SERIES DE VOLTERRA pour la résolution d'équation aux dérivées partielles non linéaires : une application pour la simulation temps-réel d'instrument de musique

INRIA
Unité de Recherche de Rocquencourt

présenté par

Thomas HÉLIE

Ircam - CNRS UMR 9912 - Équipe Analyse-Synthèse
Ircam, Centre Georges Pompidou, Paris

Lundi 27 novembre 2006

PLAN

A1- L'IRCAM : Institut de Recherche et Coordination Acoustique/Musique [UMR CNRS 9912]

http ://www.ircam.fr

ircam Centre Pompidou

Création : en ***1971*** par ***Pierre Boulez***

Vocation : interaction entre

- ***recherche*** scientifique (son & musique)
- ***développement*** technologique
- ***création musicale*** contemporaine

Équipe Analyse-Synthèse :

- ***modèles de synthèse***
- procédés d'***analyse*** des sons
- outils de ***transformation*** des sons

A2- Modèles physiques pour la synthèse sonore

Objectifs :

Modélisation réaliste pour la ***simulation*** et le ***contrôle*** en ***temps réel***
(compositeurs, musiciens, luthiers)

Intérêts :

Instruments ***virtuels*** et ***naturels***
(attaques, transitoires, «canards», etc...)

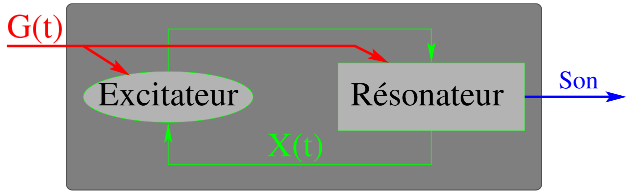
Problèmes :

1- Sons ***réalistes*** ↔ modèles ***non triviaux***
(EDP 3D, NL, op. pseudo-diff.)

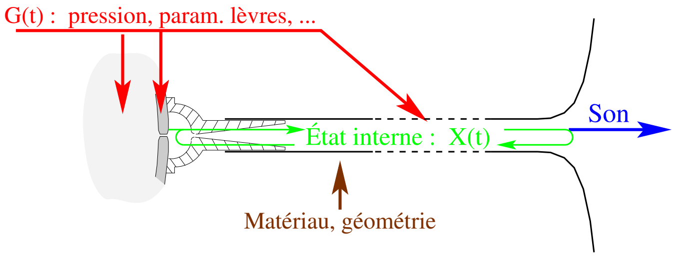
2- ***Temps réel*** ↔ méthodes numériques standard ***trop lourdes***

3- ***Contrôle délicat*** ↔ ***inversion entrée/sortie***
(grande variété de régimes)

Modèles en syst. E/S :



Cas du cuivre :



Approche «système» :

Relations ***entrée/sortie***
(éviter de calculer l'état dans tout l'espace)

A3- Résonateurs de type cuivre

Notation : $\partial_x^n = \dfrac{\partial^n}{\partial x^n}$

[JASA] (Hélie) : **Propagation linéaire avec pertes dans un tube courbe** ($< f$)

$$\boxed{\left[\partial_\ell^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \underbrace{\Upsilon(\ell)}_{\text{courbure}} - \underbrace{\frac{\varepsilon(\ell)}{c^{\frac{3}{2}}}\partial_t^{\frac{3}{2}}}_{\text{pertes visco-therm.}}\right]\left(\mathcal{R}(\ell)\widetilde{p}(\ell,t)\right) = 0}$$

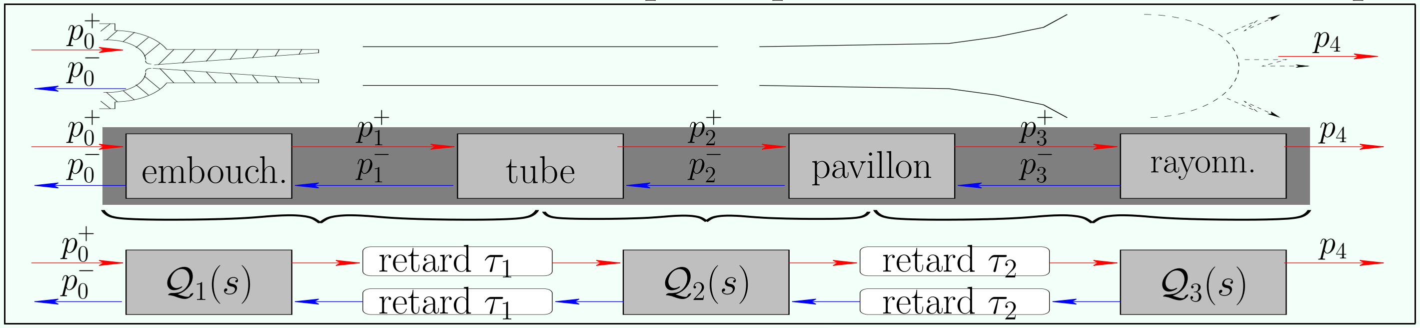
[Acta Acustica] (Menguy,Gilbert) : **Propagation non linéaire dans un tube droit** ($< fff$)
(pour une onde progressive "aller")

$$\boxed{\partial_z p(z,t) + \frac{1}{c}\partial_t p(z,t) + \underbrace{\frac{\alpha}{\sqrt{c}}\,\partial_t^{\frac{1}{2}} p(z,t)}_{\text{pertes visco-therm.}} = \underbrace{\frac{\beta}{c}\,p(z,t)\,\partial_t p(z,t)}_{\text{non-linéarité}}}$$

<u>**Rq :**</u> $\partial_t^{\frac{1}{2}}\left(\partial_t^{\frac{1}{2}} f(t)\right) = \partial_t f(t) \longrightarrow \sqrt{s}\left(\sqrt{s}F(s)\right) = s\,F(s)$ Bode $\sqrt{2\imath\pi f}$: $+3$ **dB/oct** $\equiv +10$ **dB/dec**

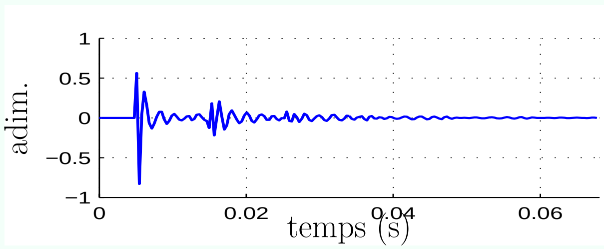
A4- Résultat en linéaire et problème posé

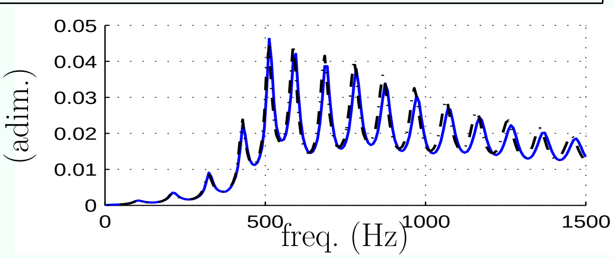
Résonateur linéaire : résolution en quadripôles et simulation en temps réel



Transmission :

[Hélie,Mignot]





Problème posé : lien direct entre les états acoustiques des extrémités d'un tronçon

Propagation	Outil
linéaire	quadripôles : fonctions de transfert (matrice de dispersion)
non linéaire	quel outil ?

