Séminaire ALGO

Solutions formelles locales en un point singulier d'une classe de systèmes d'EDP linéaires d'ordre 1

Nicolas Le Roux
projet ALGO.

$\star$ avertissement

A certains moments de l'exposé indiqués par des *,
j'ai apporté des précisions que j'ai cru bon de rajouter ici (pour la cohérence)
dans des transparents indiqués par un *.

Objectif de l'exposé

Calculer les solutions locales formelles en $(0,0)$ du système d'EDP linéaires suivant :

$$
(S)\qquad \left\{\begin{array}{lcll}
\dfrac{\partial Y}{\partial x} & = & \begin{bmatrix} \frac{x^3+y}{x^4} & \frac{y^2}{x^4} \\ \frac{-1}{x^4} & \frac{-y+x^3}{x^4} \end{bmatrix} Y & \qquad (1) \\[2em]
\dfrac{\partial Y}{\partial y} & = & \begin{bmatrix} \frac{1}{y} & 1 \\ \frac{-2}{y^2} & \frac{-3}{y} \end{bmatrix} Y & \qquad (2)
\end{array}\right.
$$

Plan

I- Réduction de rang du système ;
$\longrightarrow$ algorithme à la Levelt :
retourne un système équivalent à (S) de rang minimal ;
le rang minimal $\overset{\text{déf}}{=}$ rang de Poincaré de (S) ;
le rang de (S) est $(3,1)$; son rang de Poincaré est $(0,0)$.

II- calcul des solutions ... en $(0,0)$ d'un système de rang $(0,0)$;
$\longrightarrow$ théorème de Gérard et Levelt :
un système de rang $(0,0)$ est équivalent à

$$(\text{reg}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{C}{x} Z \\ \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{D}{y} Z \end{array} \right. \qquad \text{avec } [C, D] = 0.$$

Construction de la transformation et du système (reg).

0- Précisions et motivation

0-1 Quel genre de solutions cherche-t-on?

lieu singulier de (S) : $\{x = 0\} \cup \{y = 0\}$.

$\longrightarrow$ si $(x_0, y_0) \notin \{x = 0\} \cup \{y = 0\}$: dimension de l'espace des solutions analytiques au voisinage de $(x_0, y_0) \;=\; 2$.
En effet (S) **complètement intégrable** *.

$\longrightarrow$ si $(x_0, y_0) \in \{x = 0\} \cup \{y = 0\}$? cas où $(x_0, y_0) = (0, 0)$:
[H. Charrière, 1981] (S) se comporte comme si on avait 2 systèmes diff. ordinaires, l'un en x, l'autre en y *.

$\star$ solutions locales

complète intégrabilité

dériver (1) par rapport à y = dériver (2) par rapport à x.

D'après [H. Charrière,1981], (S) a une matrice fondamentale de solutions

$T(u,v)\,u^M\,v^N e^{P(1/u)}\,e^{Q(1/v)}$, avec

- $u = x^{1/s}, v = y^{1/t}$, où s,t entiers > 0 ;
- T matrice 2×2 inversible à coeffs $\mathbb{C}[[u,v]]$;
- M,N matrices 2×2 à coeffs $\mathbb{C}$;
- $P = \text{diag}(P_1,P_2)$, $Q = \text{diag}(Q_1,Q_2)$, P_i,Q_i polynômes

En fait pour le système (S), on a $s = t = 1$ (pas de ramification) et $P = Q = 0$: on dit que (S) est singulier-régulier.

0-2 Aperçu rapide du cas ordinaire

(ord) $\frac{dY}{dx} = A(x)Y,$ avec $A(x) = \frac{1}{x^{p+1}}(A_0 + A_1\,x + \cdots)$ de taille $m \times m$

$\longrightarrow$ matrice fondamentale de solutions en $x = 0$:
$T(u)\,u^M\,e^{P(1/u)}$ avec u, T, M, et P comme précédemment.

