

SERIES DE VOLTERRA pour la résolution
d'équation aux dérivées partielles non linéaires :
une application pour la simulation temps-réel
d'instrument de musique

INRIA

UNITÉ DE RECHERCHE DE ROCQUENCOURT

PRÉSENTÉ PAR

THOMAS HÉLIE

IRCAM - CNRS UMR 9912 - ÉQUIPE ANALYSE-SYNTHÈSE

IRCAM, CENTRE GEORGES POMPIDOU, PARIS

LUNDI 27 NOVEMBRE 2006

PLAN

A- **Introduction** : [IRCAM](#) - modèle de cuivres - problème posé

B- **Séries de Volterra** : [présentation de l'outil](#)

C- **EDP non linéaire avec contrôle de dimension 1**

D- **Extension au cas de dimensions supérieures**

E- **Conclusion**

A1- L'IRCAM : Institut de Recherche et Coordination Acoustique/Musique [UMR CNRS 9912]



<http://www.ircam.fr>



Création : en *1971* par *Pierre Boulez*

Vocation : interaction entre

- *recherche* scientifique (son & musique)
- *développement* technologique
- *création musicale* contemporaine

Équipe Analyse-Synthèse :

- *modèles de synthèse*
- procédés d'*analyse* des sons
- outils de *transformation* des sons

A2- Modèles physiques pour la synthèse sonore

Objectifs :

Modélisation réaliste pour la *simulation* et le *contrôle* en *temps réel*
(compositeurs, musiciens, luthiers)

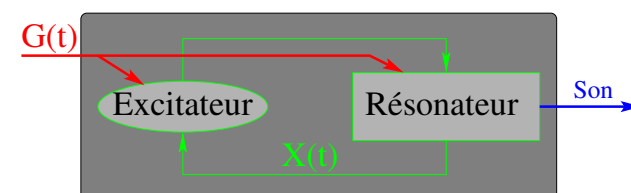
Intérêts :

Instruments *virtuels* et *naturels*
(attaques, transitoires, «canards», etc...)

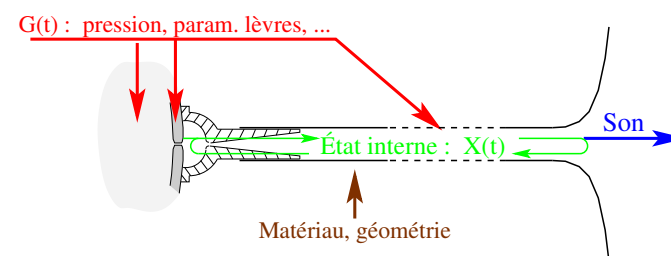
Problèmes :

- 1- Sons *réalistes* ↔ modèles *non triviaux*
(EDP 3D, NL, op. pseudo-diff.)
- 2- *Temps réel* ↔ méthodes numériques
standard *trop lourdes*
- 3- *Contrôle délicat* ↔ *inversion entrée/sortie*
(grande variété de régimes)

Modèles en syst. E/S :



Cas du cuivre :



Approche «système» :

Relations *entrée/sortie*
(éviter de calculer l'état dans tout l'espace)

A3- Résonateurs de type cuivre

Notation : $\partial_x^n = \frac{\partial^n}{\partial x^n}$

[JASA] (Hélie) : Propagation linéaire avec pertes dans un tube courbe ($< f$)

$$\left[\partial_\ell^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \underbrace{\Upsilon(\ell)}_{\text{courbure}} - \underbrace{\frac{\varepsilon(\ell)}{c^2} \partial_t^{\frac{3}{2}}}_{\text{pertes visco-therm.}} \right] (\mathcal{R}(\ell) \tilde{p}(\ell, t)) = 0$$

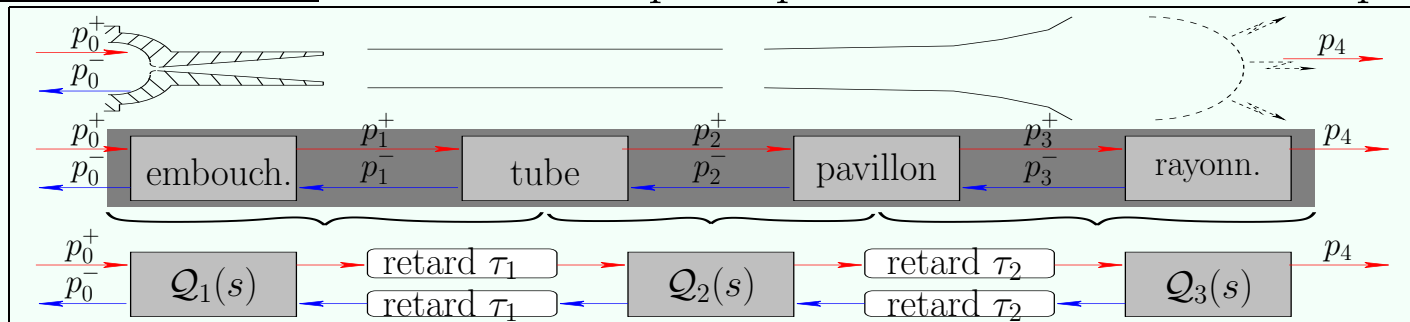
[Acta Acustica] : Propagation non linéaire dans un tube droit ($< fff$)
(Menguy, Gilbert) (pour une onde progressive “aller”)

$$\partial_z p(z, t) + \frac{1}{c} \partial_t p(z, t) + \underbrace{\frac{\alpha}{\sqrt{c}} \partial_t^{\frac{1}{2}} p(z, t)}_{\text{pertes visco-therm.}} = \underbrace{\frac{\beta}{c} p(z, t) \partial_t p(z, t)}_{\text{non-linéarité}}$$

Rq : $\partial_t^{\frac{1}{2}} (\partial_t^{\frac{1}{2}} f(t)) = \partial_t f(t) \longrightarrow \sqrt{s} (\sqrt{s} F(s)) = s F(s)$ Bode $\sqrt{2\nu\pi f}$: +3 dB/oct \equiv +10 dB/dec

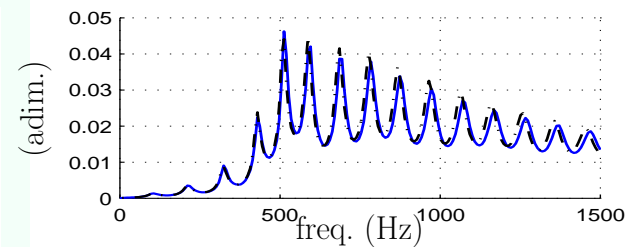
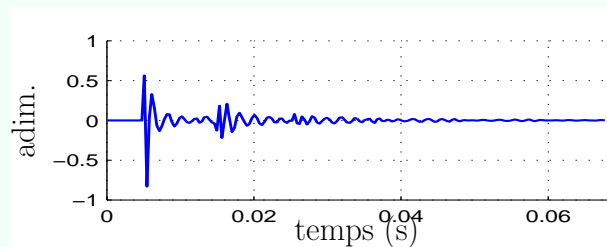
A4- Résultat en linéaire et problème posé

