F(s, t, u; g)$$

avec $\Delta_s f(s) \equiv f(s) - f(s-1)$, et

$$s = (d_{12} - d_{23} + d_{31})/2$$

$$t = (d_{12} + d_{23} - d_{31})/2$$

$$u = (-d_{12} + d_{23} + d_{31})/2$$

limite d'échelle

grandes quadrangulations: une limite d'échelle intéressante est obtenue en faisant tendre g vers sa valeur critique $1/12$ et en considérant des distances grandes:

$$g = \frac{1}{12} (1 - \Lambda\epsilon)$$

$$m = D\epsilon^{-1/4}$$

et $\epsilon \rightarrow 0$.

$$x = e^{-\sqrt{6}\Lambda^{1/4}\epsilon^{1/4}}$$

et dans toute combinaison bien équilibrée de $[\cdot]$'s,

$$[m] = \frac{1 - x^m}{1 - x} \rightarrow \sinh(\alpha D), \quad \alpha = \sqrt{\frac{3}{2}}\Lambda^{1/4}$$

fonction à deux points

$$G(m; g) \sim \epsilon^{3/4} \mathcal{G}(D, \alpha)$$

avec

$$\mathcal{G}(D; \alpha) = 4\alpha^3 \frac{\cosh(\alpha D)}{\sinh^3(\alpha D)}$$

Ambjørn Watabiki (1995)

fonction à trois points

$$d_{12} = D_{12}\epsilon^{-1/4} \quad d_{23} = D_{23}\epsilon^{-1/4} \quad d_{31} = D_{31}\epsilon^{-1/4}$$

$$s = S\epsilon^{-1/4} \quad t = T\epsilon^{-1/4} \quad u = U\epsilon^{-1/4}$$

$$F(s, t, u; g) \sim \epsilon^{-1/2} \mathcal{F}(S, T, U; \alpha)$$

avec $\mathcal{F}(S, T, U; \alpha) =$

$$\frac{3}{\alpha^2} \left(\frac{\sinh(\alpha(S + T + U)) \sinh(\alpha S) \sinh(\alpha T) \sinh(\alpha U)}{\sinh(\alpha(S + T)) \sinh(\alpha(T + U)) \sinh(\alpha(U + S))} \right)^2$$

$$G(d_{12}, d_{23}, d_{31}; g) \sim \epsilon^{1/4} \mathcal{G}(D_{12}, D_{23}, D_{31}; \alpha)$$

avec

$$\mathcal{G}(D_{12}, D_{23}, D_{31}; \alpha) = \partial_S \partial_T \partial_U \mathcal{F}(S, T, U; \alpha)$$

$$S = (D_{12} - D_{23} + D_{31})/2$$

$$T = (D_{12} + D_{23} - D_{31})/2$$

$$U = (-D_{12} + D_{23} + D_{31})/2$$

fonction à deux points canonique

ensemble canonique des quadrangulations doublement pointées **de taille n fixée** (= nombre de faces)

$$G(m; g)|_{g^n} = \oint \frac{dg}{2i\pi g^{n+1}} G(m; g)$$

limite d'échelle: pour n grand et $m = Dn^{1/4}$, calcul par méthode du col:

$$g = \frac{1}{12} \left(1 + \frac{\xi^2}{n} \right)$$

$$\rightarrow \epsilon = 1/n \text{ et } \Lambda = -\xi^2 \quad \left(\text{c.à.d. } \alpha = \sqrt{-\frac{3}{2}i\xi} \right)$$

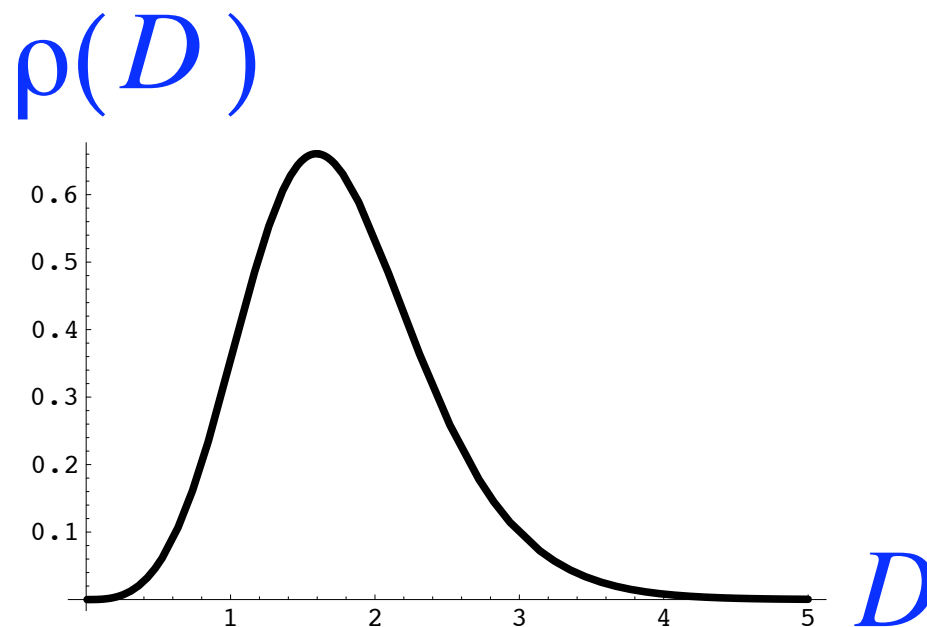
après normalisation, nous obtenons la densité de probabilité

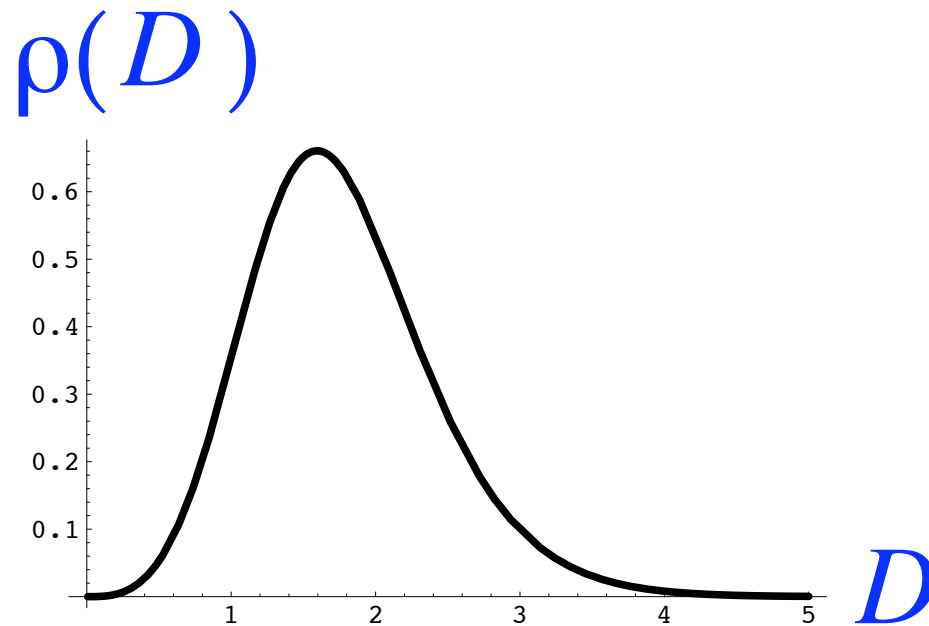
$$\rho(D) = \frac{2}{i\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \xi e^{-\xi^2} \mathcal{G}(D; \sqrt{-3i\xi/2})$$

