Notion de “forme réduite” pour les systèmes différentiels linéaires et application à l’intégrabilité des systèmes hamiltoniens

A. Aparicio-Monforte
(travail en collaboration avec J.-A. Weil)

Séminaire Algorithms, INRIA

Plan

1. Généralités sur les systèmes hamiltoniens et leur intégrabilité
   - Systèmes hamiltoniens : équations variationelles $Y' = AY$.
   - Théorie de Galois différentielle : propriétés des solutions de $Y' = AY$
   - Critère de non intégrabilité : théorème de Morales et Ramis
2. Notion de Forme Réduite pour $Y' = AY$.
   - Motivation de la notion de “forme réduite”
   - Exemple : l’algorithme de Kovacic.
3. Algorithme de réduction
   - Idée générale
   - Une application : le problème de Hill
4. Perspectives

Motivation : sur les systèmes hamiltoniens

et leur intégrabilité

Systèmes hamiltoniens

Un `système hamiltonien (S)` à *n* `degrés de liberté` sur un domaine non vide $U \subset \mathbb{C}^{2n}$:

$$(S) : \begin{cases} \dfrac{dq_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}(q,p) \\ \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i}(q,p) \end{cases}_{i=1,\dots,n} \quad \text{et } X_H := J\nabla H = \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q}\right)$$

où $H : U \to \mathbb{C}$ est la fonction `hamiltonienne` $\mathcal{C}^1(U)$.

Définitions

1. `Crochet de Poisson` de F et G: $\{F, G\} := \langle J\nabla F\,,\, \nabla G\rangle$.
2. $G(q,p)$ est une `intégrale première` de (S) . Deux définitions équivalentes :
   - $x(t)$ solution particulière de `(S)` $\Rightarrow G(x(t)) = cte$.
   - $\{H, G\} = 0$: H et G sont en `involution` .

Théorème d'Arnold-Liouville

Supposons que X_H a n `intégrales premières` $f_1 = H, \ldots, f_n$ `fonctionnellement indépendantes` et `en involution`. Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et soit

$$M(\underline{a}) = \{ \quad z \,:\, f_i(z) = a_i \,,\, i = 1, \ldots, n \quad \}$$

un niveau d'énergie non critique de $f_1, \ldots, f_n$. Alors,

1. $M(\underline{a})$ est une variété invariante de X_H
2. Si $M(\underline{a})$ compacte et connexe, alors $M(\underline{a}) \simeq \mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ et au voisinage du précédent il existe un système de coordonnées $(I, \Phi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n$ où $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$ se lit $\dot{I}_i = 0$, $\dot{\phi}_i = \omega_i$ avec $\omega_i = \omega_i(I)$.

X_H `est intégrable par quadratures`

Système Intégrable

(S) est complètement intégrable au sens de Liouville s'il admet n intégrales premières fonctionellement indépendantes en involution .

Observations :

Nous nous intéressons aux intégrales premières et non pas aux solutions particulières car :

- L'ensemble de sols. part.n'a pas de structure .
- Les intégrales premières. ont une structure d'algèbre (de Lie) (crochet de Poisson).

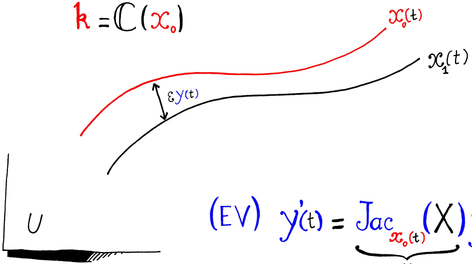
Prouver "(S) est intégrable" $\equiv$ Trouver n intégrales premières.

- FACILE de tester si F est une intégrale première.
- DIFFICILE de trouver des intégrales premières.

Equation Variationelle

$(S)\quad x'(t) = X(x(t))$, x_0 et $x_1 = x_0(t) + \varepsilon y(t)$ solutions (S)

$k = \mathbb{C}(x_0)$



$$(EV)\quad y'(t) = \underbrace{Jac_{x_0(t)}(X)}_{\shortparallel} y(t)$$

$$A \in M_{2n\times 2n}(k)$$

<u>Cas Hamiltonien</u> :

$X = J\nabla H$ et $A = J\,\mathcal{H}ess_{x_0(t)}(H)$

(S) intégrable $\Rightarrow$ (VE) ‘‘Liouville-Galois int."