Résonateur linéaire : résolution en quadripôles et simulation en temps réel



Transmission :

[Hélie, Mignot]



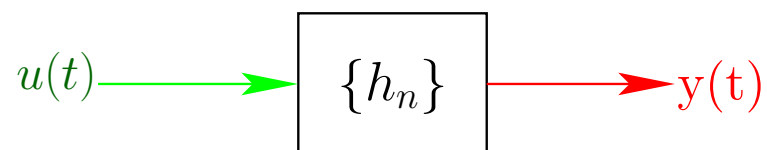
Problème posé : lien direct entre les états acoustiques des extrémités d'un tronçon

Propagation	Outil
linéaire	quadripôles : fonctions de transfert (matrice de dispersion)
non linéaire	quel outil ?

**INTRODUCTION AUX
SÉRIES DE VOLTERRA**

B1- SERIES DE VOLTERRA : Définition

Série de Volterra de noyaux $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$:



$$y(t) = \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}}_{\text{somme}} \underbrace{\int \dots \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t_1, \dots, t_n) u(t-t_1) \dots u(t-t_n) dt_1 \dots dt_n}_{\text{de convolutions multiples}}$$

Interprétation de chaque terme :

- $n = 1$ convolution standard : système linéaire
- $n = 2$ double convolution : non-linéarité d'ordre 2
- $n \geq 3$ etc...

Noyaux $h_n \equiv$ Réponses impulsionnelles généralisées

B2- Cadre mathématique : espaces, convergence et reste

Fonction limitante : Soient $h_n \in L^1(\mathbb{R}^n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

On note $\phi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \|h_n\|_1 x^n$ avec $\|h_n\|_1 = \int \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |h_n(t_1, \dots, t_n)| dt_1 \dots dt_n$

Convergence : Soient $u \in L^\infty(\mathbb{R})$ et ρ le rayon de convergence de ϕ .

Si u est telle que $\|u\|_\infty = \sup_t (|u(t)|) < \rho$,
alors la série de Volterra converge uniformément et est bornée par $\phi(\|u\|_\infty)$

Preuve : $|y(t)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \int \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |h_n(t_1, \dots, t_n)| \|u\|_\infty \dots \|u\|_\infty dt_1 \dots dt_n \leq \phi(\|u\|_\infty)$

Théorème :

Si $\|h_n\|_1 < K a^n$ et $a \|u\|_\infty < 1$,
alors $\left| y(t) - \sum_{n=1}^N \int \dots \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t_1, \dots, t_n) u(t-t_1) \dots u(t-t_n) dt_1 \dots dt_n \right| \leq K \frac{(a \|u\|_\infty)^N}{1 - a \|u\|_\infty}$

B3- Causalité et transformée de Laplace

Causalité :

Un système $\{h_n\}$ est **causal** si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
 $t_k < 0 \Rightarrow \forall n \geq k, h_n(\dots, t_k, \dots) = 0$

Transformée de Laplace multi-variable :

On définit $H_n(s_1, \dots, s_n) = \int \dots \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t_1, \dots, t_n) e^{-(s_1 t_1 + \dots + s_n t_n)} dt_1 \dots dt_n$

Théorème :

Les fonctions $H_n(s_1, \dots, s_n)$ d'un système **causal et stable** sont **analytiques** dans $\Re(s_1) > 0, \dots, \Re(s_n) > 0$.

B4- Quelques systèmes simples

Système linéaire $y(t) = [f \star_t u](t) :$

$$\begin{aligned} h_1(t_1) &= f(t_1) \\ h_n(t_1, \dots, t_n) &= 0, \quad \forall n \geq 2 \\ \rho_h &= +\infty \end{aligned}$$

Série entière $y(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n u(t)^n = g(u(t))$
de rayon $\rho_g :$

$$\begin{aligned} h_n(t_1, \dots, t_n) &= g_n \delta(t_1, \dots, t_n), \quad \forall n \geq 2 \\ \rho_h &= \rho_g \end{aligned}$$

La cascade $\rightarrow \boxed{\star_t f} \rightarrow \boxed{\cdot^m} \rightarrow :$

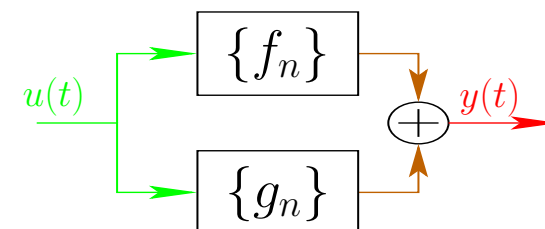
$$\begin{aligned} h_m(t_1, \dots, t_m) &= f(t_1) f(t_2) \dots f(t_m) \\ h_n(t_1, \dots, t_n) &= 0 \quad \text{si } n \neq m \\ \rho_h &= +\infty \end{aligned}$$

La cascade $\rightarrow \boxed{\star_t f} \rightarrow \boxed{g} \rightarrow :$

$$\begin{aligned} h_n(t_1, \dots, t_n) &= g_n f(t_1) f(t_2) \dots f(t_n) \\ \rho_h &= \rho_g / \|f\|_1 \end{aligned}$$

Plus généralement : Tout système composé de systèmes linéaires, des sommes ou produits de leurs sorties, et de cascades.

B5- Interconnexion de systèmes : Somme



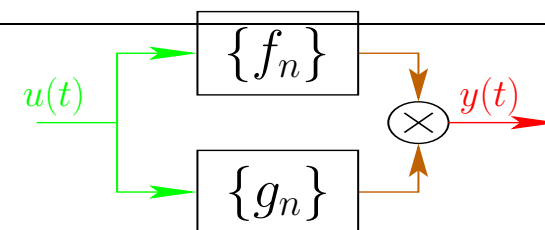
Soit u tq $\|u\|_\infty < \min(\rho_f, \rho_g)$, alors

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t_1, \dots, t_n) u(t - t_1) \dots u(t - t_n) dt_1 \dots dt_n \\
 &+ \sum_{n=1}^{+\infty} \int \dots \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t_1, \dots, t_n) u(t - t_1) \dots u(t - t_n) dt_1 \dots dt_n \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int \dots \int_{-\infty}^{+\infty} [f_n(t_1, \dots, t_n) + g_n(t_1, \dots, t_n)] u(t - t_1) \dots u(t - t_n) dt_1 \dots dt_n
 \end{aligned}$$