INTRODUCTION AUX

SÉRIES DE VOLTERRA

B1- SERIES DE VOLTERRA : Définition

Série de Volterra de noyaux $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\{h_n\}} \longrightarrow \mathrm{y(t)}$$

$$y(t) = \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}}_{\text{somme}} \underbrace{\int \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t_1, \dots, t_n)\, u(t-t_1) \dots u(t-t_n)\, \mathrm{d}t_1 \dots \mathrm{d}t_n}_{\text{de convolutions multiples}}$$

Interprétation de chaque terme :

$\boldsymbol{n} = 1$ convolution standard : système linéaire

$\boldsymbol{n} = 2$ double convolution : non-linéarité d'ordre 2

$\boldsymbol{n} \geq 3$ etc...

$$\boxed{\text{Noyaux } h_n \equiv \text{Réponses impulsionnelles généralisées}}$$

B2- Cadre mathématique : espaces, convergence et reste

Fonction limitante : Soient $h_n \in L^1(\mathbb{R}^n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

On note $\boxed{\phi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \|h_n\|_1 x^n}$ avec $\|h_n\|_1 = \int_{\cdots}\int_{-\infty}^{+\infty} \big|h_n(t_1, \dots, t_n)\big| \mathrm{d}t_1 \dots \mathrm{d}t_n$

Convergence : Soient $u \in L^\infty(\mathbb{R})$ et ρ le rayon de convergence de ϕ.

> Si u est telle que $\|u\|_\infty = \sup_t(|u(t)|) < \rho$,
> alors la série de Volterra converge uniformément et est bornée par $\phi(\|u\|_\infty)$

Preuve : $|y(t)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\cdots}\int_{-\infty}^{+\infty} |h_n(t_1, \dots, t_n)| \|u\|_\infty \dots \|u\|_\infty \, \mathrm{d}t_1 \dots \mathrm{d}t_n \leq \phi(\|u\|_\infty)$

Théorème :

> Si $\|h_n\|_1 < K a^n$ et $a\|u\|_\infty < 1$,
> alors $\left| y(t) - \sum_{n=1}^{N} \int_{\cdots}\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t_1, \dots, t_n) u(t\text{-}t_1) \dots u(t\text{-}t_n) \, \mathrm{d}t_1 \dots \mathrm{d}t_n \right| \leq K \frac{(a\|u\|_\infty)^N}{1 - a\|u\|_\infty}$

B3- Causalité et transformée de Laplace

Causalité :

Un système $\{h_n\}$ est causal si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$t_k < 0 \Rightarrow \forall n \geq k, h_n(\ldots, t_k, \ldots) = 0$

Transformée de Laplace multi-variable :

On définit $H_n(s_1, \ldots, s_n) = \int \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t_1, \ldots, t_n) \mathrm{e}^{-(s_1 t_1 + \ldots + s_n t_n)} \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_n$

Théorème :

Les fonctions $H_n(s_1, \ldots, s_n)$ d'un système causal et stable sont analytiques dans $\Re\mathrm{e}(s_1) > 0$, ..., $\Re\mathrm{e}(s_n) > 0$.

B4- Quelques systèmes simples

Système linéaire $\boldsymbol{y}(t) = [f \star_t u](t)$:

$$\begin{aligned} h_1(t_1) &= f(t_1) \\ h_n(t_1, \dots, t_n) &= 0, \quad \forall n \geq 2 \\ \rho_h &= +\infty \end{aligned}$$

Série entière $\boldsymbol{y}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n u(t)^n = g\big(u(t)\big)$ de rayon ρ_g :

$$\begin{aligned} h_n(t_1, \dots, t_n) &= g_n \delta(t_1, \dots, t_n), \quad \forall n \geq 2 \\ \rho_h &= \rho_g \end{aligned}$$

La cascade $\to \boxed{\star_t f} \to \boxed{.^m} \to$:

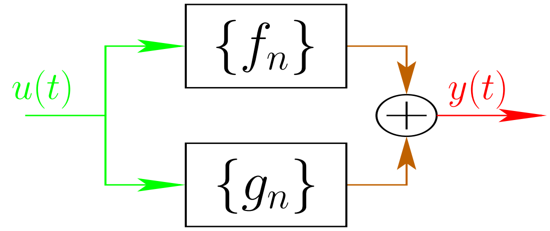
$$\begin{aligned} h_m(t_1, \dots, t_m) &= f(t_1)\, f(t_2) \dots f(t_m) \\ h_n(t_1, \dots, t_n) &= 0 \quad \text{si } n \neq m \\ \rho_h &= +\infty \end{aligned}$$

La cascade $\to \boxed{\star_t f} \to \boxed{g} \to$:

$$\begin{aligned} h_n(t_1, \dots, t_n) &= g_n f(t_1)\, f(t_2) \dots f(t_n) \\ \rho_h &= \rho_g / \|f\|_1 \end{aligned}$$

Plus généralement : Tout système composé de systèmes linéaires, des sommes ou produits de leurs sorties, et de cascades.

B5- Interconnexion de systèmes : Somme



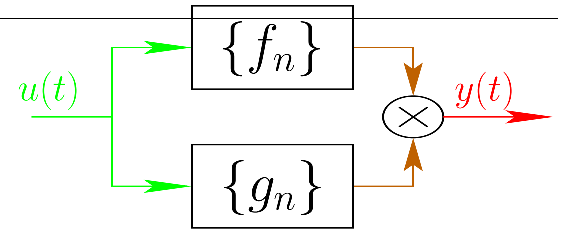
Soit u tq $\|u\|_\infty < min(\rho_f, \rho_g)$, alors

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t_1, \ldots, t_n) u(t-t_1) \ldots u(t-t_n)\, \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_n \\
&\quad + \sum_{n=1}^{+\infty} \int \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t_1, \ldots, t_n) u(t-t_1) \ldots u(t-t_n)\, \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \int \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \left[f_n(t_1, \ldots, t_n) + g_n(t_1, \ldots, t_n) \right] u(t-t_1) \ldots u(t-t_n)\, \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_n
\end{aligned}
$$

Résultat :

$$
\begin{aligned}
h_n(t_1, \ldots, t_n) &= f_n(t_1, \ldots, t_n) + g_n(t_1, \ldots, t_n) \\
H_n(s_1, \ldots, s_n) &= F_n(s_1, \ldots, s_n) + G_n(s_1, \ldots, s_n) \\
\phi_h(x) &\leq \phi_f(x) + \phi_g(x) \\
\rho_h &\geq \min(\rho_f, \rho_g)
\end{aligned}
$$