Equation Variationelle (suite)

Soient F une intégrale 1^e de (S) et $x(t)$ une sol. part. de (S). La forme initiale de F est

$$\begin{array}{rccc} F^\circ : & i^\star TU & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (x,y) & \longmapsto & \frac{1}{k!}(d^k F)_x(y) \end{array}$$

en posant $x = x(0)$ et $y \in T_x U$, où k est tel que $(d^k F)_x \neq 0$ et $(d^i F)_x = 0$ pour $i < k$.

FAITS :

- (VE) est un système hamiltonien linéaire.
- F intégrale première de (S) $\Rightarrow$ F° intégrale première de (VE).

(S) intégrable $\Rightarrow$ (VE) "Liouville-Galois int."

Historique

XIX^e : Kovalevskaya, Poincaré :

équation variationnelle (VE) le long d'une solution

~ 84 : Ziglin : monodromie de (VE) vs intégrabilité
Yoshida et al. , raffinements et applications

$93-95$: Baider-Churchill-Rod-Singer, Morales : Groupe de Galois

98 : Morales & Ramis :

Le groupe de Galois différentiel de (VE) est virtuellement abélien

$\sim 95-06$: au moins 50 articles et applications
(e.g Morales, Simon, Tsygvintsev, Maciejewski, Przybylska, Audin, Boucher, Weil, etc).
En général en se servant de l'algo de Kovacic (EV 2^{nd} *ordre*).

~ 04 : Morales-Ramis-Simo : (VE) d'ordre supérieur.

Théorie de Galois différentielle

Soit $x_0 = x_0(t)$ une `solution particulière` de $x' = X_H(x)$.

$$(VE) \quad Y' = A(x_0(t))Y.$$

Le `corps de base :` c'est k le corps des coeffs. de $A(x_0(t))$.
Souvent : $k = \mathbb{C}(x_0(t))$
`Ext. de Picard Vessiot :` $K = k(U_1)$ où U_1 mat. fond. sol.
`Groupe de Galois différentiel :` $G := Aut_\partial(K)^k$

$$Aut_\partial(K)^k := \left\{\sigma \in Aut(K) : \sigma(u) = u \text{ ssi } u \in k \text{ et } \sigma(u') = \sigma(u)'\right\}$$

G `est un groupe linéaire algébrique.`

G° `:` composante connexe de G contenant Id.
$\mathfrak{g}$`, algèbre de Lie de G :` espace tangent de G en Id.

$\mathfrak{g}$ `mesure la transcendance de` K `sur` k `en effet :`

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g} = \mathrm{trdeg}(K/k).$$

Groupe de Galois

Soit $U = (u_{ij})_{i,j}$ une matrice fondamentale de solutions de $Y' = AY$.Définissons l'idéal des relations

$$I := \left\{ P \in k\left[u_{ij}\,,\ \frac{1}{det(U)}\right] \quad : \quad P(U) = 0 \right\}$$

Nous pouvons voir le groupe de Galois différentiel G comme

$$G \simeq \{ C \in GL(n\,,\,\mathbb{C}) \quad : \quad I \bullet C = I \}$$

`Calculons un groupe de Galois .`

Critère galoisien de non-intégrabilité

Théorème : (J.J. Morales, J.-P. Ramis)

Si (S) est un système hamiltonien intégrable au sens de Liouville alors $\mathfrak{g}$ est abélienne .

Enjeux :

- Comment mettre en pratique ce critère ?
- Gérer les cas à paramètres

Méthodes usuelles et contributions

$$(S) \quad \overset{\text{linéarisation}}{\Longrightarrow} \quad \begin{matrix} (VE): \; Y' = AY \\ A \in M_{2n\times 2n}(k) \end{matrix} \quad \overset{\text{réduction symplectique}}{\rightsquigarrow} \quad \begin{matrix} (ENV): \; Y' = NY \\ N \in M_{(2n-2)}(k) \end{matrix}$$

- (ENV) : $\mathfrak{g}_N$ non abélienne $\Longrightarrow$ (S) non intégrable
- (ENV) : $\mathfrak{g}_N$ abélienne $\longrightarrow$ Eq. var. d'ordre supérieur.