Résultat :

$$\begin{aligned}
 h_n(t_1, \dots, t_n) &= f_n(t_1, \dots, t_n) + g_n(t_1, \dots, t_n) \\
 H_n(s_1, \dots, s_n) &= F_n(s_1, \dots, s_n) + G_n(s_1, \dots, s_n) \\
 \phi_h(x) &\leq \phi_f(x) + \phi_g(x) \\
 \rho_h &\geq \min(\rho_f, \rho_g)
 \end{aligned}$$

B6- Interconnexion de systèmes : Produit



Soit u tq $\|u\|_\infty < \min(\rho_f, \rho_g)$, alors

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \sum_{p=1}^{+\infty} \int \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f_p(t_1, \dots, t_p) u(t - t_1) \dots u(t - t_p) dt_1 \dots dt_p \\
 &\quad \times \sum_{q=1}^{+\infty} \int \dots \int_{-\infty}^{+\infty} g_q(\tau_1, \dots, \tau_q) u(t - \tau_1) \dots u(t - \tau_q) d\tau_1 \dots d\tau_q \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{p=1}^{n-1} [f_p(t_1, \dots, t_p) g_{n-p}(\tau_1, \dots, \tau_{n-p})] u(t - t_1) \dots u(t - t_p) \\
 &\quad u(t - \tau_1) \dots u(t - \tau_{n-p}) dt_1 \dots dt_p d\tau_1 \dots d\tau_{n-p}
 \end{aligned}$$

Résultat :

$$\begin{aligned}
 h_n(t_1, \dots, t_n) &= \sum_{p=1}^{n-1} f_p(t_1, \dots, t_p) g_{n-p}(t_{p+1}, \dots, t_n) \\
 H_n(s_1, \dots, s_n) &= \sum_{p=1}^{n-1} F_p(s_1, \dots, s_p) G_{n-p}(s_{p+1}, \dots, s_n) \\
 \phi_h(x) &\leq \phi_f(x) \phi_g(x) \\
 \rho_h &\geq \min(\rho_f, \rho_g)
 \end{aligned}$$

B7- Interconnection de systèmes : cascade



Résultat :

$$h_n(t_1, \dots, t_n) = \sum_{p=1}^n \sum_{\substack{q_1, \dots, q_p \geq 1 \\ q_1 + \dots + q_p = n}} \int \dots \int_{-\infty}^{+\infty} g_p(\tau_1, \dots, \tau_p) f_{q_1}(t_1 - \tau_1, \dots, t_{q_1} - \tau_1) \dots f_{q_p}(t_{q_1 + \dots + q_{p-1} + 1} - \tau_p, \dots, t_n - \tau_p) d\tau_1 \dots d\tau_p$$

$$H_n(s_1, \dots, s_n) = \sum_{p=1}^n \sum_{\substack{q_1, \dots, q_p \geq 1 \\ q_1 + \dots + q_p = n}} G_p(s_1 + \dots + s_{q_1}, \dots, s_{q_1 + \dots + q_{p-1} + 1} + \dots + s_n) \times F_{q_1}(s_1, \dots, s_{q_1}) \dots F_{q_p}(s_{q_1 + \dots + q_{p-1} + 1}, \dots, s_n)$$

$$\phi_h(x) \leq \phi_g \circ \phi_f(x)$$

$$\rho_h \geq \min(\rho_f, \phi_f^{-1}(\rho_g))$$

B8- Cascade : 2 cas simples

Cas 1 :



$$h_n(t_1, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(\tau_1) f_n(t_1 - \tau_1, \dots, t_n - \tau_1) d\tau_1$$

$$H_n(s_1, \dots, s_n) = G_1(s_1 + \dots + s_n) F_n(s_1, \dots, s_n)$$

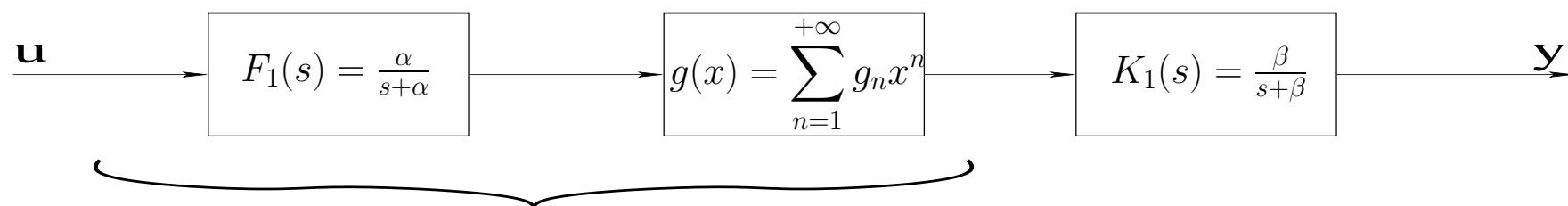
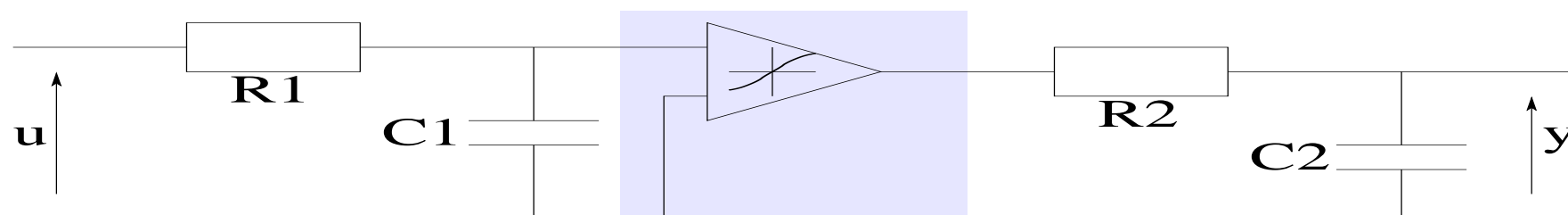
Cas 2 :



$$h_n(t_1, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(\tau_1, \dots, \tau_n) f_1(t_1 - \tau_1) \dots f_1(t_n - \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n$$

$$H_n(s_1, \dots, s_n) = G_n(s_1, \dots, s_n) F_1(s_1) \dots F_1(s_n)$$

B9- Exemple de résolution pour un circuit électrique



$$L_n(s_1, \dots, s_n) = g_n F_1(s_1) \dots F_1(s_n) \text{ avec } \alpha = 1/(R_1 C_1) \text{ et } \beta = 1/(R_2 C_2)$$