B6- Interconnexion de systèmes : Produit



Soit u tq $\|u\|_\infty < min(\rho_f, \rho_g)$, alors

$$\begin{aligned} y(t) &= \textstyle\sum_{p=1}^{+\infty} \int \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f_p(t_1, \ldots, t_p) u(t-t_1) \ldots u(t-t_p)\, \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_p \\ &\quad \times \textstyle\sum_{q=1}^{+\infty} \int \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} g_q(\tau_1, \ldots, \tau_q) u(t-\tau_1) \ldots u(t-\tau_q)\, \mathrm{d}\tau_1 \ldots \mathrm{d}\tau_q \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{p=1}^{n-1} \left[f_p(t_1, \ldots, t_p) g_{n-p}(\tau_1, \ldots, \tau_{n-p}) \right] u(t-t_1) \ldots u(t-t_p) \\ &\qquad u(t-\tau_1) \ldots u(t-\tau_{n-p})\, \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_p \mathrm{d}\tau_1 \ldots \mathrm{d}\tau_{n-p} \end{aligned}$$

Résultat :

$$\begin{aligned} h_n(t_1, \ldots, t_n) &= \textstyle\sum_{p=1}^{n-1} f_p(t_1, \ldots, t_p)\, g_{n-p}(t_{p+1}, \ldots, t_n) \\ H_n(s_1, \ldots, s_n) &= \textstyle\sum_{p=1}^{n-1} F_p(s_1, \ldots, s_p) G_{n-p}(s_{p+1}, \ldots, s_n) \\ \phi_h(x) &\leq \phi_f(x)\phi_g(x) \\ \rho_h &\geq \min(\rho_f, \rho_g) \end{aligned}$$

B7- Interconnection de systèmes : cascade

$$\xrightarrow{u(t)} \boxed{\{f_n\}} \longrightarrow \boxed{\{g_n\}} \xrightarrow{y(t)}$$

Résultat :

$$h_n(t_1, \ldots, t_n) = \sum_{p=1}^{n} \sum_{\substack{q_1, \ldots, q_p \geq 1 \\ q_1 + \ldots + q_p = n}} \int \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} g_p(\tau_1, \ldots, \tau_p) f_{q_1}(t_1 - \tau_1, \ldots, t_{q_1} - \tau_1) \ldots f_{q_p}(t_{q_1 + \ldots + q_{p-1} + 1} - \tau_p, \ldots, t_n - \tau_p) \mathrm{d}\tau_1 \ldots \mathrm{d}\tau_p$$

$$H_n(s_1, \ldots, s_n) = \sum_{p=1}^{n} \sum_{\substack{q_1, \ldots, q_p \geq 1 \\ q_1 + \ldots + q_p = n}} G_p(s_1 + \ldots + s_{q_1}, \ldots, s_{q_1 + \ldots + q_{p-1} + 1} + \ldots + s_n) \times F_{q_1}(s_1, \ldots, s_{q_1}) \ldots F_{q_p}(s_{q_1 + \ldots + q_{p-1} + 1}, \ldots, s_n)$$

$$\phi_h(x) \leq \phi_g \circ \phi_f(x)$$

$$\rho_h \geq \min\left(\rho_f, \phi_f^{-1}(\rho_g)\right)$$

B8- Cascade : 2 cas simples

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\{f_n\}} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} g_1 \\ \text{(lin.)} \end{matrix}} \xrightarrow{\;y(t)\;}$$

Cas 1 :

$$h_n(t_1, \ldots, t_n) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(\tau_1) f_n(t_1 - \tau_1, \ldots, t_n - \tau_1) \mathrm{d}\tau_1$$

$$H_n(s_1, \ldots, s_n) \;=\; G_1(s_1 + \ldots + s_n) F_n(s_1, \ldots, s_n)$$

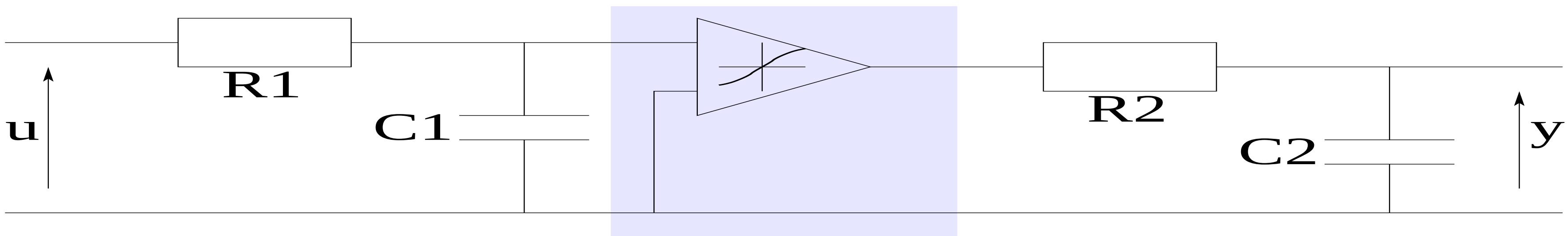
$$u(t) \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} f_1 \\ \text{(lin.)} \end{matrix}} \longrightarrow \boxed{\{g_n\}} \xrightarrow{\;y(t)\;}$$

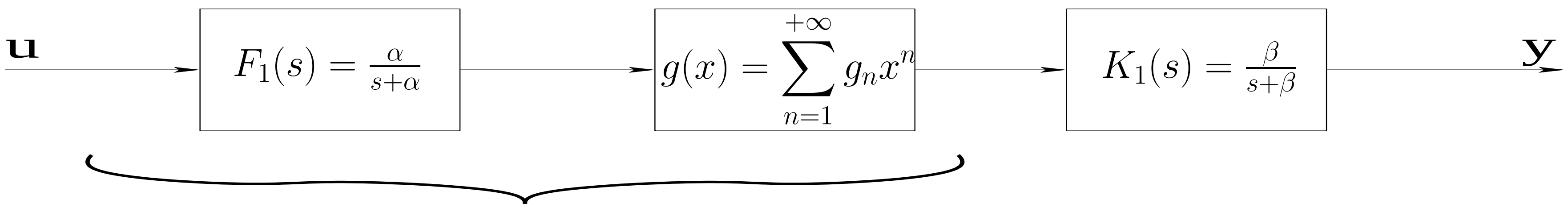
Cas 2 :

$$h_n(t_1, \ldots, t_n) \;=\; \int \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(\tau_1, \ldots, \tau_n) f_1(t_1 - \tau_1) \ldots f_1(t_n - \tau_n) \mathrm{d}\tau_1 \ldots \mathrm{d}\tau_n$$

$$H_n(s_1, \ldots, s_n) \;=\; G_n(s_1, \ldots, s_n) F_1(s_1) \ldots F_1(s_n)$$

B9- Exemple de résolution pour un circuit électrique





$L_n(s_1, \dots, s_n) = g_n F_1(s_1) \dots F_1(s_n)$ avec $\alpha = 1/(R_1 C_1)$ et $\beta = 1/(R_2 C_2)$