Notre approche :

idée 1 : possible que $\mathfrak{g}_N$ abélienne MAIS non intégrable : algo 1 "relèvement" de (ENV) en (VE)

idée 2 : si $\mathfrak{g}$ abélienne, algo 1 met (VE) sous forme réduite pour plus tard :

forme réduite:=sous une forme la plus creuse possible

Notre notion de forme réduite

Fait : la notion de forme normale est une notion locale .

Contribution : Soient $A \in M_n(k)$ et $\mathfrak{g} := Lie(Y' = AY)$:

$$\boxed{Y' = AY \text{ est sous forme réduite si } A \in \mathfrak{g}(\bar{k})}.$$

Intérêt :

- La notion de forme réduite est une notion globale .
- La forme réduite permet de lire $\mathfrak{g}$.
- Si $\mathfrak{g}$ est abélienne : application de Morales-Ramis-Simó.

Quand existe-t-il une transformation de jauge pour mettre un système linéaire sous forme réduite ?

Réduction des systèmes de $\mathfrak{sp}(2,k)$

Les sous-groupes abéliens connexes de $Sp(2,\mathbb{C}) = SL(2,\mathbb{C})$ sont $\{Id\}$, $\mathbb{G}_a$ et $\mathbb{G}_m$.

sous-groupe abélien connexe	Algèbre de Lie
$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\mathbb{G}_a := \left\{\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{C}\right\}$	$\mathfrak{g}_a := \left\{\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{C}\right\}$
$\mathbb{G}_m := \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{C}^\star\right\}$	$\mathfrak{g}_m := \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{C}\right\}$

Cas $G^\circ = \{Id\}$

Appliquons l'algorithme de Kovacic pour résoudre :

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix} \in \mathfrak{sp}(2,k).$$

Solution de $Y' = AY$: $\exists Y_1,\ Y_2 \in k_\circ^2$ (avec $[k_\circ : k] < \infty$) tels que :

$$(Y_1, Y_2) \in GL(2, k_\circ) \quad \text{est une matrice de solutions.}$$

Groupe de Galois diff.: $G = \{Id\}$.
Changement de jauge : $P := (Y_1, Y_2) \in Sp(2, k_\circ)$.
Réduction :

$$P[A] = P^{-1}(AP - P') = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \{0\}.$$

Cas $G^\circ = \mathbb{G}_a$

Appliquons `l'algorithme de Kovacic` pour résoudre :

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix} \in \mathfrak{sp}(2, k).$$

`Solution de` $Y' = AY$: $\exists Y_1,\ Y_2 \in k_\circ^2,\ L \notin k$ avec $L' \in k$ (avec $[k_\circ : k] < \infty$) tels que :

$$(Y_1, Y_2 + LY_1) \in GL(2, K) \quad \text{est une matrice de solutions.}$$

`Groupe de Galois diff.:` $G = \mathbb{G}_a$.
`Changement de jauge :` $P := (Y_1, Y_2) \in Sp(2, k_\circ)$.
`Réduction :`

$$P[A] = P^{-1}(AP - P') = \begin{pmatrix} 0 & L' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_a(k_\circ).$$

Cas $G^\circ = \mathbb{G}_m$

Appliquons `l'algorithme de Kovacic` pour résoudre :

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix} \in \mathfrak{sp}(2, k).$$

`Solution de` $Y' = AY$: $\exists Y_1,\ Y_2 \in k_\circ^2,\ g \notin k$ avec $g'/g \in k$ (avec $[k_\circ : k] < \infty$) tels que :

$$(gY_1, Y_2/g) \in GL(2, K) \quad \text{est une matrice de solutions.}$$

`Groupe de Galois diff.` : $G = \mathbb{G}_m$.

`Changement de jauge` : $P := (Y_1, Y_2) \in Sp(2, k_\circ)$.

`Réduction :`

$$P[A] = P^{-1}(AP - P') = \begin{pmatrix} g'/g & 0 \\ 0 & -g'/g \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_m(k_\circ).$$

Motivation pour la forme réduite

Lemme (Kovacic) : Soit k un corps C_1 Soit $Y' = AY$ un syst. lin. diff. avec $A \in \mathfrak{h}(k)$ et soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie du système $Y' = AY$, alors $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{h}$.
Théorème (Kovacic) : Soit $H \supset G^\circ$ un groupe algébrique connexe , et soit $\mathfrak{h}$ son algèbre de Lie. Alors il existe un changement de variable linéaire $P \in GL_{2n}(k)$ tel que

$$P[A] \in \mathfrak{h}(k).$$

Précisions :
Transformation de jauge : $P[A] = P^{-1}(AP - P')$.