$\rho(D)dD$ est la probabilité que les deux sommets marqués soient à une distance (renormalisée) dans l'intervalle $[D, D + dD]$ dans l'ensemble des quadrangulations doublement pointées de grande taille n fixée

après normalisation, nous obtenons la densité de probabilité

$$\rho(D) = \frac{2}{i\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \xi e^{-\xi^2} \mathcal{G}(D; \sqrt{-3i\xi/2})$$





$$\rho(D) \underset{D \rightarrow 0}{\sim} \frac{3}{7} D^3, \quad \rho(D) \underset{D \rightarrow \infty}{\sim} \exp\left(-\frac{3}{4} 3^{2/3} D^{4/3}\right)$$

en accord avec la loi de Fisher $\delta = \frac{4}{3} = \frac{1}{1-\nu}$ avec $\nu = \frac{1}{4} = \frac{1}{d_F}$

fonction à trois points canonique

ensemble des quadrangulations triplement pointées de
taille n fixée

$$G(d_{12}, d_{23}, d_{31}; g)|_{g^n} = \oint \frac{dg}{2i\pi g^{n+1}} G(d_{12}, d_{23}, d_{31}; g)$$

limite d'échelle: pour n grand et

$$d_{12} = D_{12}n^{1/4} \quad d_{23} = D_{23}n^{1/4} \quad d_{31} = D_{31}n^{1/4}$$

$$s = S n^{1/4} \quad t = T n^{1/4} \quad u = U n^{1/4}$$

nous obtenons la densité de probabilité

$$\rho(D_{12}, D_{23}, D_{31}) = \frac{1}{i\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \xi e^{-\xi^2} \mathcal{G}(D_{12}, D_{23}, D_{31}; \sqrt{-3i\xi/2})$$

$\rho(D_{12}, D_{23}, D_{31})dD_{12}dD_{23}dD_{31}$ est la probabilité que les trois sommets marqués soient à distances mutuelles dans les intervalles $[D_{12}, D_{12} + dD_{12}]$, $[D_{23}, D_{23} + dD_{23}]$ et $[D_{31}, D_{31} + dD_{31}]$ dans l'ensemble des quadrangulations triplement pointées de grande taille fixée n

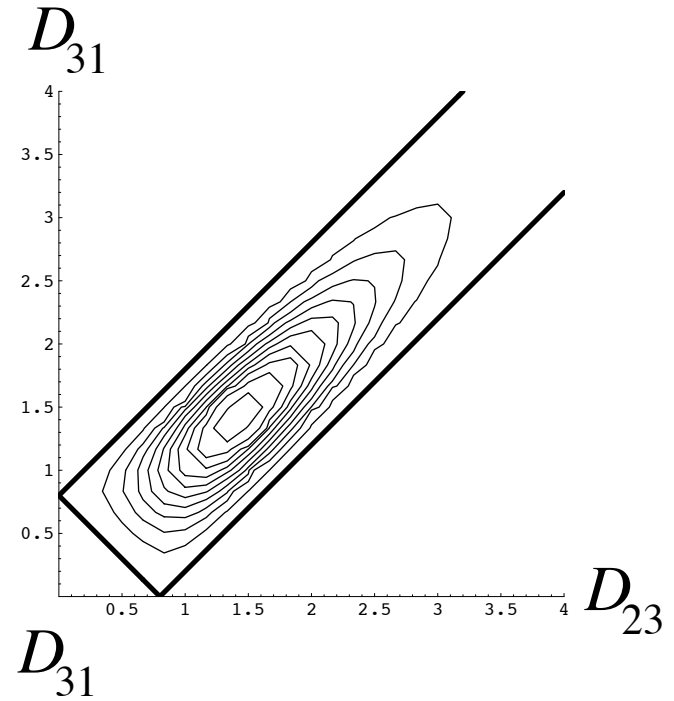
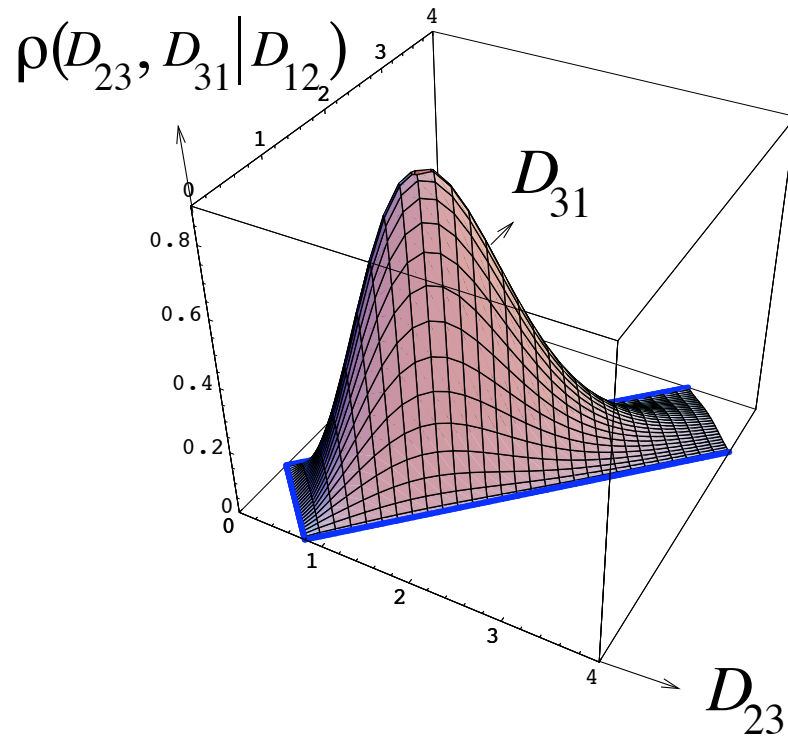
densité de probabilité conditionnelle

on fixe une des distances, par exemple D_{12} , et on considère la densité de probabilité conditionnelle

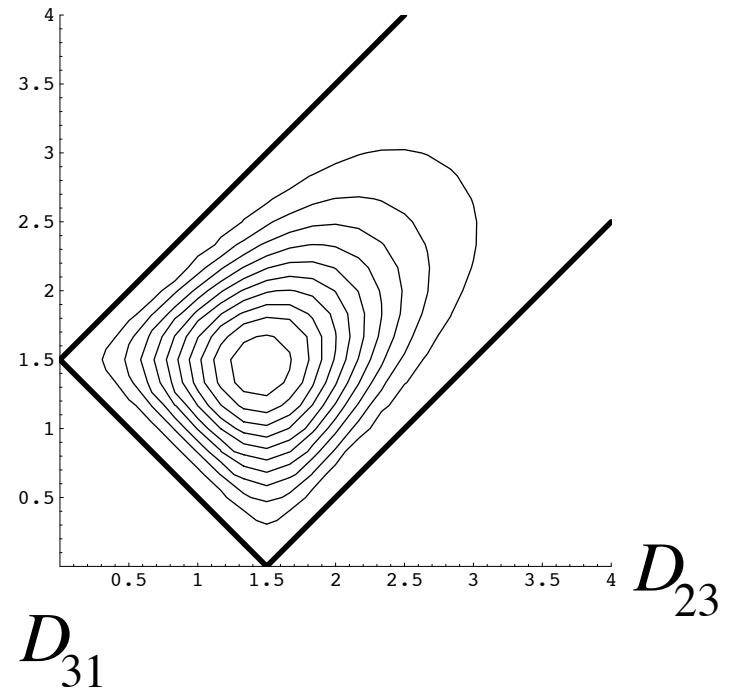
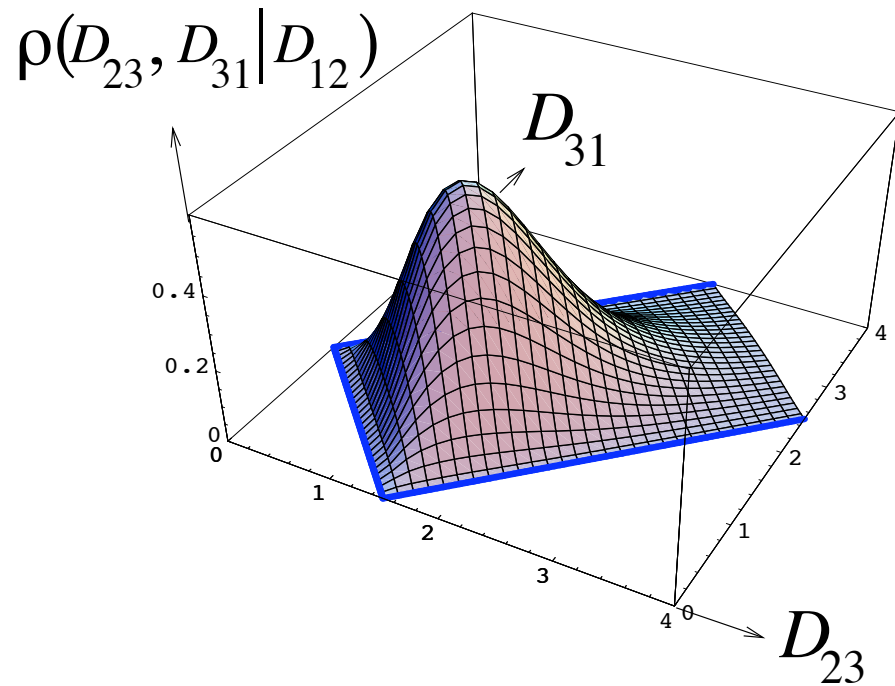
$$\rho(D_{23}, D_{31}|D_{12}) \equiv \frac{\rho(D_{12}, D_{23}, D_{31})}{\rho(D_{12})}$$