Les noyaux du système complet sont, dans le domaine de Laplace :

$$
\begin{aligned}
H_n(s_1, \dots, s_n) &= K_1(s_1 + \cdots + s_n) L_n(s_1, \dots, s_n) \\
&= K_1(s_1 + \cdots + s_n) g_n F_1(s_1) \dots F_1(s_n) \\
H_n(s_1, \dots, s_n) &= \frac{\beta}{s_1 + \dots + s_n + \beta} \cdot \frac{g_n \alpha^n}{(s_1 + \alpha) \dots (s_n + \alpha)}
\end{aligned}
$$

B10- Exemple et Remarques

Dans le domaine temporel, on trouve (pour $t_1, \ldots, t_n > 0$)

$$h_n(t_1, \ldots, t_n) = g_n \mathrm{e}^{-\alpha(t_1 + \ldots + t_n)} \cdot \frac{\mathrm{e}^{(n\alpha - \beta)\min(t_1, \ldots, t_n)} - 1}{n\alpha - \beta}$$

Remarques :

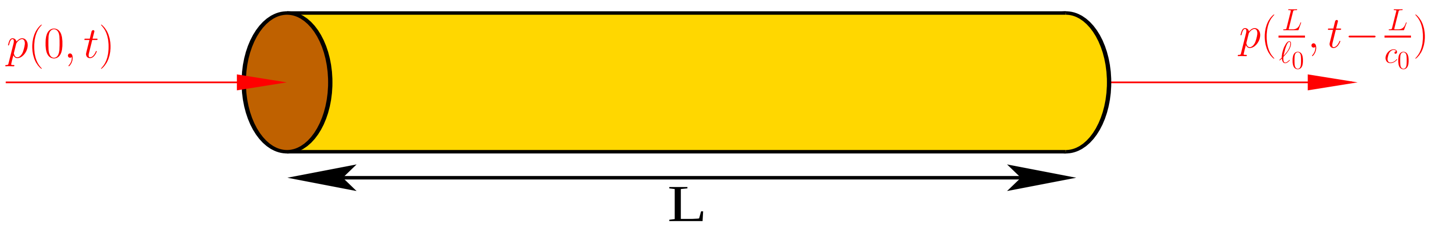
Les séries de Volterra décrivent une dynamique NL autour d'un point d'équilibre.

Mais elles ne modélisent ni les bifurcations ni les hystérésis.

EDP non linéaire avec contrôle de dimension 1

C1- Problème posé : brillance au nuances fortissimo

Propagation acoustique d'une onde plane progressive $p(\ell,\tau)$:



Modèle : ***EDP NL*** [Menguy,Gilbert2000]

$$\partial_\ell p(\ell,\tau) = \underbrace{p(\ell,\tau)\;\partial_\tau p(\ell,\tau)}_{\text{Non-linéarité}} - \underbrace{\alpha_0\;\partial_\tau^{\frac{1}{2}} p(\ell,\tau)}_{\text{pertes visco-thermiques}} \quad \text{avec} \quad \left\{\begin{array}{lcl} \tau & = & t - z/c_0 \\ \ell & \propto & z \end{array}\right.$$

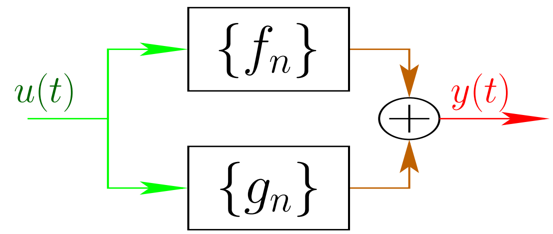
Validité : $|p| < 160\,\mathrm{dB}$ SPL ***VS*** $110\,\mathrm{dB}$ pour ppgt° lin.

But : Représenter le tube par un ***série de Volterra***

C2- SÉRIES DE VOLTERRA : interconnexion de systèmes

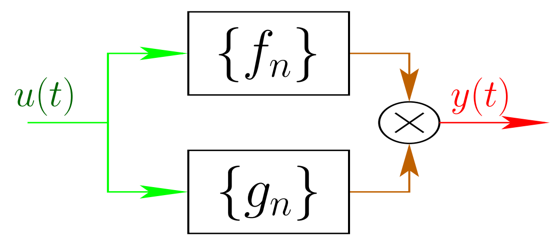
SOMME de 2 systèmes : $\rho_h = \min\left(\rho_f, \rho_g\right)$

$$\boxed{H_n(s_1, \ldots, s_n) = F_n(s_1, \ldots, s_n) + G_n(s_1, \ldots, s_n)}$$



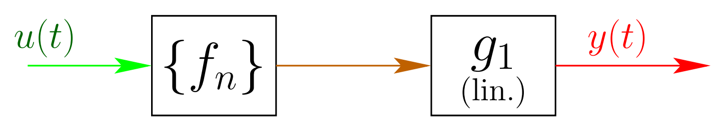
PRODUIT de 2 systèmes : $\rho_h = \min\left(\rho_f, \rho_g\right)$

$$\boxed{H_n(s_1, \ldots, s_n) = \sum_{p=1}^{n-1} F_p(s_1 \ldots, s_p) G_{n-p}(s_{p+1}, \ldots, s_n)}$$



CASCADE (Volterra+linéaire) : $\rho_h = \rho_f$

$$\boxed{H_n(s_1, \ldots, s_n) = F_n(s_1, \ldots, s_n)\, G_1(s_1 + \ldots + s_n)}$$



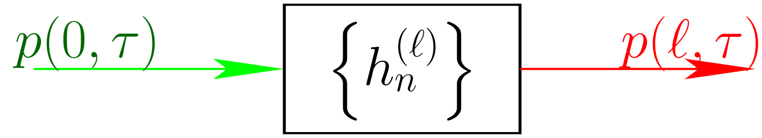
C3- NOYAUX de (S) : Éq. satisfaite par les noyaux

Éq. de Menguy & Gilbert :

$$\partial_\ell p + \alpha_0\, \partial_\tau^{\frac{1}{2}} p \;=\; p\, \partial_\tau p$$

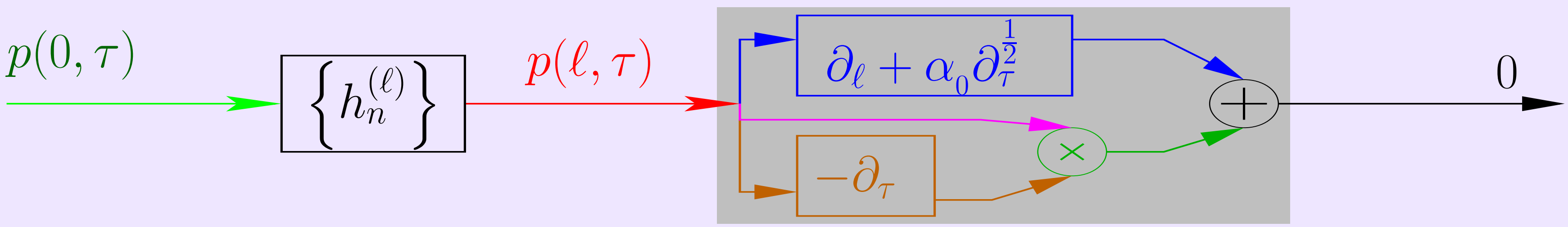
(ℓ : var. spatiale, τ : var. temporelle)