$$Y' = AY \text{ et } Y = PZ \text{ donnent } Z' = P[A]Z$$

Existence d'une forme réduite pour les

Systèmes différentiels linéaires

Corollaire : Soit $Y' = AY$ système différentiel linéaire et soit $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Alors il existe $P \in GL_{2n}(\bar{k})$ telle que

$$P[A] \in \mathfrak{g}(\bar{k}).$$

intuitivement : $P[A]$ est la plus "creuse"

Existence : Kovacic
Algorithme : A. & Weil

Algorithme de réduction

Algorithme pour $n = 2$ (dimension 4)

- ÉTAPE 1 : réduction de (ENV) Kovacic et variantes (van Hoeij , Ulmer , Weil...).
  - soit $\mathfrak{g}_N \notin \{\mathfrak{g}_a , \mathfrak{g}_m , \{0\}\} \rightsquigarrow$ (S) non intégrable STOP
  - soit $\mathfrak{g}_N \in \{\mathfrak{g}_a , \mathfrak{g}_m , \{0\}\} \rightsquigarrow$ ÉTAPE 2
- ÉTAPE 2 : "relèvement" de (ENV) à (VE)
  Tester condition d'abélianité (C) problèmes d'intégration limitée ou équations de Risch sur k (Bronstein)
  - Soit (C) n'est pas satisfaite $\Rightarrow$ (S) non intégrable.
  - Soit (C) est satisfaite $\rightsquigarrow$ (VE) sous forme réduite.

$\boxed{\textbf{Application pour } n = 2 \textbf{ (dimension } 4\textbf{):}}$

$\boxed{\textbf{Le Problème de Hill est non intégrable}}$

Application pour $n = 2$: Le Problème de Hill

Le Problème de Hill : simplification du problème des 3 corps, Terre-Lune-Soleil. (Morales, Simó & Simon 05)

$$H := \mathbf{i}(q_1q_2 - p_1p_2) - 4q_1q_2(q_1p_1 - q_2p_2) - 4\mathbf{i}(3q_1^4 - 2q_1^2q_2^2 + 3q_2^4)q_1q_2$$

Champ hamiltonien: $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$ (non linéaire)

Variété invariante: $\Pi : q_2 = 0, p_1 = 0$

Solution Particulière: $x_0 = (f, 0, 0, \mathbf{i}f')$, corps $k = \mathbb{C}(f, f')$

Avec, $f(t) = \frac{h}{3\wp(t)+1}$ et $\wp(t) = \wp(t; g_2; g_3)$ telles que $(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$, et $g_2 = 4/3$ et $g_3 = 8/27 + 64h^2$.

Equation Variationelle

Équation variationelle le long de la solution particulière x_0 is $Y' = J\mathcal{H}(H, x_0) \cdot Y$ de matrice

$$A = J\mathcal{H}(H, x_0) = \begin{pmatrix} 0 & 4f^2 & 0 & -\mathbf{i} \\ 0 & 0 & -\mathbf{i} & 0 \\ 0 & \mathbf{i}\frac{f''}{f'} & 0 & 0 \\ \mathbf{i}\frac{f''}{f'} & -8\mathbf{i}f'f & 4f^2 & 0 \end{pmatrix}$$

x_0' est une sol. part. de (VE): réduisons l'ordre de (VE) par une transformation de jauge symplectique (Boucher, Weil)

$$P = \begin{pmatrix} \mathtt{f}' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{i}\mathtt{f}''/\mathtt{f}' & 1/\mathtt{f}' & 0 \\ \mathbf{i}\mathtt{f}'' & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; Y = P \cdot Z$$

$\mathfrak{g}_N$ abélien

Transformation de jauge : $A_1 = P[A]$ avec le changement de var. $P \in Sp(4,k)$.

$$A_1 = \left(\begin{array}{cccc} 0 & 4f^2/f' & 0 & -\mathbf{i}/f' \\ 0 & \color{red}{f''/f'} & -\mathbf{i}/f' & \color{red}{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \color{red}{-8\mathbf{i}ff'} & \frac{f^2}{f'} & \color{red}{-f''/f'} \end{array} \right) \rightarrow N := \left(\begin{array}{cc} \color{red}{f''/f'} & \color{red}{0} \\ \color{red}{-8\mathbf{i}ff'} & \color{red}{-f''/f'} \end{array} \right)$$

Le système linéaire $y' = Ny$ est l'équation normale variationelle (opérateur d'ordre 2. et $N \in \mathfrak{sp}(2,k)$).
Appliquons l'algorithme de Kovacic à $y' = Ny$.