Les noyaux du système complet sont, dans le domaine de Laplace :

$$\begin{aligned} H_n(s_1, \dots, s_n) &= K_1(s_1 + \dots + s_n) L_n(s_1, \dots, s_n) \\ &= K_1(s_1 + \dots + s_n) g_n F_1(s_1) \dots F_1(s_n) \\ H_n(s_1, \dots, s_n) &= \frac{\beta}{s_1 + \dots + s_n + \beta} \cdot \frac{g_n \alpha^n}{(s_1 + \alpha) \dots (s_n + \alpha)} \end{aligned}$$

B10- Exemple et Remarques

Dans le domaine temporel, on trouve (pour $t_1, \dots, t_n > 0$)

$$h_n(t_1, \dots, t_n) = g_n e^{-\alpha(t_1 + \dots + t_n)} \cdot \frac{e^{(n\alpha - \beta) \min(t_1, \dots, t_n)} - 1}{n\alpha - \beta}$$

Remarques :

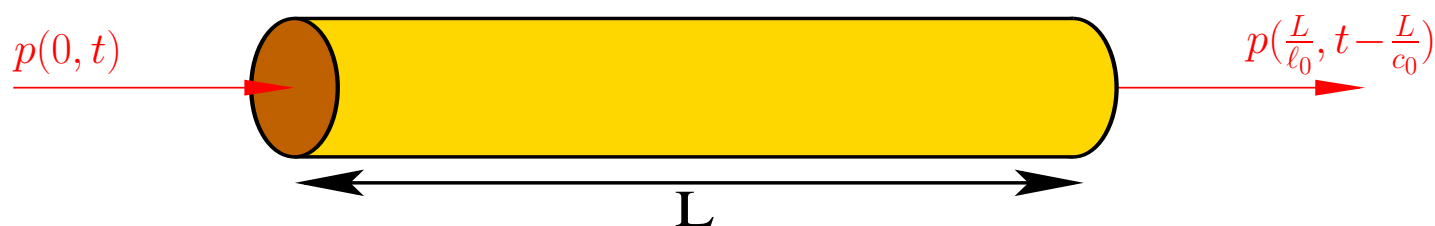
Les séries de Volterra décrivent une dynamique NL autour d'un point d'équilibre.

Mais elles ne modélisent **ni les bifurcations ni les hystérésis**.

**EDP non linéaire avec
contrôle de dimension 1**

C1- Problème posé : brillance au nuances fortissimo

Propagation acoustique d'une onde plane progressive $p(\ell, \tau)$:



Modèle : EDP NL [Menguy, Gilbert 2000]

$$\partial_\ell p(\ell, \tau) = \underbrace{p(\ell, \tau) \partial_\tau p(\ell, \tau)}_{\text{Non-linéarité}} - \underbrace{\alpha_0 \partial_\tau^2 p(\ell, \tau)}_{\text{pertes visco-thermiques}}$$

avec $\begin{cases} \tau = t - z/c_0 \\ \ell \propto z \end{cases}$

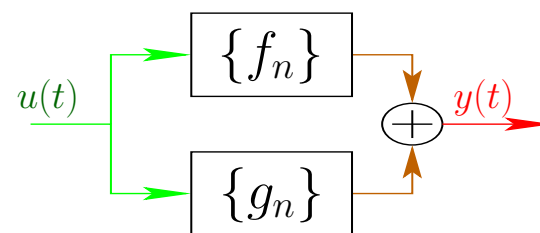
Validité : $|p| < 160$ dB SPL **VS** 110 dB pour ppgt° lin.

But : Représenter le tube par un *série de Volterra*

C2- SÉRIES DE VOLTERRA : interconnexion de systèmes

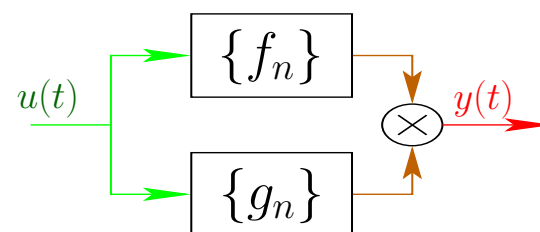
SOMME de 2 systèmes : $\rho_h = \min(\rho_f, \rho_g)$

$$H_n(s_1, \dots, s_n) = F_n(s_1, \dots, s_n) + G_n(s_1, \dots, s_n)$$



PRODUIT de 2 systèmes : $\rho_h = \min(\rho_f, \rho_g)$

$$H_n(s_1, \dots, s_n) = \sum_{p=1}^{n-1} F_p(s_1, \dots, s_p) G_{n-p}(s_{p+1}, \dots, s_n)$$



CASCADE (Volterra+linéaire) : $\rho_h = \rho_f$

$$H_n(s_1, \dots, s_n) = F_n(s_1, \dots, s_n) G_1(s_1 + \dots + s_n)$$



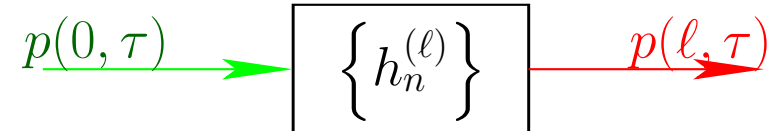
C3- NOYAUX de (S) : Éq. satisfaite par les noyaux

Éq. de Menguy & Gilbert :

$$\partial_\ell p + \alpha_0 \partial_\tau^{\frac{1}{2}} p = p \partial_\tau p$$

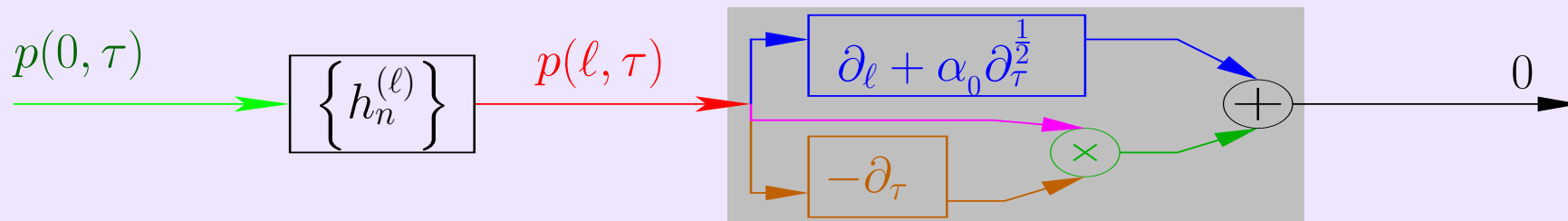
(ℓ : var. spatiale, τ : var. temporelle)

Syst. de Volterra :



(ℓ : paramètres des noyaux)