Rem. $P(1/u)$ ne dépend que de $A_0, \cdots, A_{mp-1}$.

$\longrightarrow$ calcul d'une telle matrice fondamentale de solutions.

- lemme du vecteur cyclique effectif + polygone de Newton ;
- [G. Chen,1990] forme d'Arnold-Turritin + shearing + splitting lemma ;
- [E. Wagenführer,1989] théorie des faisceaux de matrices ;
- [A. Hilali & A. Wasner ,1986, M. Barkatou,1997]

méthode basée sur l'algorithme de Moser.

Méthodes de réduction de rang dans le cas ordinaire

- [J. Moser, 1960, A. Hilali & A. Wasner, M. Barkatou 1995]
  algorithme de Moser (critère de Moser) ;

- [R. Schäfke & H. Volkmer,1986] théorie des faisceaux de matrices ;

- [R. Gérard & A. Levelt, 1973, A. Levelt, 1989] théorie des réseaux.

Le rang de Poincaré de (ord) donne la nature de la singularité $x = 0$:

- s'il est égal à 0 : matrice fondamentale de solutions $T(x)x^M$;

- s'il est > 0 : apparition d'exponentielle voire de ramification.

I- Réduction du rang

Notation : $(\tilde{p}, \tilde{q}) \preceq (p, q) \Leftrightarrow \tilde{p} \leq p$ et $\tilde{q} \leq q$.

Soit : (EDP 1) $\left\{ \begin{array}{lcll} \frac{\partial Y}{\partial x} & = & \frac{A(x,y)}{x^{p+1}} Y & (3) \\ \frac{\partial Y}{\partial y} & = & \frac{B(x,y)}{y^{q+1}} Y & (4) \end{array} \right.$ complètement intégrable.

Si $A(0, y) \neq 0$ et $B(x, 0) \neq 0$, le rang $= (p, q)$.

Définition. (réduction de rang)
Trouver $Y = TZ$ *avec* T *matrice* $m \times m$ *inversible à coeff. dans* $\mathbb{C}[[x, y]]$ *de telle sorte qu'on obtienne*

$$\text{(EDP 2)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\tilde{A}(x,y)}{x^{\tilde{p}+1}} Z \\ \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\tilde{B}(x,y)}{y^{\tilde{q}+1}} Z \end{array} \right.$$

avec $\tilde{A}, \tilde{B} \in M_m(\mathcal{O})$ *et* $(\tilde{p}, \tilde{q}) \prec (p, q)$.

Réduction de rang sur (S)

$Y = T_1 Z$ avec

$$T_1 = \begin{bmatrix} x^3 & -y^2 \\ 0 & y \end{bmatrix},$$

donne

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Z}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{x} & 0 \\ \frac{-1}{xy} & \frac{1}{x} \end{bmatrix} Z \\[2ex] \dfrac{\partial Z}{\partial y} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{y} & 0 \\ \frac{-2x^3}{y^3} & \frac{-2}{y} \end{bmatrix} Z \end{cases}$$

$Y = T_2 Z$ avec

$$T_2 = \begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

donne

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Z}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{x^3+y}{x^4} & \frac{y}{x^4} \\ \frac{-y}{x^4} & \frac{-y+x^3}{x^4} \end{bmatrix} Z \\[2ex] \dfrac{\partial Z}{\partial y} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{y} \\ \frac{-2}{y} & \frac{-3}{y} \end{bmatrix} Z \end{cases}$$

I-1 Critère de régularité

[P. Deligne 1970, A. van den Essen 1978] $\exists T \in M_m(\mathcal{O})$ tel que $Y = TZ$ donne

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\tilde{A}(x,y)}{x} Z \\ \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\tilde{B}(x,y)}{y} Z \end{array} \right.$$

[N. Le Roux 2006] version duale du critère de van den Essen.

Comment construire $Y = TZ$?