Syst. de Volterra :



(ℓ : paramètres des noyaux)

Équation satisfaite par les noyaux $H_n^{(\ell)}(s_1, \ldots, s_n)$:



$$\partial_\ell H_n^{(\ell)}(s_1, \ldots, s_n) \;+\; \alpha_0 \sqrt{s_1 + \ldots + s_n}\; H_n^{(\ell)}(s_1, \ldots, s_n)$$

$$= \sum_{p=1}^{n-1} \Big[(s_1 + \ldots + s_p)\, \underbrace{H_p^{(\ell)}(s_1, \ldots, s_p)\, H_{n-p}^{(\ell)}(s_{p+1}, \ldots, s_n)}_{\text{ordres} < n} \Big]$$

C4- NOYAUX de (S) : Éq. satisfaite par les noyaux

Équation Differentielle Ordinaire : $\forall n \geq 1$,

$$\partial_\ell H_n^{(\ell)}(s_1, \ldots, s_n) \; + \; \alpha_0 \sqrt{s_1 + \ldots + s_n}\; H_n^{(\ell)}(s_1, \ldots, s_n)$$
$$= \sum_{p=1}^{n-1} (s_1 + \ldots + s_p) \underbrace{H_p^{(\ell)}(s_1, \ldots, s_p)\, H_{n-p}^{(\ell)}(s_{p+1}, \ldots, s_n)}_{\text{ordres} < n}$$

(ℓ : variable, s_p : paramètres)

Conditions aux limites : $\ell = 0 \Longrightarrow \boxed{p(0,\tau) \longrightarrow \boxed{\left\{h_n^{(\ell)}\right\}} \longrightarrow p(\ell,\tau)} \equiv$ Identité

$$H_1^{(0)}(s_1) = 1 \quad \text{and} \quad H_n^{(0)}(s_1, \ldots, s_n) = 0, \; \forall n \geq 2$$

C5- NOYAUX DE (S) : ordres 1 et 2

n=1 : $$\left.\begin{array}{r}\partial_\ell H_1^{(\ell)}(s_1) + \alpha_0 \sqrt{s_1}\, H_1^{(\ell)}(s_1) = 0 \\ H_1^{(0)}(s_1) = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{H_1^{(\ell)}(s_1) = \mathrm{e}^{-\alpha_0\, \ell \sqrt{s_1}}}$$

n=2 : $$\left.\begin{array}{rcl}\partial_\ell H_2^{(\ell)}(s_1,s_2) + \alpha_0 \sqrt{s_1+s_2}\, H_2^{(\ell)}(s_1,s_2) & = & s_1\, \mathrm{e}^{-\alpha_0\, (\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2})\, \ell} \\ H_2^{(0)}(s_1,s_2) & = & 0\end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \boxed{H_2^{(\ell)}(s_1,s_2) = \frac{s_1}{\alpha_0}\, \frac{\mathrm{e}^{-\alpha_0\, \ell \sqrt{s_1+s_2}} - \mathrm{e}^{-\alpha_0\, \ell\, (\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2})}}{\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2}-\sqrt{s_1+s_2}}}$$

C6- NOYAUX DE (S) : ordres supérieurs

Théorème :

$$H_n^{(\ell)}(s_1,\ldots,s_n)=\sum_{\kappa\in\mathcal{K}_n} P_\kappa(s_1,\ldots,s_{n-1})\, f_\kappa^{(\ell)}(s_1,\ldots,s_n) \text{ with } f_\kappa^{(\ell)}(s_1,\ldots,s_n)=\sum_{\lambda\in\Lambda_\kappa} \frac{e^{-\alpha_0 \ell \phi_\lambda(s_1,\ldots,s_n)}}{A_{\kappa,\lambda}(s_1,\ldots,s_n)}$$

$$\text{avec} \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{K}_1=\{\bullet\} \text{ et } \mathcal{K}_n=\bigcup_{p=1}^{n-1}\{\mathcal{K}_p\times\mathcal{K}_{n-p}\} & \textit{(arbres binaires à n feuilles)} \\ \Lambda_\bullet=\{w_1\} \text{ et } \Lambda_{(\kappa_1,\kappa_2)}=(\Lambda_{\kappa_1}\times\Lambda_{\kappa_2})\cup\{w_n\} & \textit{(}w_n\equiv\textit{cnd. au bord)} \end{array}\right.$$

et P_κ : polynômes, $f_\kappa^{(\ell)}$: fct. analytiques $\forall \ell, \Re e(s_k)>0$, card $\mathcal{K}_n$: nb. de Catalan.

Détails des récurrences :

(i) $P_\bullet=1$ et $(\kappa_1,\kappa_2)\in\mathcal{K}_p\times\mathcal{K}_{n-p}\Rightarrow P_\kappa(s_1,\ldots,s_{n-1})=(s_1+\ldots+s_p)\,P_{\kappa_1}(s_1,\ldots,s_{p-1})\,P_{\kappa_2}(s_{p+1},\ldots,s_{n-1})$

(ii) $\phi_{w_n}(s_1,\ldots,s_n)=\sqrt{s_1+\ldots+s_n}$ et $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)\Rightarrow\phi_\lambda(s_1,\ldots,s_n)=\phi_{\lambda_1}(s_1,\ldots,s_p)+\phi_{\lambda_2}(s_{p+1},\ldots,s_n)$