$\rho(D_{23}, D_{31}|D_{12})dD_{23}dD_{31}$ est la probabilité que le troisième sommet soit à des distances respectives des deux premiers dans les intervalles $[D_{23}, D_{23} + dD_{23}]$ et $[D_{31}, D_{31} + dD_{31}]$ dans l'ensemble des quadrangulations triplement pointées de grande taille fixé n , sachant que la distance entre les deux premiers sommets marqués est D_{12}

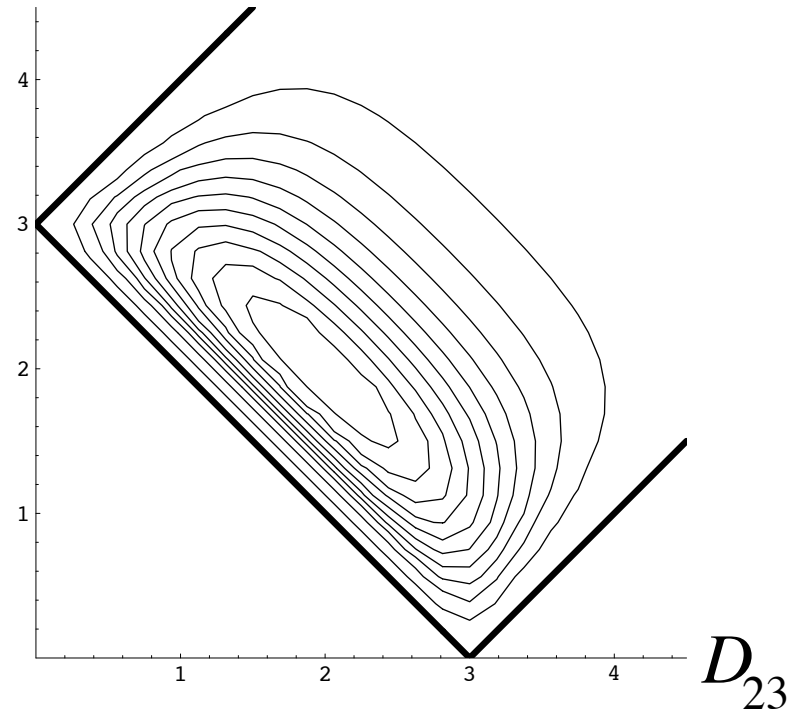
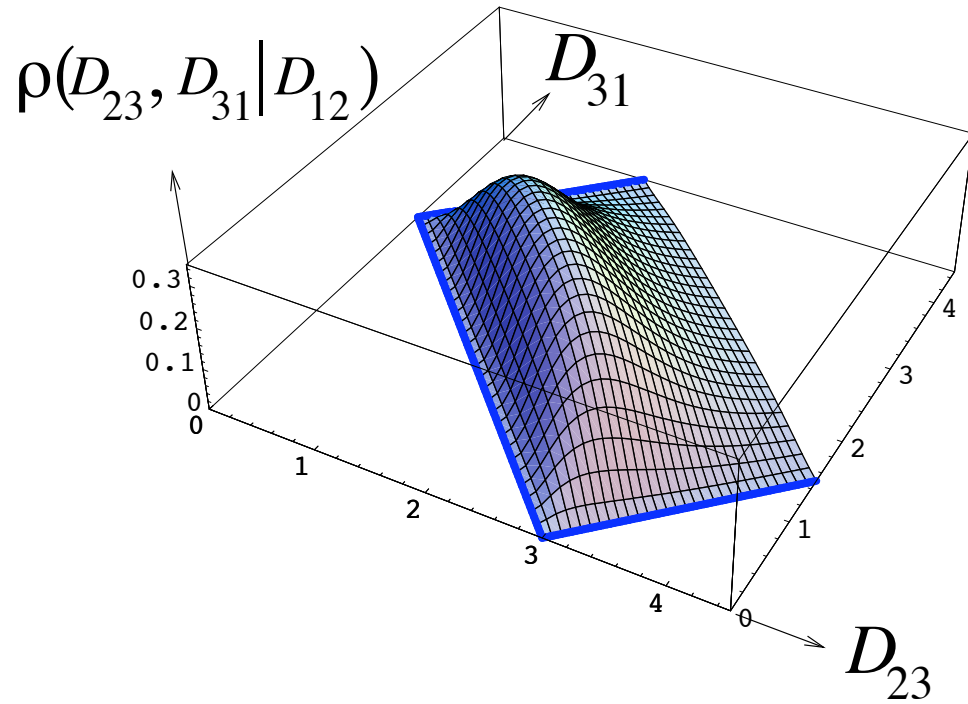
$$D_{12} = 0.8$$