Équation satisfaite par les noyaux $H_n^{(\ell)}(s_1, \dots, s_n)$:



$$\begin{aligned} \partial_\ell H_n^{(\ell)}(s_1, \dots, s_n) + \alpha_0 \sqrt{s_1 + \dots + s_n} H_n^{(\ell)}(s_1, \dots, s_n) \\ = \sum_{p=1}^{n-1} \left[(s_1 + \dots + s_p) \underbrace{H_p^{(\ell)}(s_1, \dots, s_p) H_{n-p}^{(\ell)}(s_{p+1}, \dots, s_n)}_{\text{ordres} < n} \right] \end{aligned}$$

C4- NOYAUX de (S) : Éq. satisfaite par les noyaux

Équation Differentielle Ordinaire : $\forall n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \partial_\ell H_n^{(\ell)}(s_1, \dots, s_n) + \alpha_0 \sqrt{s_1 + \dots + s_n} H_n^{(\ell)}(s_1, \dots, s_n) \\ = \sum_{p=1}^{n-1} (s_1 + \dots + s_p) \underbrace{H_p^{(\ell)}(s_1, \dots, s_p) H_{n-p}^{(\ell)}(s_{p+1}, \dots, s_n)}_{\text{ordres} < n} \end{aligned}$$

(ℓ : variable, s_p : paramètres)

Conditions aux limites : $\ell = 0 \implies \boxed{p(0, \tau) \rightarrow \{h_n^{(\ell)}\} \xrightarrow{p(\ell, \tau)} \equiv \text{Identité}}$

$$H_1^{(0)}(s_1) = 1 \quad \text{and} \quad H_n^{(0)}(s_1, \dots, s_n) = 0, \quad \forall n \geq 2$$

C5- NOYAUX DE (S) : ordres 1 et 2

$$\left. \begin{array}{l} \underline{\mathbf{n=1}} : \partial_\ell H_1^{(\ell)}(s_1) + \alpha_0 \sqrt{s_1} H_1^{(\ell)}(s_1) = 0 \\ H_1^{(0)}(s_1) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow H_1^{(\ell)}(s_1) = e^{-\alpha_0 \ell \sqrt{s_1}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \underline{\mathbf{n=2}} : \partial_\ell H_2^{(\ell)}(s_1, s_2) + \alpha_0 \sqrt{s_1 + s_2} H_2^{(\ell)}(s_1, s_2) = s_1 e^{-\alpha_0 (\sqrt{s_1} + \sqrt{s_2}) \ell} \\ H_2^{(0)}(s_1, s_2) = 0 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow H_2^{(\ell)}(s_1, s_2) = \frac{s_1}{\alpha_0} \frac{e^{-\alpha_0 \ell \sqrt{s_1 + s_2}} - e^{-\alpha_0 \ell (\sqrt{s_1} + \sqrt{s_2})}}{\sqrt{s_1} + \sqrt{s_2} - \sqrt{s_1 + s_2}}$$

C6- NOYAUX DE (S) : ordres supérieurs

Théorème :

$$H_n^{(\ell)}(s_1, \dots, s_n) = \sum_{\kappa \in \mathcal{K}_n} P_\kappa(s_1, \dots, s_{n-1}) f_\kappa^{(\ell)}(s_1, \dots, s_n) \quad \text{with} \quad f_\kappa^{(\ell)}(s_1, \dots, s_n) = \sum_{\lambda \in \Lambda_\kappa} \frac{e^{-\alpha_0 \ell \phi_\lambda(s_1, \dots, s_n)}}{A_{\kappa, \lambda}(s_1, \dots, s_n)}$$

avec $\begin{cases} \mathcal{K}_1 = \{\bullet\} & \text{et } \mathcal{K}_n = \bigcup_{p=1}^{n-1} \{\mathcal{K}_p \times \mathcal{K}_{n-p}\} & \text{(arbres binaires à } n \text{ feuilles)} \\ \Lambda_\bullet = \{w_1\} & \text{et } \Lambda_{(\kappa_1, \kappa_2)} = (\Lambda_{\kappa_1} \times \Lambda_{\kappa_2}) \cup \{w_n\} & \text{(} w_n \equiv \text{cnd. au bord)} \end{cases}$

et P_κ : polynômes, $f_\kappa^{(\ell)}$: fct. analytiques $\forall \ell, \Re(s_k) > 0$, $\text{card } \mathcal{K}_n$: nb. de Catalan.

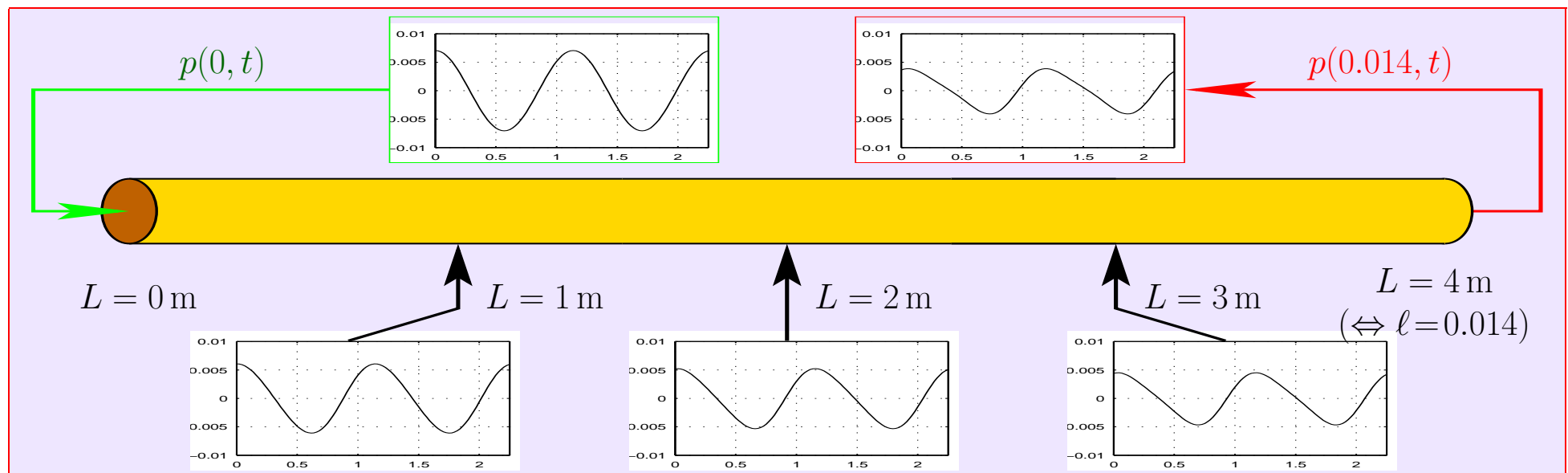
Détails des récurrences :