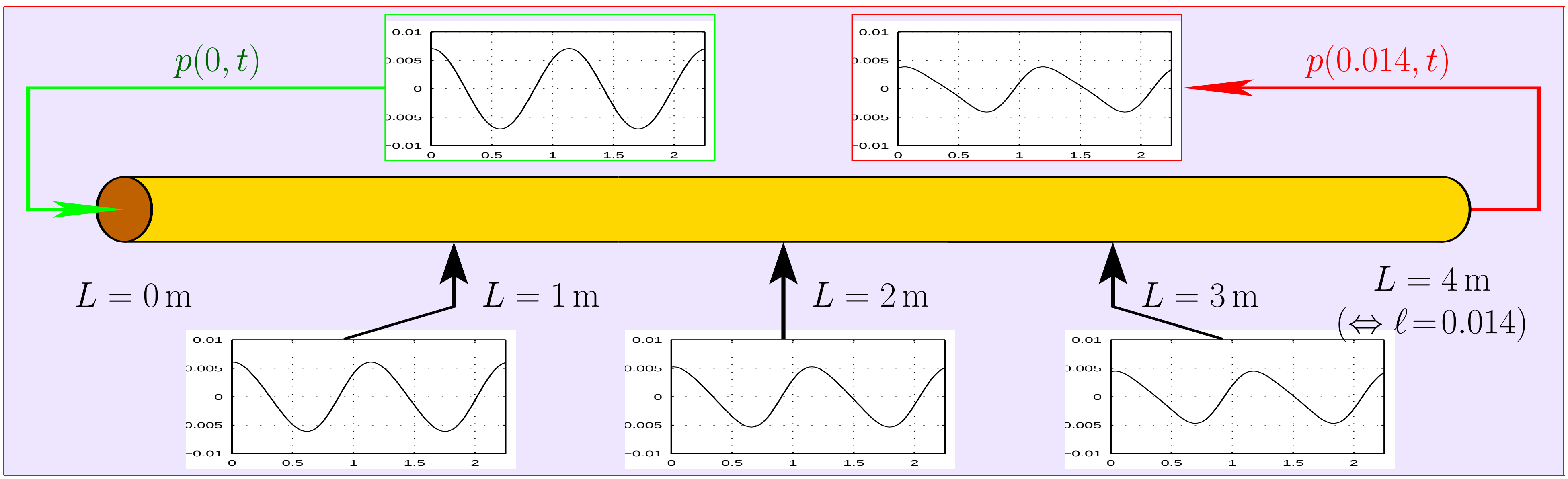
(iii) $A_{\bullet,w_1}(s_1)=1$ et $n\geq 2\Rightarrow\left[A_{\kappa,w_n}(s_1,\ldots,s_n)\right]^{-1}=-\sum_{\lambda\in\Lambda_\kappa\setminus\{w_n\}}\left[A_{\kappa,\lambda}(s_1,\ldots,s_p)\right]^{-1}$

et $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)\,(\neq w_n)\Rightarrow A_{\kappa,\lambda}(s_1,\ldots,s_n)=-\alpha_0\,A_{\kappa_1,\lambda_1}(s_1,\ldots,s_p)\,A_{\kappa_2,\lambda_2}(s_{p+1},\ldots,s_n)\left[\phi_\lambda(s_1,\ldots,s_n)-\sqrt{s_1+\ldots+s_n}\right]$

C7- SIGNAUX PERIODIQUES : simulation temporelle

$$u(\tau)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\,\mathrm{e}^{ik\omega\tau} \longrightarrow \boxed{\{h_n\}} \longrightarrow y(\tau)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k\,\mathrm{e}^{ik\omega\tau}$$

avec $d_k=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\ \sum_{\substack{k_1,\dots,k_n=-\infty\\ k_1+\dots+k_n=k}}^{+\infty} c_{k_1}\dots c_{k_n}\,H_n(ik_1\omega,\dots,ik_n\omega).$

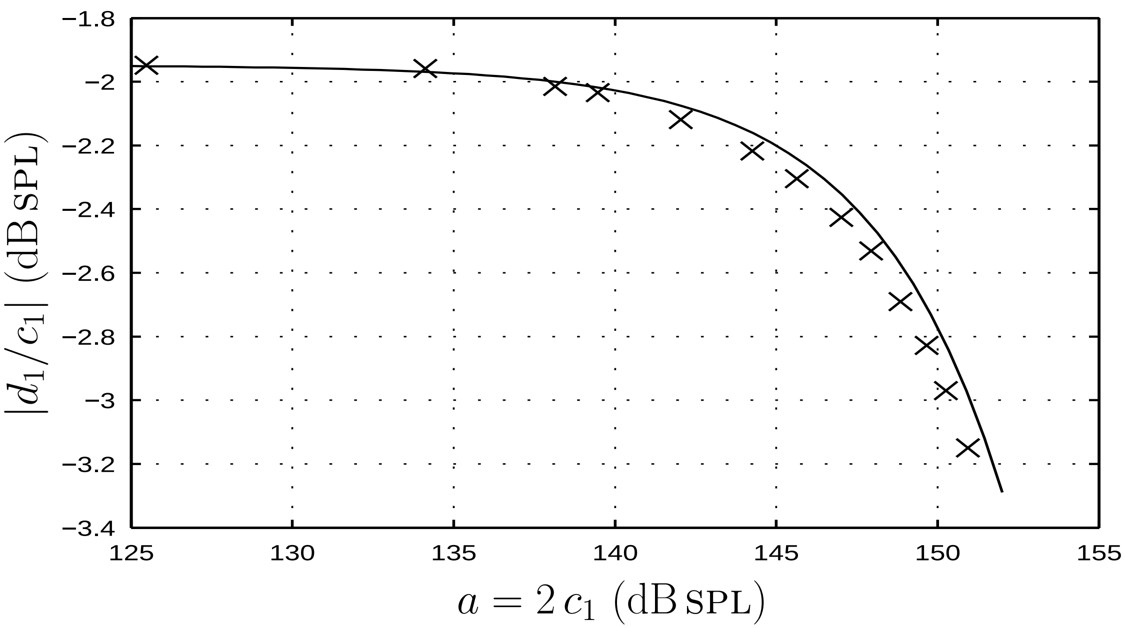


$f=440\,\mathrm{Hz}$, $a\equiv 154\,\mathrm{dB\,SPL}$, $R_0=5.6\,\mathrm{mm}$, et constantes physiques typiques.

C8- SIGNAUX PERIODIQUES : Confrontation aux données expérimentales

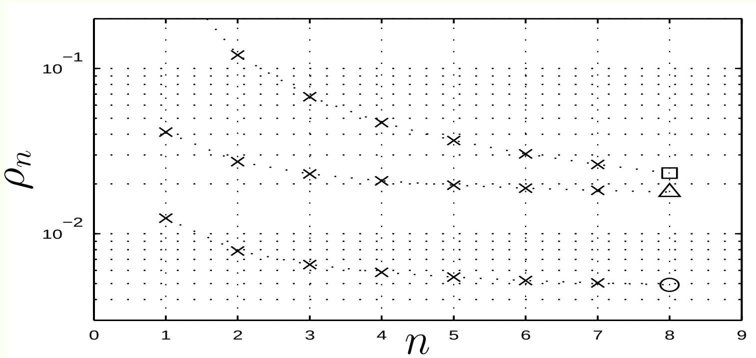
Ratio des amplitudes du fondamental sortie/entrée $|d_1/c1|$:

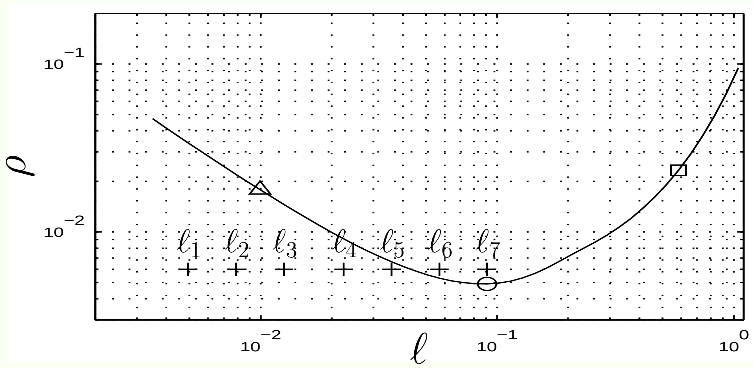
$(F = 2\,\mathrm{kHz},\ R_0 = 29\,\mathrm{mm},\ L = 4.98\,\mathrm{m},$[Menguy,Gilbert]$)$