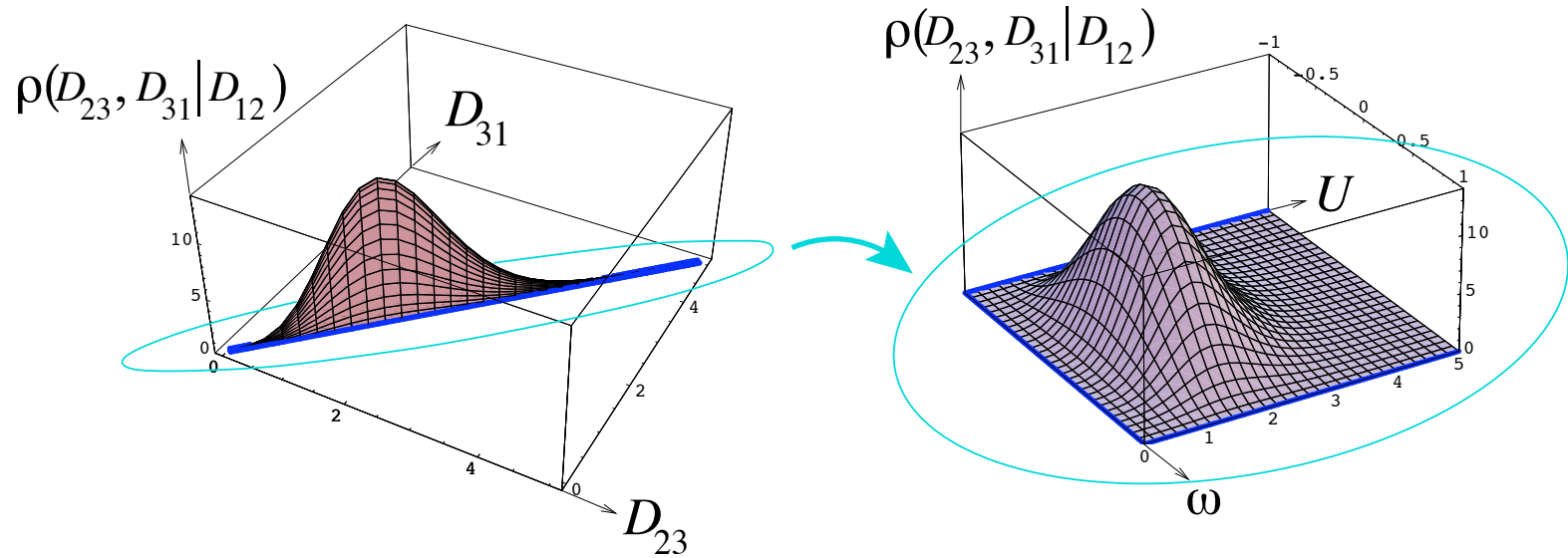
$$D_{12} = 1.5$$



$$D_{12} = 3.0$$



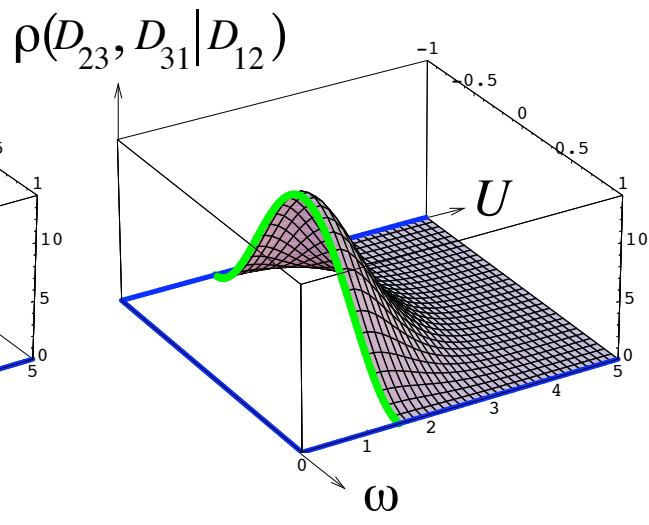
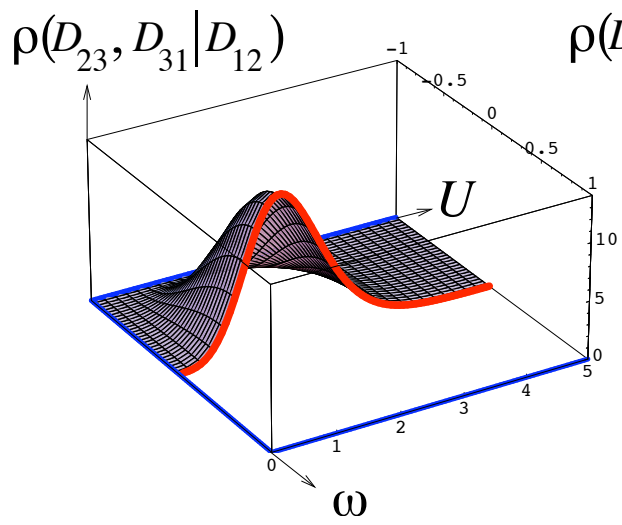
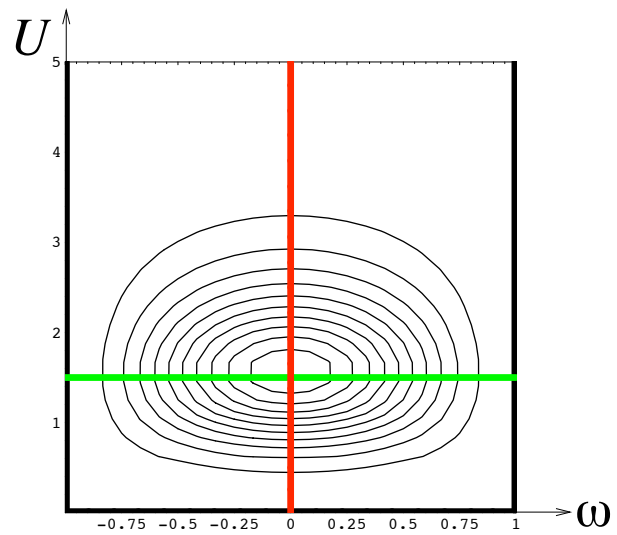
limite D_{12} petit

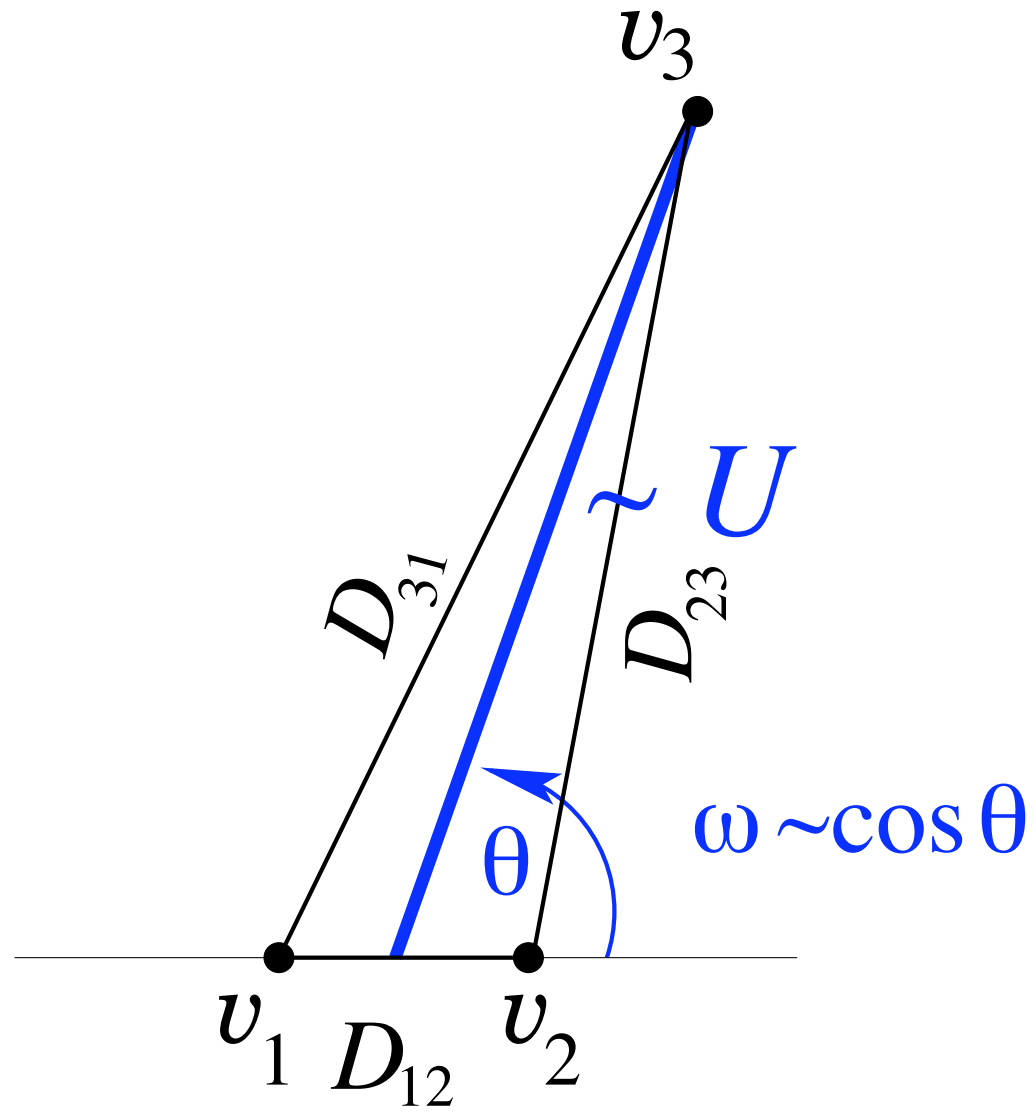


$$\rho(D_{23}, D_{31} | D_{12}) \sim \frac{1}{D_{12}} \times \rho(U) \times \psi(\omega)$$