- (i) $P_\bullet = 1$ et $(\kappa_1, \kappa_2) \in \mathcal{K}_p \times \mathcal{K}_{n-p} \Rightarrow P_\kappa(s_1, \dots, s_{n-1}) = (s_1 + \dots + s_p) P_{\kappa_1}(s_1, \dots, s_{p-1}) P_{\kappa_2}(s_{p+1}, \dots, s_{n-1})$
- (ii) $\phi_{w_n}(s_1, \dots, s_n) = \sqrt{s_1 + \dots + s_n}$ et $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \Rightarrow \phi_\lambda(s_1, \dots, s_n) = \phi_{\lambda_1}(s_1, \dots, s_p) + \phi_{\lambda_2}(s_{p+1}, \dots, s_n)$
- (iii) $A_{\bullet, w_1}(s_1) = 1$ et $n \geq 2 \Rightarrow [A_{\kappa, w_n}(s_1, \dots, s_n)]^{-1} = - \sum_{\lambda \in \Lambda_\kappa \setminus \{w_n\}} [A_{\kappa, \lambda}(s_1, \dots, s_p)]^{-1}$
- et $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) (\neq w_n) \Rightarrow A_{\kappa, \lambda}(s_1, \dots, s_n) = -\alpha_0 A_{\kappa_1, \lambda_1}(s_1, \dots, s_p) A_{\kappa_2, \lambda_2}(s_{p+1}, \dots, s_n) [\phi_\lambda(s_1, \dots, s_n) - \sqrt{s_1 + \dots + s_n}]$

C7- SIGNAUX PERIODIQUES : simulation temporelle

$$u(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega\tau} \longrightarrow \{h_n\} \longrightarrow y(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k e^{ik\omega\tau}$$

avec $d_k = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{\substack{k_1, \dots, k_n = -\infty \\ k_1 + \dots + k_n = k}}^{+\infty} c_{k_1} \dots c_{k_n} H_n(ik_1\omega, \dots, ik_n\omega).$

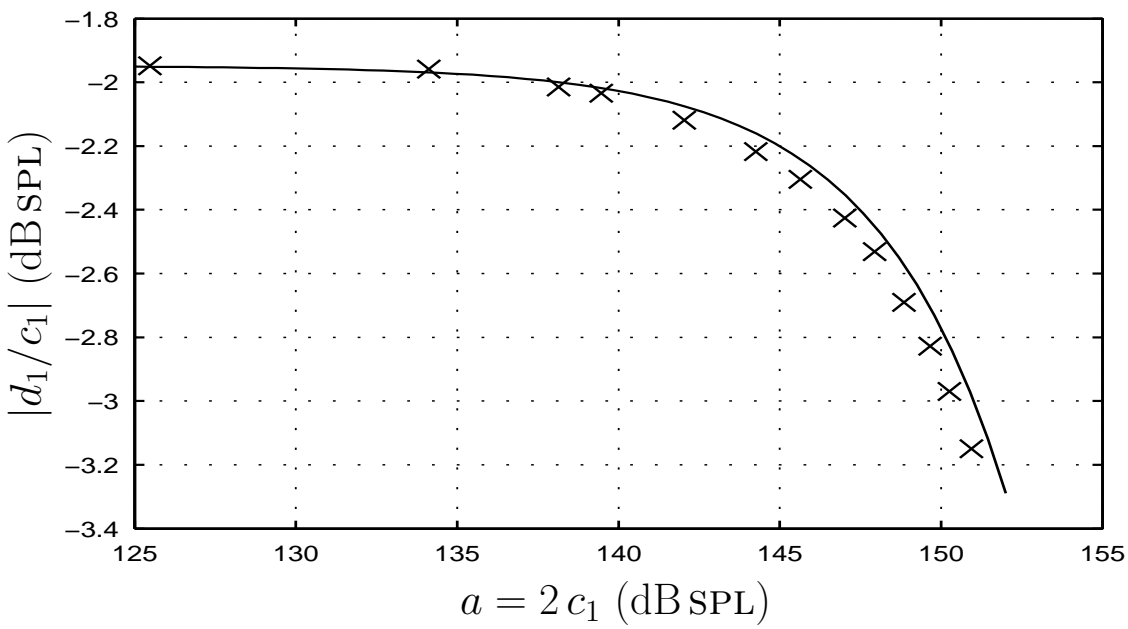


$f = 440 \text{ Hz}$, $a \equiv 154 \text{ dB SPL}$, $R_0 = 5.6 \text{ mm}$, et constantes physiques typiques.

C8- SIGNAUX PERIODIQUES : Confrontation aux données expérimentales

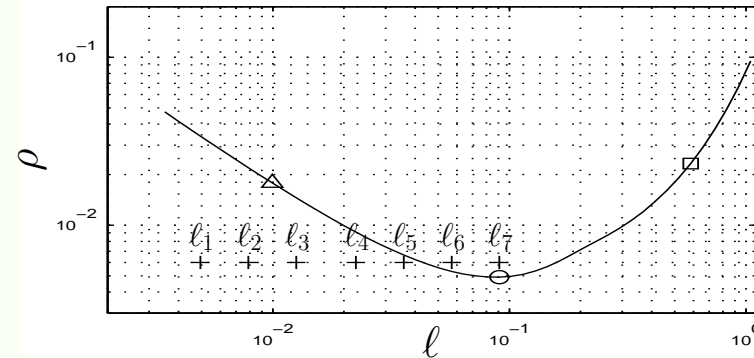
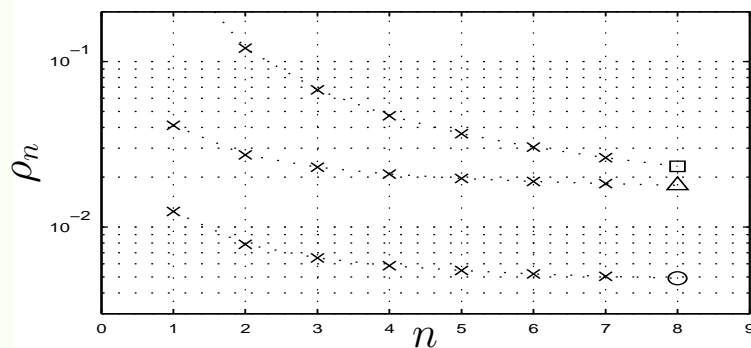
Ratio des amplitudes du fondamental sortie/entrée $|d_1/c_1|$:

($F = 2$ kHz, $R_0 = 29$ mm, $L = 4.98$ m, [Menguy, Gilbert])