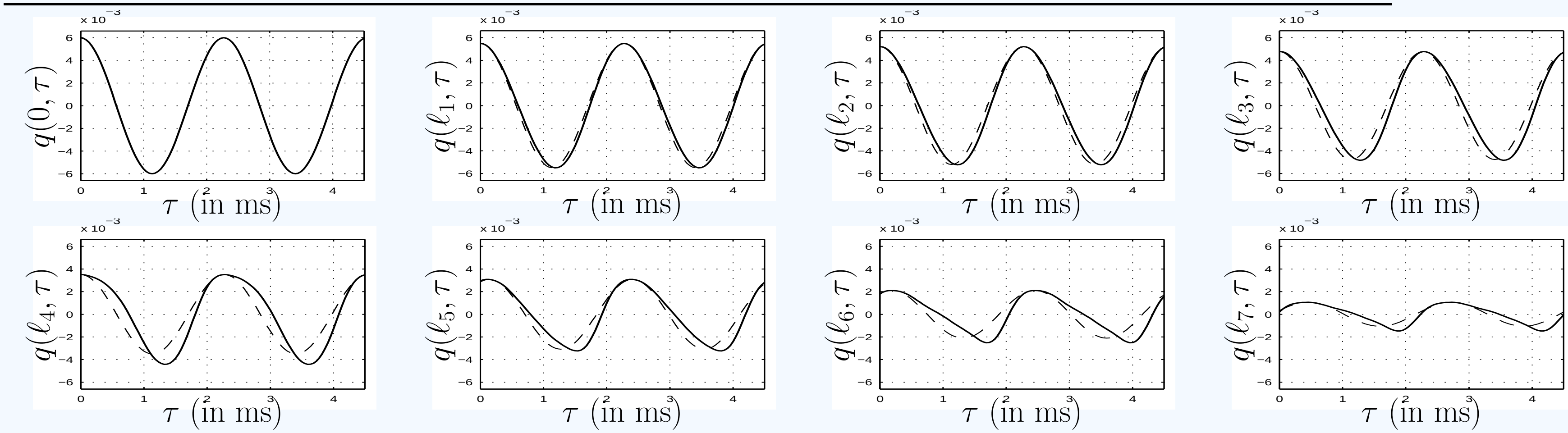
C9- Convergence et troncature (N=4)

Rayon de convergence estimé par $\rho_n = |H_n(i\omega, ...i\omega)/H_{n+1}(i\omega, ...i\omega)|$, $n \to +\infty$:



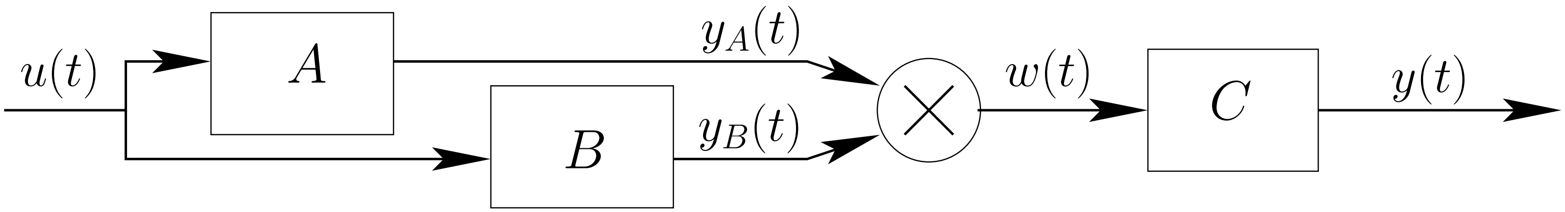


Simulations pour les longueurs $\ell = 0, \ell_1, ..., \ell_7$ (0m à 26m) :



C10- Vers une application faible coût

Un exemple simple : $H_2(s_1, s_2) = A(s_1)\, B(s_2)\, C(s_1 + s_2)$



→ Simulation de 3 filtres et 1 multiplication

Cas présent : (stage [Smet])

– Représentation diffusives multi-variables →bien posé mais lourd

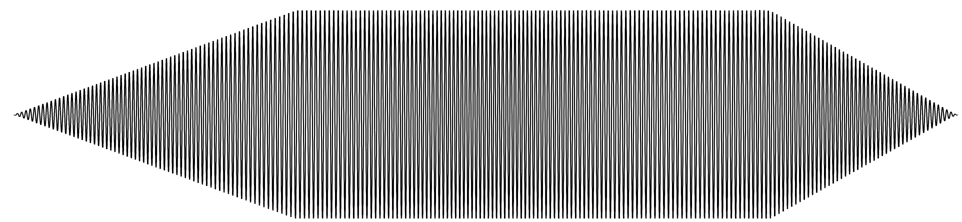
– Décompositions structurées filtres/multiplications →satisfaisant

Construction d'une simulation numérique (H_1, H_2) :

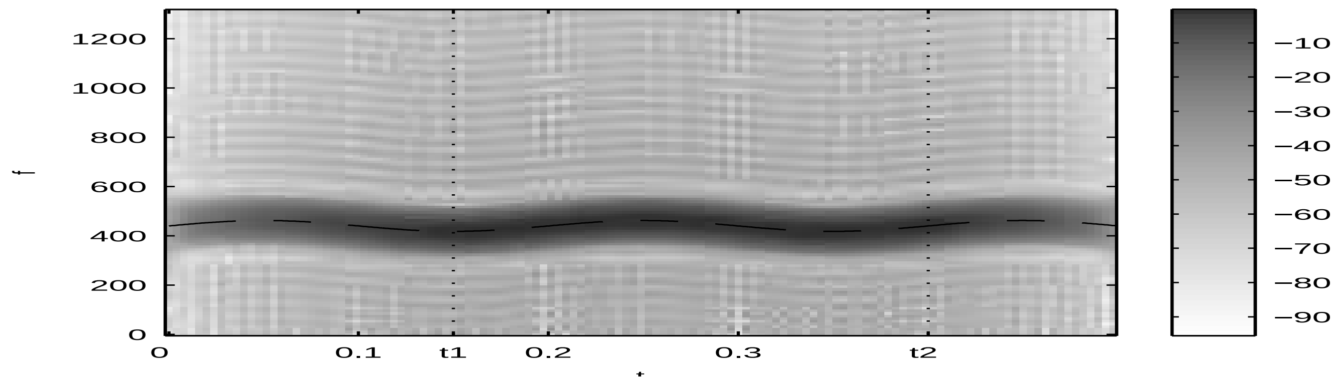
exemple sonore [linéaire, 150dB, 160dB, 170dB]

C11- Exemple de signal non stationnaire ($f_{moy} = 440\,$Hz, $a_{max} \equiv 154\,$dB SPL, $R_0 = 5.6\,$mm)