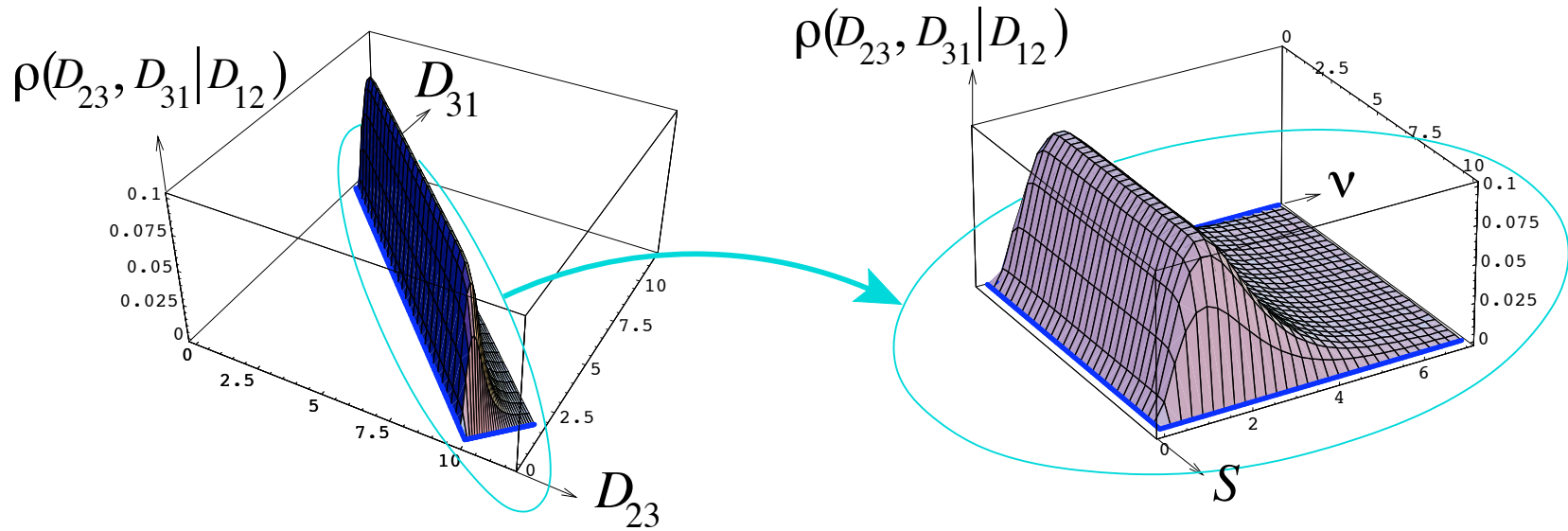
où $U = (D_{23} + D_{31} - D_{12})/2$, $\omega = (D_{31} - D_{23})/D_{12}$, et

$$\psi(\omega) \equiv \frac{21}{64} (1 - \omega^2)^2 (3 - \omega^2)$$





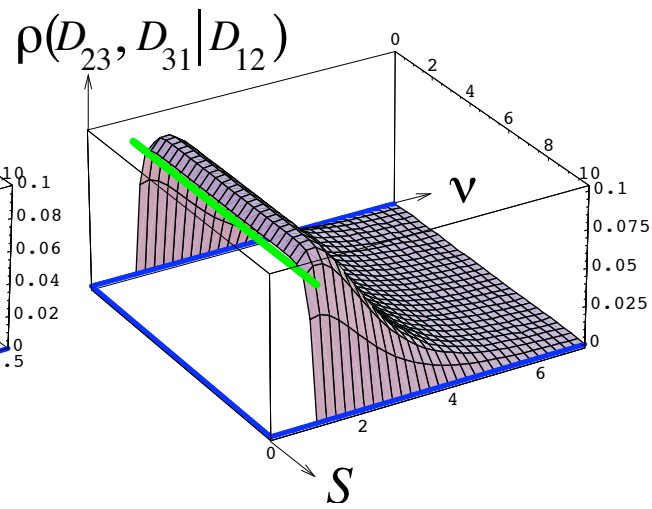
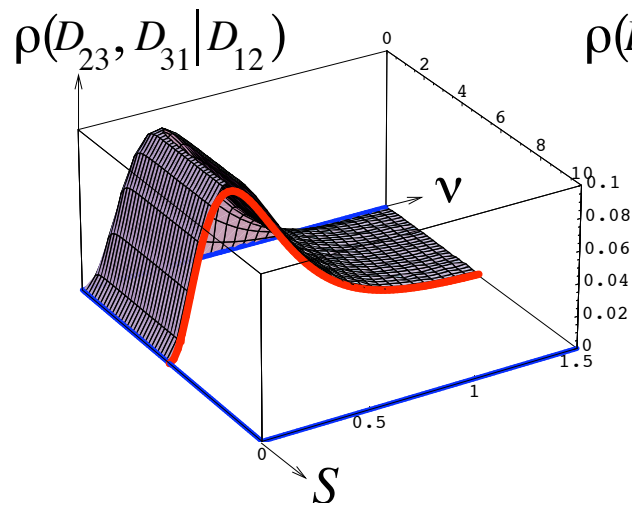
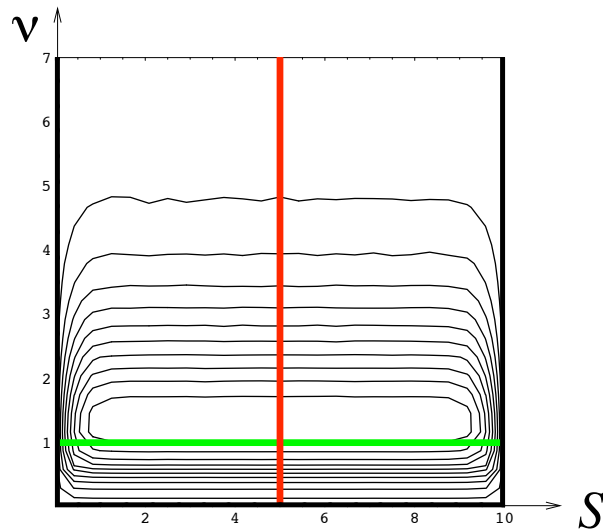
limit D_{12} grand