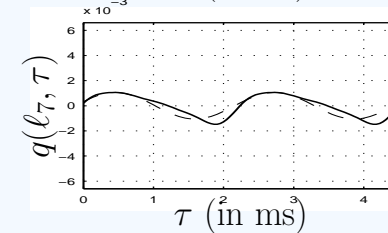
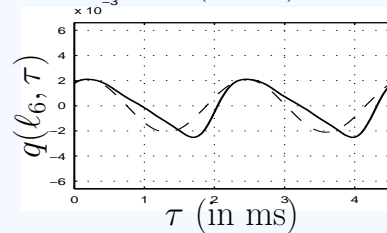
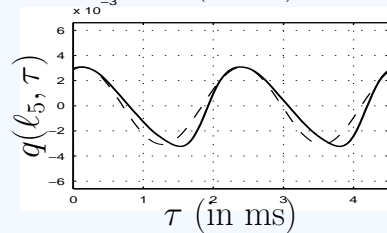
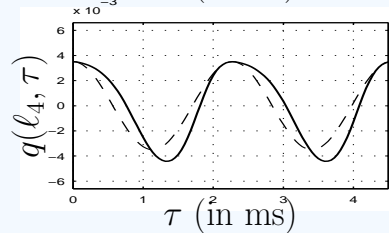
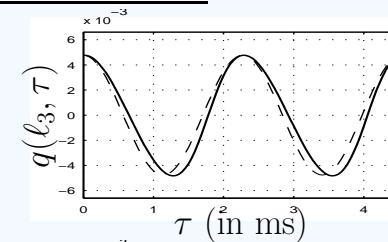
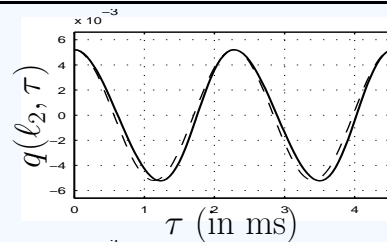
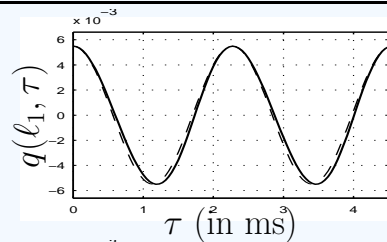
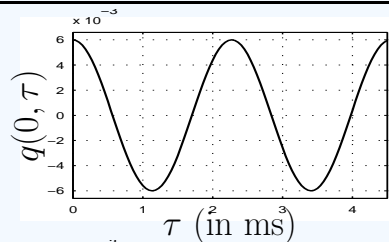


C9- Convergence et troncature (N=4)

Rayon de convergence estimé par $\rho_n = |H_n(i\omega, \dots, i\omega)/H_{n+1}(i\omega, \dots, i\omega)|$, $n \rightarrow +\infty$:

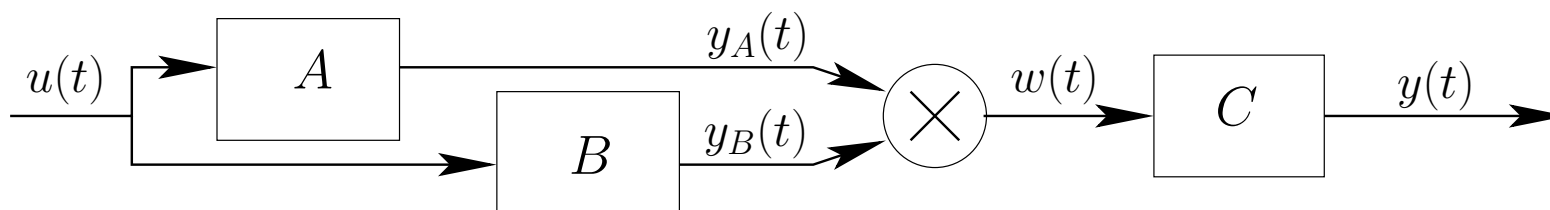


Simulations pour les longueurs $l = 0, l_1, \dots, l_7$ (0m à 26m) :



C10- Vers une application faible coût

Un exemple simple : $H_2(s_1, s_2) = A(s_1) B(s_2) C(s_1 + s_2)$



→ Simulation de 3 filtres et 1 multiplication

Cas présent : (stage [Smet])

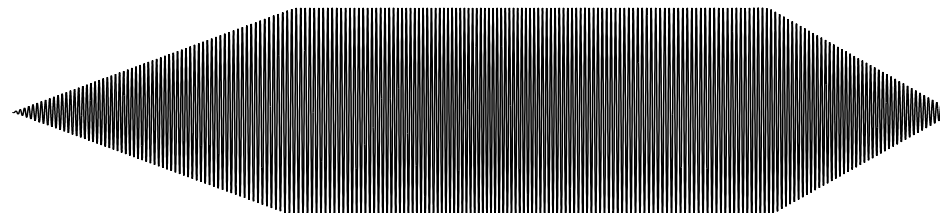
- Représentation diffusives multi-variables → bien posé mais lourd
- Décompositions structurées filtres/multiplications → satisfaisant

Construction d'une simulation numérique (H_1, H_2) :

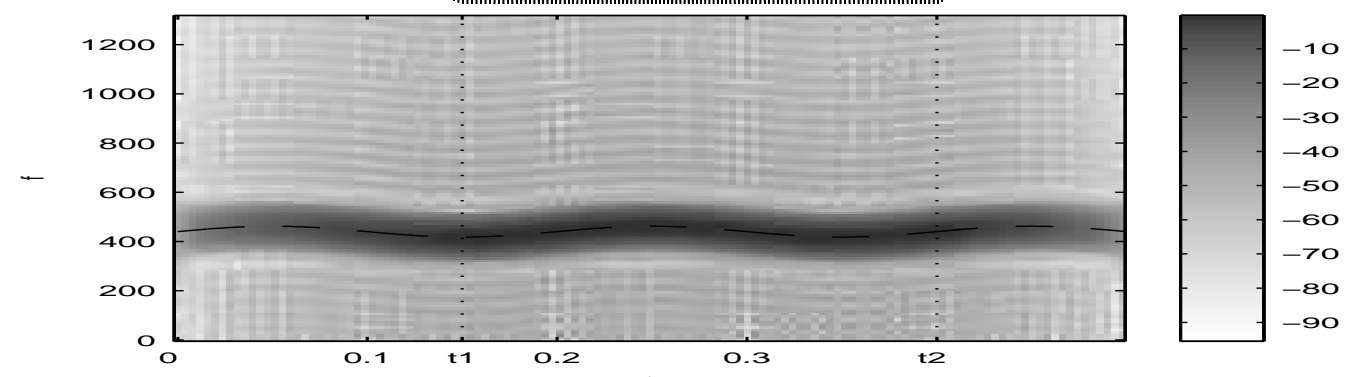
exemple sonore [linéaire, 150dB, 160dB, 170dB]

C11- Exemple de signal non stationnaire ($f_{moy} = 440$ Hz, $a_{max} \equiv 154$ dB SPL, $R_0 = 5.6$ mm)