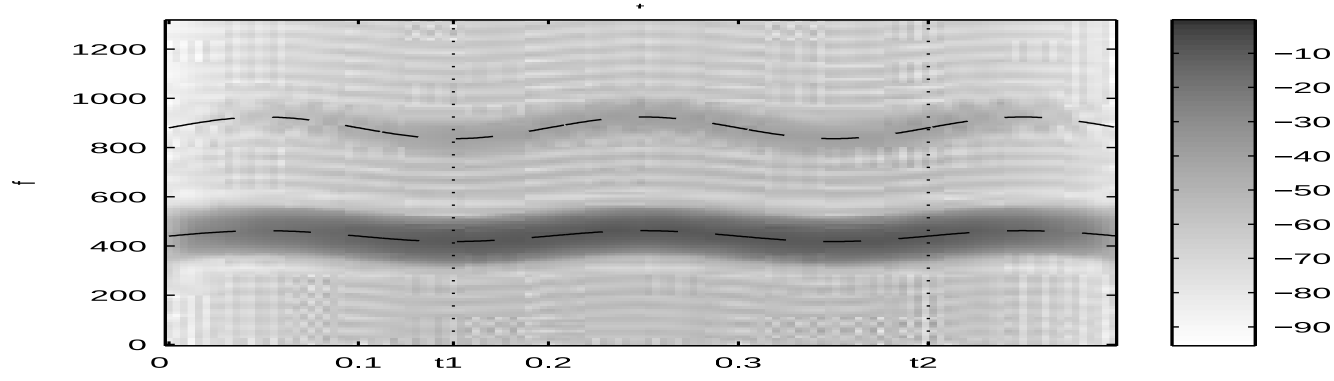
signal d'entrée :



spectro. de l'entrée :



spectro. de la sortie :



Extension au cas de contrôles de dimensions supérieures

D1- Problème posé et principe

Problème : l'entrée devient $u(\vec{x},t)$ pour $(\vec{x},t) \in \Gamma \times \mathbb{R}$

Principe :

1- Décomposer u sur une base spatiale : $u(\vec{x},t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n(t)\phi_n(\vec{x})$

2- Etendre les séries de Volterra au cas de multi-entrées $u_k(t)$

$$y(\vec{x},t) = \sum_{\underline{m}\in\mathbb{M}} \int \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} h_{\underline{m}}^{(\vec{x})}(t_1,\ldots,t_m)u_{\nu_{\underline{m}}(1)}(t-t_1)\ldots u_{\nu_{\underline{m}}(m)}(t-t_m)\mathrm{d}t_1\ldots\mathrm{d}t_m$$

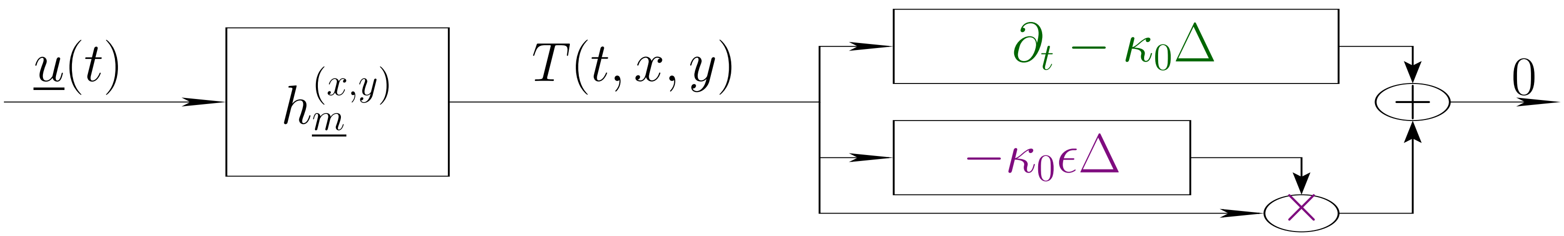
À un multi-index $\underline{m} = (1,0,0,2,0,\ldots)$ correspond $u_0(t-t_1)u_3(t-t_2)u_3(t-t_3)$.

On a $\underline{m} = (m_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{M} = \left\{\underline{m}\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, \exists N \text{ tq. } m_N \neq 0 \text{ et } n>N \Rightarrow m_n=0\right\}$

3- Etendre les lois d'interconnexion aux noyaux multi-index $h_{\underline{m}}^{(\vec{x})}(t_1,\ldots,t_m)$

D2- Un exemple d'une équation de diffusion

Soit une plaque rectangulaire $X \times Y$ régie par $\partial_t T = \kappa_0(1+\epsilon T)\Delta T$, $\forall(x,y) \in]0,X[\times]0,Y[$ avec $\partial_y T = u(t,x)$, $\forall(x,y) \in [0,X]\times\{Y\}$ et flux nul aux autres bords.



$$(s_1+ \dots +s_m) H_{\underline{m}}^{(x,y)}(\mathbf{s}_{\underline{m}}) - \kappa_0 \Delta H_{\underline{m}}^{(x,y)}(\mathbf{s}_{\underline{m}}) - \underbrace{\kappa_0\epsilon \sum_{(\widehat{\underline{m}},\widetilde{\underline{m}})\in\mathbb{M}_{\underline{m}}} \Delta H_{\widehat{\underline{m}}}^{(x,y)}(\widehat{\mathbf{s}}_{\widehat{\underline{m}},\widetilde{\underline{m}}})\, H_{\widetilde{\underline{m}}}^{(x,y)}(\widetilde{\mathbf{s}}_{\widehat{\underline{m}},\widetilde{\underline{m}}})}_{\text{noyaux d'ordre } < \underline{m}} = 0,$$

Une résolution analytique des EDP linéaires conduit à une écriture de la forme

$$\boxed{H_{\underline{m}}^{(x,y)}(\mathbf{s}_{\underline{m}}) = \sum_{a\in\mathcal{A}_{\underline{m}}} \sum_{E=(\mathbf{n},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\zeta})\in\mathcal{E}_a} \epsilon^{m-1}\, K_E^a(\mathbf{s}_{\underline{m}})\, \psi_{|\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\xi}|}(x)\, \cosh\big(\Lambda^a_{\mathbf{n},\boldsymbol{\zeta}}(\mathbf{s}_{\underline{m}})\, y\big)}$$

CONCLUSION

E- Conclusion

Résolution d'*EDP faiblement non linéaires* par les séries de Volterra :

- Nouvelle méthode :

Cas	**Système NL**	**Résolution** (noyaux de Volterra)
classique	E.D.O. NL	***Algébrique***
présent	E.D.P. NL	E.D.O. ou E.D.P. ***Linéaire***

- Alternative à la ***méthode des perturbations***
  (en pratique, conserver les permiers noyaux suffit)
- ***Outil de décomposition hamonique*** efficace,
- ***Réalisations temporelles faible coût*** (appli. en temps-réel)

Perspectives et extensions :

- ***Rayon de convergence*** explicite et ***erreur garantie*** (EDO)
- Applications aux ***systèmes de dim. infinie*** : entrée=$u(\vec{x}, t)$