[M. Barkatou & N. Le Roux, 2006]
$p_0 =$ (resp. q_0) rang de Poincaré de (3) (resp. celui de (4)).
$\exists$ un algo construisant T matrice $m \times m$ inversible à coeff. $\mathbb{C}[[x, y]]$ t.q

$$Y = TZ \text{ donne } \quad \left\{ \begin{array}{lll} \frac{\partial Z}{\partial x} & = & \frac{\tilde{A}(x,y)}{x^{p_0+1}} Y \\ \frac{\partial Z}{\partial y} & = & \frac{\tilde{B}(x,y)}{y^{q_0+1}} Y \end{array} \right.$$

Algorithme de Levelt : version descendante (cas ordinaire)

Entrée. $A = x^{-p-1}\left(A_0 + A_1 x + \cdots\right),\, T = I_m$. $\frac{dY}{dx} = A(x)Y$: le rang est p.
Sortie. T et $T[A]$ de rang minimal. Sortie : $Y = TZ$ et $\frac{dZ}{dx} = T[A](x)Z$.

1. $i := 0$.

2. Si $p = 0$ ou $i = m-1$, retourner T et A.

3. $[p > 0$ et $i < m-1]$ Se ramener à l'aide d'une transformation de jauge $Y = PZ$ au cas où $A_0 = \begin{pmatrix} A_0^{1,1} & 0_{r,m-r} \\ A_0^{2,1} & 0_{m-r} \end{pmatrix}$ grâce à un pivot de Gauss sur les colonnes.
   $T := TP$.

4. $A := P[A]$ avec $P = \mathrm{diag}(xI_r, I_{m-r})$. $T := TP$.
   Si p diminue, revenir en 1.
   Sinon $i := i+1$ et revenir en 2.

$\star$ algorithme de Levelt et dualité

La version descendante de l'algo de Levelt revient à construire une suite décroissante de réseaux de l'espace vectoriel $\mathbb{C}((x))^m$ (un réseau de $\mathbb{C}((x))^m$ est un $\mathbb{C}[[x]]$-module engendré par une base de $\mathbb{C}((x))^m$).

La version ascendante revient à construire une suite croissante de réseaux de $\mathbb{C}((x))^m$.

Il y a une dualité entre les deux versions de l'algorithme : appliquer la version ascendante de l'algorithme au système (ord) revient à appliquer la version descendante de l'algorithme au système dual de (ord) :

$$\frac{dY^\star}{dx} = -{}^tAY^\star.$$

Algorithme de réduction de rang (cas de deux variables)

Entrée. A,B, $T = I_m$.
Sortie. $Y = TZ$, $T[A]$ et $T[B]$ vérifiant $\tilde{p}$ minimal et $\tilde{q} \leq q$.

1. $i := 0$.

2. Si $p = 0$ ou $i = m - 1$, retourner T, A et B.

3. $[p > 0$ et $i < m - 1]$ Se ramener à l'aide d'une transformation $Y = PZ$ au cas où $A_0 = \begin{pmatrix} A_0^{1,1} & 0_{r,m-r} \\ A_0^{2,1} & 0_{m-r} \end{pmatrix}$. Pivot de Gauss avec pivot de valuation minimale en y.
   $T := TP$.

4. $A := P[A]$ où $P = \mathrm{diag}(xI_r, I_{m-r})$. $B := P[B]$. $T := TP$.
   Si p a diminué, revenir en 1.
   Sinon $i := i + 1$ et revenir en 2.