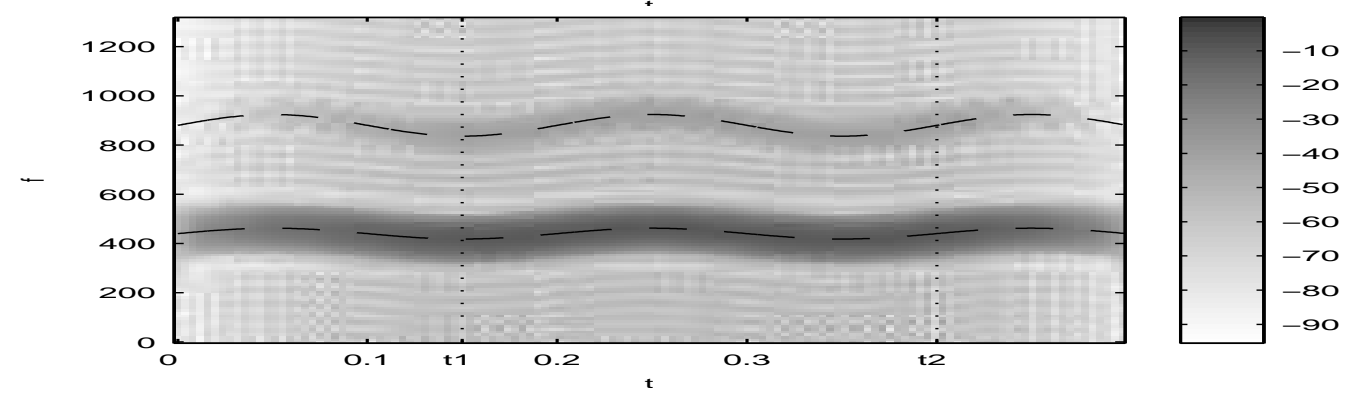
signal d'entrée :



spectro. de l'entrée :



spectro. de la sortie :



**Extension au cas de contrôles
de dimensions supérieures**

D1- Problème posé et principe

Problème : l'entrée devient $u(\vec{x}, t)$ pour $(\vec{x}, t) \in \Gamma \times \mathbb{R}$

Principe :

1- Décomposer u sur une base spatiale : $u(\vec{x}, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n(t) \phi_n(\vec{x})$

2- Etendre les séries de Volterra au cas de multi-entrées $u_k(t)$

$$y(\vec{x}, t) = \sum_{\underline{m} \in \mathbb{M}} \int \dots \int_{-\infty}^{+\infty} h_{\underline{m}}^{(\vec{x})}(t_1, \dots, t_m) u_{\nu_{\underline{m}}(1)}(t - t_1) \dots u_{\nu_{\underline{m}}(m)}(t - t_m) dt_1 \dots dt_m$$

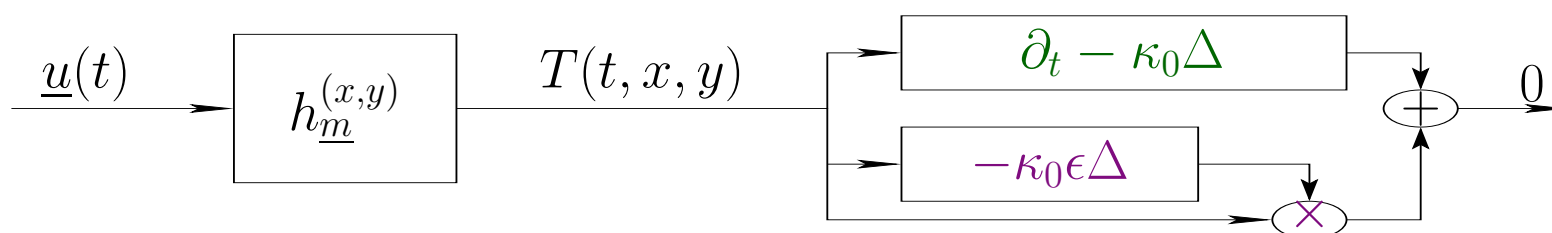
À un multi-index $\underline{m} = (1, 0, 0, 2, 0, \dots)$ correspond $u_0(t - t_1)u_3(t - t_2)u_3(t - t_3)$.

On a $\underline{m} = (m_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{M} = \{ \underline{m} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \exists N \text{ tq. } m_N \neq 0 \text{ et } n > N \Rightarrow m_n = 0 \}$

3- Etendre les lois d'interconnexion aux noyaux multi-index $h_{\underline{m}}^{(\vec{x})}(t_1, \dots, t_m)$

D2- Un exemple d'une équation de diffusion

Soit une plaque rectangulaire $X \times Y$ régie par $\partial_t T = \kappa_0(1 + \epsilon T)\Delta T$, $\forall (x, y) \in]0, X[\times]0, Y[$ avec $\partial_y T = u(t, x)$, $\forall (x, y) \in [0, X] \times \{Y\}$ et flux nul aux autres bords.



$$(s_1 + \dots + s_m) H_{\underline{m}}^{(x,y)}(\underline{s}_m) - \kappa_0 \Delta H_{\underline{m}}^{(x,y)}(\underline{s}_m) - \underbrace{\kappa_0 \epsilon \sum_{(\hat{m}, \tilde{m}) \in \mathbb{M}_m} \Delta H_{\hat{m}}^{(x,y)}(\hat{\underline{s}}_{\hat{m}, \tilde{m}}) H_{\tilde{m}}^{(x,y)}(\tilde{\underline{s}}_{\hat{m}, \tilde{m}})}_{\text{noyaux d'ordre } < \underline{m}} = 0,$$

Une résolution analytique des **EDP linéaires** conduit à une écriture de la forme

$$H_{\underline{m}}^{(x,y)}(\underline{s}_m) = \sum_{a \in \mathcal{A}_m} \sum_{E=(\mathbf{n}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta}) \in \mathcal{E}_a} \epsilon^{m-1} K_E^a(\underline{s}_m) \psi_{|\mathbf{n}, \boldsymbol{\xi}|}(x) \cosh(\Lambda_{\mathbf{n}, \boldsymbol{\zeta}}^a(\underline{s}_m) y)$$

CONCLUSION

E- Conclusion

Résolution d'EDP faiblement non linéaires par les séries de Volterra :

Cas	Systeme NL	Résolution (noyaux de Volterra)
classique	E.D.O. NL	<i>Algébrique</i>
présent	E.D.P. NL	E.D.O. ou E.D.P. <i>Linéaire</i>

- Nouvelle méthode :
- Alternative à la *méthode des perturbations* (en pratique, conserver les premiers noyaux suffit)
- *Outil de décomposition hamonique* efficace,
- *Réalisations temporelles faible coût* (appli. en temps-réel)

Perspectives et extensions :

- *Rayon de convergence* explicite et *erreur garantie* (EDO)
- Applications aux *systèmes de dim. infinie* : entrée= $u(\vec{x}, t)$