$\boxed{\mathfrak{g}_N = \{0\}.}$ facilement réduit!

Réduction de (ENV) et non intégrabilité

Soit P_1 la transformation de jauge qui réduit $y' = Ny$:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathtt{f}' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathtt{Q(f)/f}' & 0 & \mathtt{1/f}' \end{pmatrix} \quad \text{where} \quad Q \in \mathbb{C}[x].$$

alors

$$A_2 := P_1[A_1] = \begin{pmatrix} 0 & -\mathtt{a}_1 & 0 & \mathtt{a}_2 \\ 0 & 0 & \mathtt{a}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathtt{a}_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $f_1' = \mathtt{a}_1$ et $f_2' = \mathtt{a}_2$ et nous prouvons que : $f_i \notin k$ for $i = 1, 2$.

`Dorénavant, nous n'aurons besoin que de calculs de primitives`

Obstructions galoisiennes à l'intégrabilité

Lemma : Soit $\mathfrak{g}_N = \{0\}$, $\mathfrak{g}$ est abélienne si et seulement si , il existe $(\alpha_1\,,\,\alpha_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus (0\,,\,0)$ tel que $\int \alpha_1 a_2 + \alpha_2 a_1 \in k$.
Ceci est équivalent à :

(C) : $\exists (\alpha_1\,,\,\alpha_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus (0\,,\,0)$ tels que $\alpha_1 f_2 + \alpha_2 f_1 \in k$?

$\longrightarrow$ Réponse: NON ICI.

$\boxed{\mathfrak{g} \text{ non abélienne et donc (S) non intégrable.}}$

Algorithme pour $n = 2$ (dimension 4)

- ÉTAPE 1 : réduction de (ENV) Kovacic et variantes (van Hoeij , Ulmer , Weil...).
  - soit $\mathfrak{g}_N \notin \{\mathfrak{g}_a\,,\,\mathfrak{g}_m\,,\,\{0\}\} \rightsquigarrow$ (S) non intégrable STOP
  - soit $\mathfrak{g}_N \in \{\mathfrak{g}_a\,,\,\mathfrak{g}_m\,,\,\{0\}\} \rightsquigarrow$ ÉTAPE 2
- ÉTAPE 2 : "relèvement" de (ENV) à (VE)
  Tester condition d'abélianité (C) problèmes d'intégration limitée ou équations de Risch sur k (Bronstein)
  - Soit (C) n'est pas satisfaite $\Rightarrow$ (S) non intégrable.
  - Soit (C) est satisfaite $\rightsquigarrow$ (VE) sous forme réduite.

Implémentation

Notre algorithme de réduction retourne:

OUTPUT :
retourne "(S) non intégrable"
ou bien
$\mathtt{retourne}$ une forme réduite $\mathtt{A} \in \mathfrak{g}(\bar{\mathtt{k}})$ de (VE)
utilisation ultérieure: $(\mathtt{VE})_{\mathtt{k}}, \mathtt{k} \geq 2$.

Implémentation en cours : ISOLDE Maple library
(Barkatou-Pfluegel) http://isolde.sourceforge.net/

Perspectives et travaux en cours

- Recontruction de germes d'intégrales premières formelles (communication acceptée à MEGA en collaboration avec S. Simon et J.-A Weil)
- Algorithme pour $n = 3$.
- Rapport entre "forme réduite" et "forme normale" (projet)

Appendices

Quelques définitions

Corps différentiel de classe C_1 : Un corps différentiel k est dit de classe C_1 si tout polynôme $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$ de degré plus petit que n a au moins un zéro non trivial appartenant à F^n.

$\mathfrak{g}(k)$: est l'ensemble des k-points de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

$$k(\mathfrak{g}) := \{A = f_1 M_1 + \ldots + f_m M_m \quad : M_i \in \mathfrak{g}\,,\ f_i \in k\}$$

où $m = dim\mathfrak{g}$ et $M_1, \ldots, M_m$ sont l.i.