Exemple :

$$Y = \begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} W \text{ conduit à } \begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{x^3+y}{x^4} & \frac{y}{x^4} \\ \frac{-y}{x^4} & \frac{-y+x^3}{x^4} \end{bmatrix} W \\ \\ \dfrac{\partial W}{\partial y} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{y} \\ \frac{-2}{y} & \frac{-3}{y} \end{bmatrix} W \end{cases}$$

$$\text{Ensuite } W = \begin{bmatrix} x^4 & -x \\ 0 & x \end{bmatrix} Z \text{ donne } \begin{cases} \dfrac{\partial Z}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{x} & 0 \\ \frac{y}{x} & 0 \end{bmatrix} Z \\ \\ \dfrac{\partial Z}{\partial y} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{y} & 0 \\ \frac{x^3}{y} & \frac{-2}{y} \end{bmatrix} Z \end{cases}$$

II - calcul des solutions locales d'un système de rang $(0,0)$

Soit un système complètement intégrable de rang $(0,0)$

$$\begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial x} & = & \frac{A(x,y)}{x} Y \\ \frac{\partial Y}{\partial y} & = & \frac{B(x,y)}{y} Y \end{cases}$$

- [P.Deligne,1970,R. Gérard & A. Levelt,1976,T. Takano & M. Yoshida 1976]
  il existe une matrice fondamentale de solutions en $(0,0)$
  $T(x,y)x^{\alpha}y^{\beta}x^{M}y^{N}$,
  $T(x,y)$ unimodulaire , α, β matrices diagonales d'entiers ≥ 0;

- [N. Le Roux, 2006] le nombre de termes de A et B dont dépendent M et N se lit sur $A_{0,0}$ et $B_{0,0}$.

II-1 Approche de Gérard et Levelt

Idée de base : $\frac{dY}{dx} = \frac{A}{x}Y$, avec A constant
$x^A \overset{not.}{=} \exp(A \log(x))$ est solution.

Comment calculer x^A ? On décompose A : $A = D + N$ avec
D diagonalisable, N nilpotent et $[D, N] = 0$.
D'où $x^A = \exp(D \log(x)) \exp(N \log(x))$.

Opérateur diff. associé :
$\Delta := x\frac{d}{dx} - A = \left(x\frac{d}{dx} - D\right) + N, \quad \left[\left(x\frac{d}{dx} - D\right), N\right] = 0.$
Décomposition de Δ en partie semi-simple partie nilpotente.

$\star$ Cas où $A = (A_0 + A_1 x + \cdots)$

Y série formelle se représente par ses troncatures $Y \mod x^k$ pour tout $k \geq 1$. On définit une application linéaire en dimension finie :

$$f_k \;:\; Y \mod x^k \mapsto \Delta(Y) \mod x^k \;; \quad f_k = s_k + n_k, \text{ parties semi-simple et nilpotente.}$$

Par recollement (diagramme commutatif), la suite $\big(s_k(Y \mod x^k)\big)$ définit une série formelle ${}^s\Delta(Y)$. ${}^s\Delta =$ partie semi-simple de Δ (c'est un opérateur différentiel).
Partie nilpotente (c'est une application linéaire) définie de la même façon.

Construction identique pour le système de rang $(0,0)$ équivalent à (S) : deux opérateurs différentiels correspondant aux deux sous-systèmes (complète intégrabilité $=$ commutatitivité des 2 opérateurs)

$\star$ **matrice fondamentale de solutions de $\frac{dY}{dx} = \frac{A(x)}{x} Y$**

matrice fondamentale de solutions de la forme $P(x)x^{\beta}x^{B}$,

- P matrice $m \times m$ unimodulaire constituée de vecteurs propres de ${}^{s}\Delta$ (ceci peut être assoupli);

- β matrice diagonale d'entiers égaux aux différence entières de valeurs propres de A_0 ;

- B matrice $m \times m$ à coeff $\mathbb{C}$.

Exemple

Calculer en utilisant l'approche de Gérard et Levelt
les solutions locales en $x = 0$ du système différentiel $x\frac{dY}{dx} = AY$.

$$A := \begin{bmatrix} (1+x)^{-1} & \left(1-x^2\right)^{-1} & 0 \\ \frac{1+x}{1+x^2} & 0 & 1+x^3 \\ 0 & 1 & \left(1-x^3\right)^{-1} \end{bmatrix}, \quad A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\chi(A_0) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 1)$, plus grande différence entière : 3.