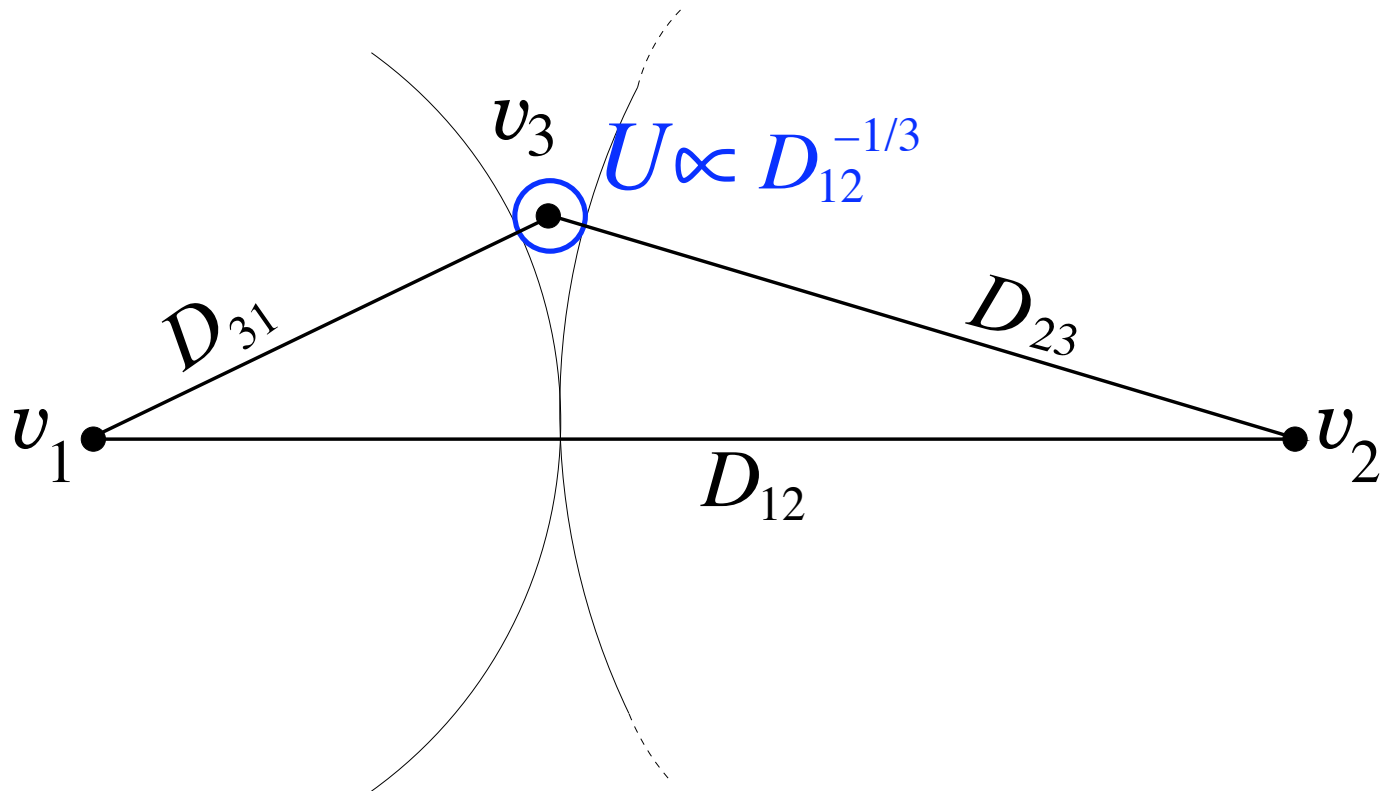


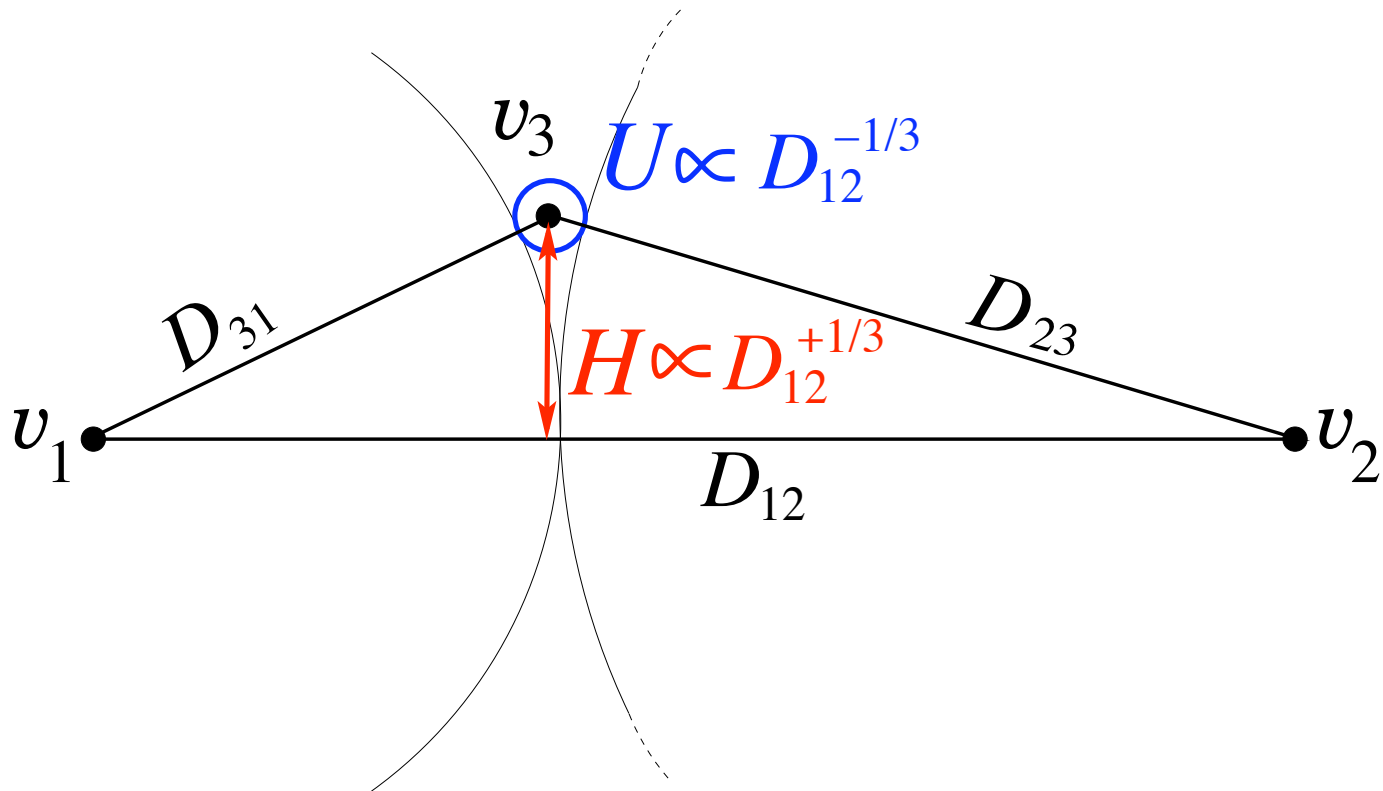
$$\rho(D_{23}, D_{31} | D_{12}) \sim \frac{1}{2D_{12}} \times (9D_{12})^{1/3} \varphi(\nu)$$

où $\nu = (9D_{12})^{1/3}(D_{23} + D_{31} - D_{12})/2$, et

$$\varphi(\nu) \equiv \frac{4}{3} \sinh(\nu/2)^2 (11e^{-2\nu} - 8e^{-3\nu})$$







conclusion

- formule explicite pour la fonction à trois points des quadrangulations $G(d_{12}, d_{23}, d_{31}; g)$

conclusion

- formule explicite pour la fonction à trois points des quadrangulations $G(d_{12}, d_{23}, d_{31}; g)$
- bijection de Miermont + choix particulier des retards

conclusion

- formule explicite pour la fonction à trois points des quadrangulations $G(d_{12}, d_{23}, d_{31}; g)$
- bijection de Miermont + choix particulier des retards
- formules explicites pour deux "briques" combinatoires:
 - un "propagateur" $X_{s,t}$ (= chaîne d'arbres)
 - un "vertex" $Y_{s,t,u}$ (= 3-étoile)

conclusion

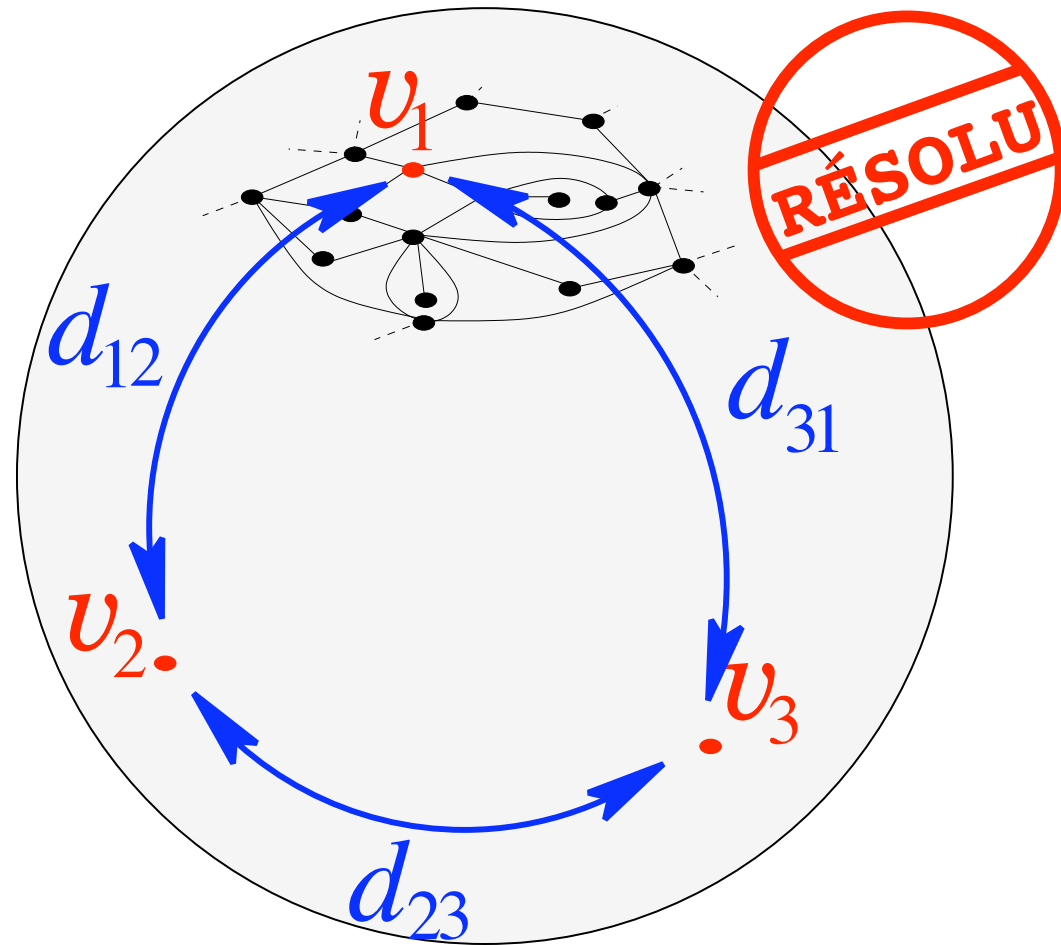
- formule explicite pour la fonction à trois points des quadrangulations $G(d_{12}, d_{23}, d_{31}; g)$
 - bijection de Miermont + choix particulier des retards
 - formules explicites pour deux "briques" combinatoires:
 - un "propagateur" $X_{s,t}$ (= chaîne d'arbres)
 - un "vertex" $Y_{s,t,u}$ (= 3-étoile)
- autres applications: - géométrie des géodésiques
- boucles géodésiques