On doit donc calculer $P \mod x^{3+1}$.

Calcul de $P \mod x^4$

$J :=$ matrice de l'application $Y \mod x^4 \mapsto (x\frac{d}{dx} - A)(Y) \mod x^4$ dans la base "canonique".

- Déterminer S la partie semi-simple de $J^\star$;
- Calculer une base "convenable" d'un supplémentaire (invariant par S) du s.e.v engendré par les 9 derniers élts de la base canonique ;
- Réécrire la base "convenable" dans la base canonique. On trouve $P \mod x^4$.

$\star$ Calcul de la partie semi-simple d'une matrice

L'idée présenté est due à A. Levelt.
La partie semi-simple S est un polynôme en J : $S = g(J)$.

On note P la partie sans facteur du polynôme caractéristique de J ;
d entier tel que $P^d(J) = 0$. Un polynôme g qui vérifie

$$g(\lambda) = \lambda \mod P \text{ et } P(g(\lambda)) = 0 \mod P^d \text{ convient.}$$

g se calcule par Newton.

$$J = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{13}{12} & -5/6 & -1/12 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/12 & -1/6 & 1/12 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{145}{144} & -\frac{23}{144} & \frac{13}{144} & -\frac{13}{12} & -5/6 & -1/12 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ \frac{37}{36} & -1/18 & -\frac{35}{36} & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ \frac{19}{144} & -\frac{17}{144} & -\frac{137}{144} & 1/12 & -1/6 & 1/12 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcul d'une base convenable

Par un argument d'algèbre linéaire, les vecteurs suivants conviennent.

$v_1\ ;\ Sv_1 = -2v_1$ $\qquad$ $v_2\ ;\ Sv_2 = -v_2$ $\qquad$ $v_3\ ; Sv_3 = v_3$

$$v_1 = \begin{bmatrix} -120/7 \\ -120/7 \\ -120/7 \\ 45/7 \\ -30/7 \\ -15/7 \\ -88/7 \\ 3 \\ 1 \\ 1195/168 \\ -143/42 \\ -863/168 \end{bmatrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 0 \\ -5/2 \\ 5/2 \\ 5 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ -3/2 \end{bmatrix} \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \\ 6 \\ 0 \\ -5/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Obtention de la matrice $\tilde{P} = P \mod x^4$

En réécrivant v_1, v_2, v_3 dans la base $(1, x, x^2, x^3)$, on trouve

$$\tilde{P} = \left[\begin{array}{ccc} -\frac{120}{7} + \frac{45}{7}\,x - \frac{88}{7}\,x^2 + \frac{1195}{168}\,x^3 & 5/2 + 5/2\,x + x^3 & 2 - 3\,x^2 \\ -\frac{120}{7} - \frac{30}{7}\,x + 3\,x^2 - \frac{143}{42}\,x^3 & 5\,x - 2\,x^3 & -4 + 2\,x + x^2 - 5/3\,x^3 \\ -\frac{120}{7} - \frac{15}{7}\,x + x^2 - \frac{863}{168}\,x^3 & -5/2 + 5\,x - 3/2\,x^3 & 2 - 2\,x + 6\,x^2 \end{array} \right]$$

Calcul de la monodromie

On connaît $P \mod x^4$ et $\beta = (1-(-2), 1-(-1), 1-1) = (3,2,0)$.
Pour calculer B dans $Px^\beta x^B$.

- appliquer le changement de var. $Y = \tilde{T}\tilde{W}$.

  On trouve un système $x\frac{d\tilde{W}}{dx} = \tilde{C}\tilde{W}$.
  Par construction $\tilde{C} \mod x^4 = C$.

- appliquer $\tilde{W} = \text{diag}(x^3, x^2, 1)\tilde{Z}$.

  On trouve un système $x\frac{d\tilde{Z}}{dx} = \tilde{B}\tilde{Z}$.
  On a $B = \tilde{B} \mod x$.

Calcul de la monodromie

- $Y = \tilde{T}\tilde{W}$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} (2 + O(x^4)) & (0 + O(x^4)) & (-\frac{49}{360}x^3 + O(x^4)) \\ (0 + O(x^4)) & (1 + O(x^4)) & (-\frac{2}{5}x^2 + O(x^4)) \\ (0 + O(x^4)) & (0 + O(x^4)) & (-1 + O(x^4)) \end{bmatrix}$$

- $\tilde{W} = x^{\beta}\tilde{Z}$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} (-1 + O(x^4)) & (0 + O(x^3)) & (-\frac{49}{360} + O(x)) \\ (0 + O(x^5)) & (-1 + O(x^4)) & (-\frac{2}{5} + O(x^2)) \\ (0 + O(x^7)) & (0 + O(x^6)) & (-1 + O(x^4)) \end{bmatrix}$$

calcul de $P \mod x^\ell,\ \ell \geq 4$

P est l'unique solution de $\begin{array}{c} x\frac{dQ}{dx} = A\,Q - Q\,C \\ Q \equiv \tilde{P} \mod x^4. \end{array}$

Les coefficients P_μ de P vérifient donc

$$P_\mu\,(C_0 + \mu) - A_0 P_\mu = \sum_{i=0}^{\mu-1} A_{\mu-i} P_i - P_i C_{\mu-i}.$$

P_0, P_1, P_2, P_3 calculés précédemment. Pour $\mu \geq 4$, l'application linéaire

$M \mapsto M\,(C_0 + \mu) - A_0 M$ est inversible.

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{120}{7} & 5/2 & 2 \\ -\frac{120}{7} & 0 & -4 \\ -\frac{120}{7} & -5/2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{45}{7} & 5/2 & 0 \\ -\frac{30}{7} & 5 & 2 \\ -\frac{15}{7} & 5 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -\frac{88}{7} & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix} x^2 +$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1195}{168} & 1 & 0 \\ -\frac{143}{42} & -2 & -5/3 \\ -\frac{863}{168} & -3/2 & 0 \end{bmatrix} x^3 + \begin{bmatrix} -\frac{5939}{490} & \frac{5}{36} & -\frac{157}{96} \\ -\frac{3767}{1176} & \frac{14}{9} & -\frac{7}{48} \\ -\frac{6287}{5880} & \frac{59}{36} & -\frac{39}{32} \end{bmatrix} x^4 + \begin{bmatrix} \frac{312121}{40320} & \frac{199}{210} & \frac{2281}{1350} \\ -\frac{58297}{47040} & \frac{221}{252} & \frac{2729}{800} \\ -\frac{11257}{282240} & \frac{221}{1260} & \frac{64421}{21600} \end{bmatrix} x^5 +$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{12693433}{1111320} & -\frac{883}{8640} & -\frac{6077}{3456} \\ \frac{1295351}{2540160} & -\frac{3629}{10080} & -\frac{25333}{43200} \\ -\frac{55298809}{17781120} & -\frac{43949}{60480} & \frac{29591}{86400} \end{bmatrix} x^6 + \begin{bmatrix} \frac{1307398759}{158054400} & \frac{189079}{238140} & \frac{241313}{165375} \\ \frac{100464281}{177811200} & -\frac{125213}{544320} & -\frac{5340317}{4233600} \\ -\frac{470678599}{1422489600} & \frac{3488467}{3810240} & -\frac{6428773}{7056000} \end{bmatrix} x^7 + O(x^8).$$

Conclusion

- calcul des solutions locales d'un système singulier-régulier :
  réduction de rang + approche de Gérard et Levelt effective ;

- cas des systèmes singuliers-irréguliers : nombre de termes nécessaire au calcul des parties exponentielles?

- les résultats théoriques exposés valables en dimension supérieure :
  l'algorithme à la Levelt n'est plus valable, l'approche de Gérard-Levelt si.
  Comment calculer les solutions locales dans ce contexte?