conclusion

- formule explicite pour la fonction à trois points des quadrangulations $G(d_{12}, d_{23}, d_{31}; g)$
 - bijection de Miermont + choix particulier des retards
 - formules explicites pour deux "briques" combinatoires:
 - un "propagateur" $X_{s,t}$ (= chaîne d'arbres)
 - un "vertex" $Y_{s,t,u}$ (= 3-étoile)
- autres applications: - géométrie des géodésiques
- boucles géodésiques
- limite d'échelle à la fois dans l'ensemble grand canonique et l'ensemble canonique

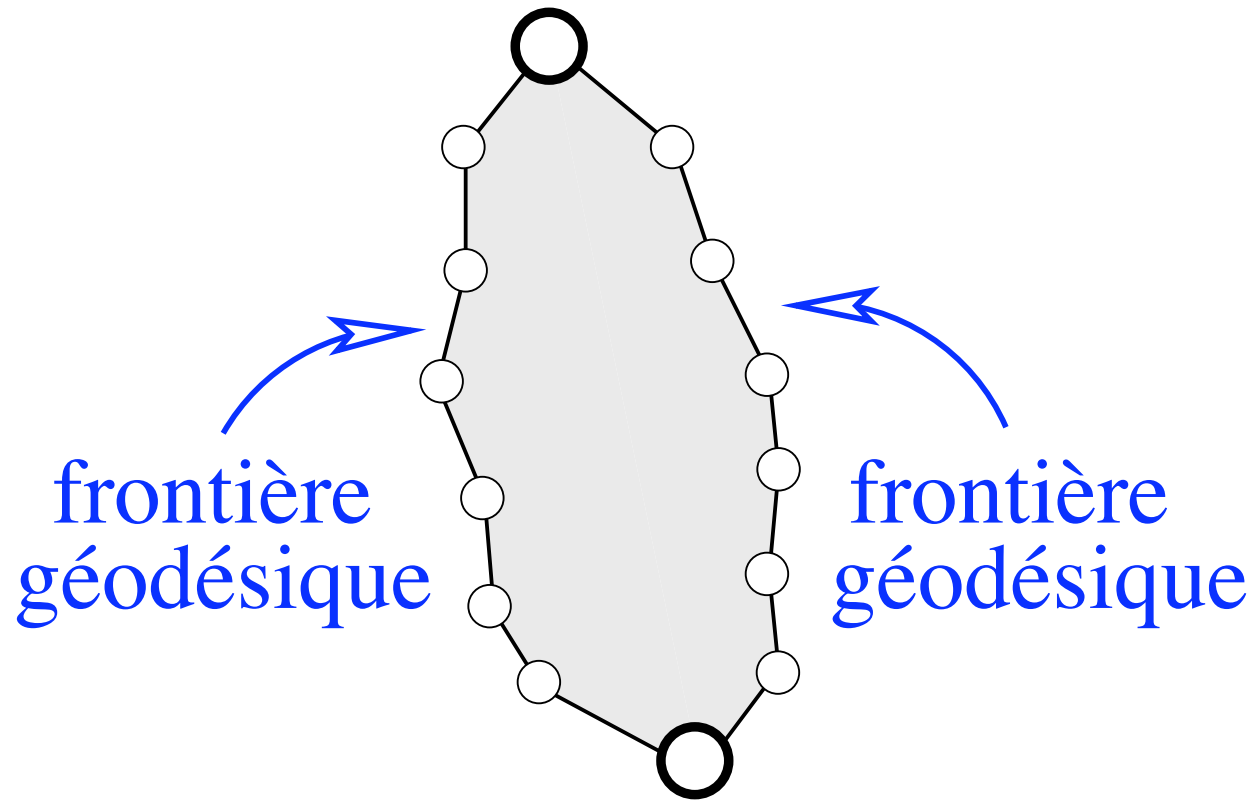
conclusion

- formule explicite pour la fonction à trois points des quadrangulations $G(d_{12}, d_{23}, d_{31}; g)$
 - bijection de Miermont + choix particulier des retards
 - formules explicites pour deux "briques" combinatoires:
 - un "propagateur" $X_{s,t}$ (= chaîne d'arbres)
 - un "vertex" $Y_{s,t,u}$ (= 3-étoile)
- autres applications: - géométrie des géodésiques
- boucles géodésiques
- limite d'échelle à la fois dans l'ensemble grand canonique et l'ensemble canonique
 - formules très explicites dans diverses limites



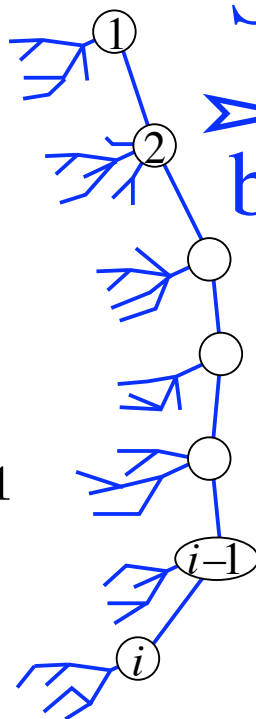
dérivation bijective de la formule pour $X_{s,t}$

$$X_{s,t} = \frac{\prod_{m=1}^{s+t} R_m}{\prod_{m=1}^s R_m \prod_{m=1}^t R_m}$$

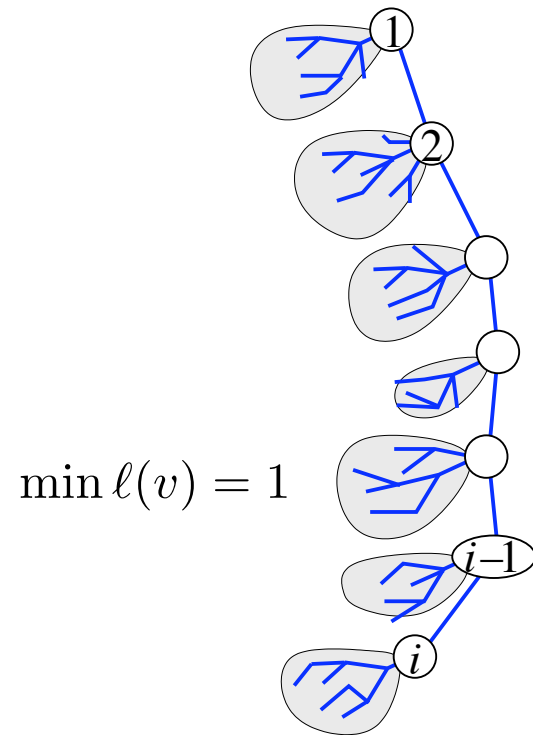


Schaeffer

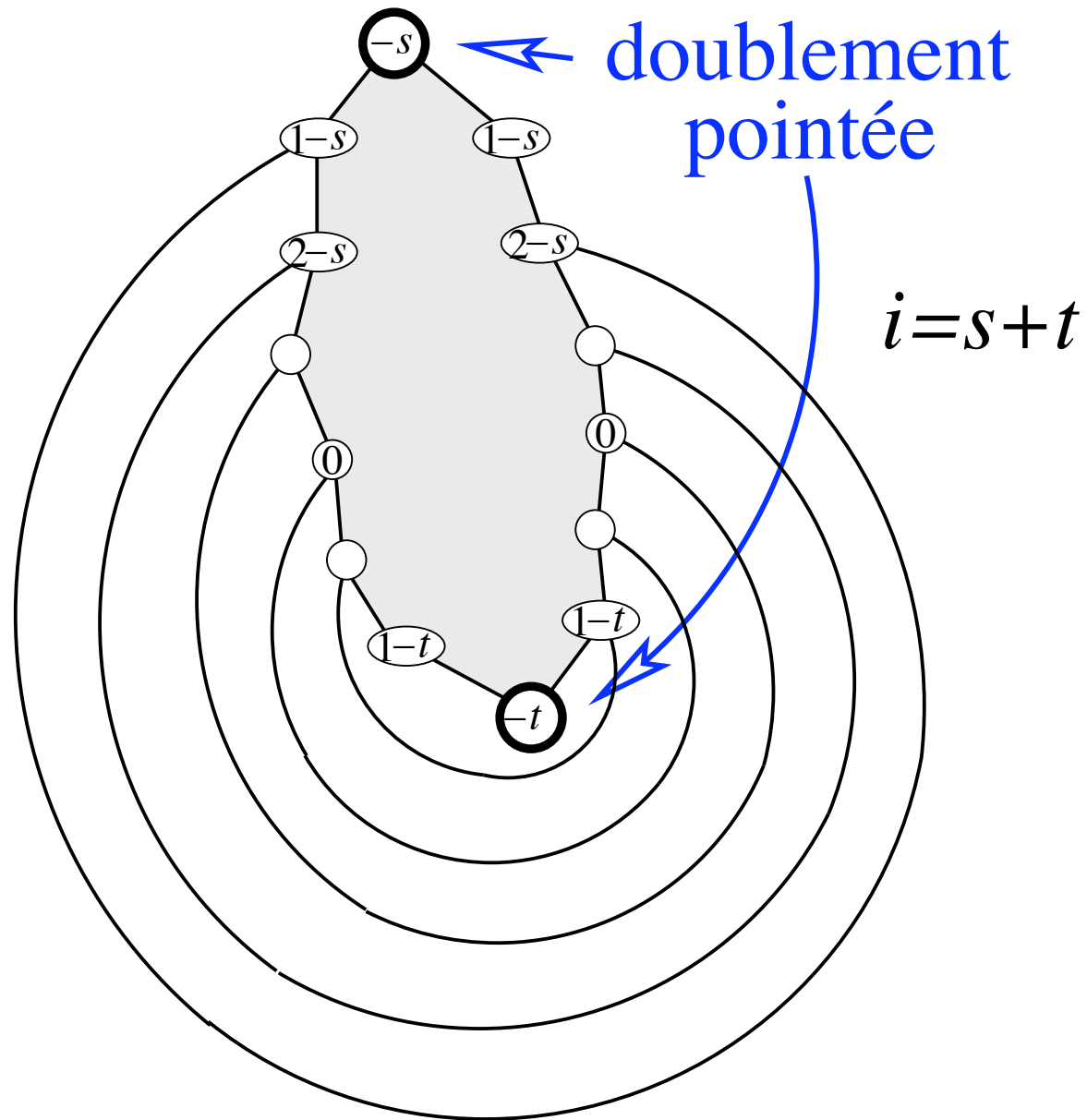
arbre
bien-étiqueté



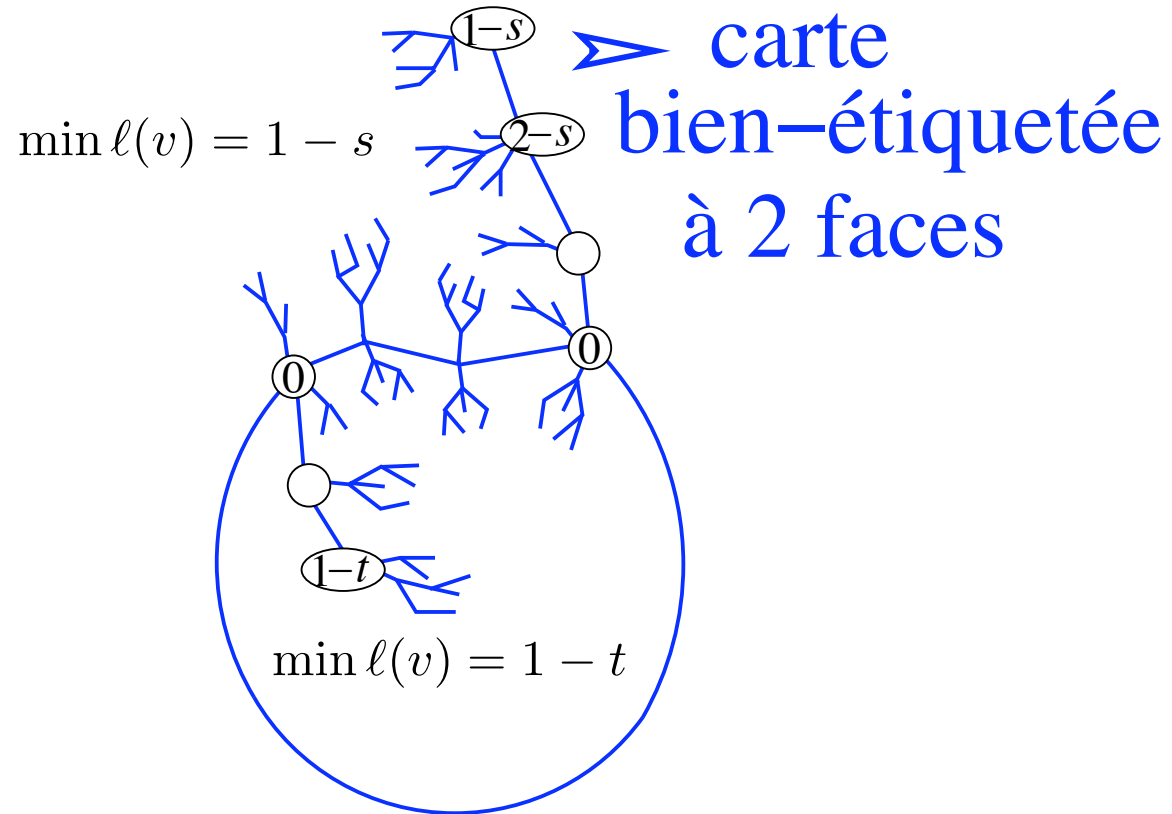
$$\min \ell(v) = 1$$

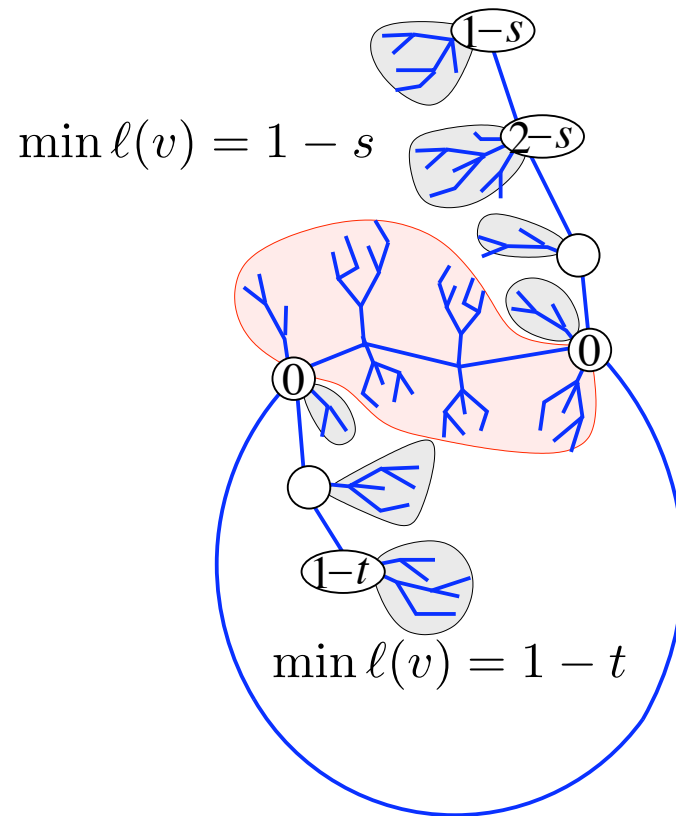


$$\prod_{m=1}^i R_m$$



Miermont





$$X_{s,t} = \prod_{m=1}^s R_m \prod_{m=1}^t R_m$$