13 mars 2006

Introduction à la théorie quantique des champs phénoménologique:

2. Applications de la représentation de Mellin-Barnes et des sommes harmoniques en théorie des champs.

David GREYNAT

CPT Marseille

Première partie

Représentation de Mellin-Barnes et développements asymptotiques de diagrammes de Feynman

S.Friot, D.Greynat et E.de Rafael, ***Physics Letters B 628:73-84*** (2005)

S.Friot, D.Greynat et E.de Rafael, ***Travail en cours***

Motivations

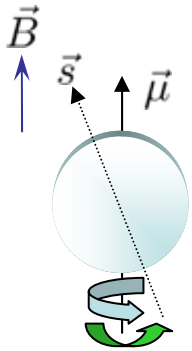
- Face à la complexité des calculs exacts des diagrammes de Feynman en théorie des champs perturbative, on peut espérer obtenir des simplifications en cherchant à calculer des développements asymptotiques (différentes échelles).

- L'anomalie magnétique des leptons est un très bon laboratoire à la fois théorique et expérimental pour contrôler le bien fondé de ces développements

- Utilisation des propriétés de la transformée de Mellin

Anomalie magnétique du muon

ou moment magnétique anormal du muon



anomalie

Formule de Landé: $\vec{\mu} = g\frac{e}{2m}\vec{s}$

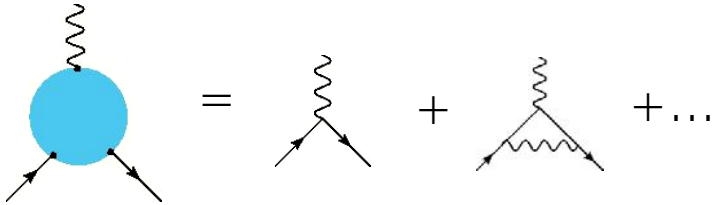
Facteur de Landé

En théorie quantique: $g = 2$

En théorie quantique des champs: $g \neq 2 \quad \Longrightarrow g = 2(1 + a)$

Anomalie magnétique

En théorie quantique des champs, le calcul de l'anomalie fait intervenir la fonction à trois points:



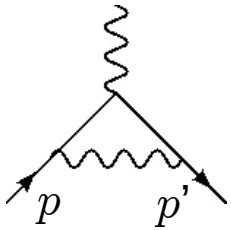
$\longrightarrow a$

$\mathbb{P}$

Projecteur sur une des structures tensorielles qui permet d'isoler l'anomalie

L'ordre le plus bas: un exemple détaillé

Premier calcul perturbatif de l'histoire Schwinger 1948



$$\Gamma_\nu = (-ie)^2\, i\, \overline{u}(p') \int \frac{d^{4-\epsilon}k}{(2\pi)^{4-\epsilon}} \frac{\gamma_\alpha(\not{p}' + \not{k} + m_\mu)\gamma_\nu(\not{p} + \not{k} + m_\mu)\gamma^\alpha}{\left[(p'+k)^2 - m_\mu^2\right]\left[(p+k)^2 - m_\mu^2\right] k^2}\, u(p)$$

Le numérateur se simplifie comme

$$\text{Num.}_\nu = \left[(2-\epsilon)k^2 + 4(p+p')\cdot k + 4\,p\cdot p'\right]\,\gamma_\nu - 4(p+p')_\nu \not{k} - 2(2-\epsilon)k_\nu \not{k} + 4m_\mu k_\nu\ .$$

Paramétrage ou « paramétrisation » de Feynman:

$$\frac{1}{abc} = 2\int_0^1 dx\, x \int_0^1 dy \frac{1}{[(a-b)xy + (b-c)x + c]^3} = 2\int_0^1 dx\, x \int_0^1 dy \frac{1}{D^3}$$

$$\begin{cases} a &= (p'+k)^2 - m_\mu^2 = 2p'\cdot k + k^2 \\ b &= (p+k)^2 - m_\mu^2 = 2p\cdot k + k^2 \\ c &= k^2 \end{cases}$$

$$D = [k + (xp + xyq)]^2 - \underbrace{\left[x^2(p+yq)^2\right]}_{\doteq\, \mathbb{R}^2} \qquad q = p\text{-}p'$$

Où: $$\mathbb{R}^2 = x^2\left[m_\mu^2 + y(y-1)q^2\right]$$

$$\Gamma_\nu = (-ie)^2\, i\, 2\int_0^1 dx\, x\int_0^1 dy\,\overline{u}(p')\int\frac{d^{4-\epsilon}k}{(2\pi)^{4-\epsilon}}$$

$$\times\frac{\left[(2-\epsilon)k^2+4(p+p')\cdot k+4\,p\cdot p'\right]\gamma_\nu-4(p+p')_\nu\not{k}-2(2-\epsilon)k_\nu\not{k}+4m_\mu k_\nu}{\left[[k+(xp+xyq)]^2-\mathbb{R}^2\right]^3}u(p)$$

On effectue le changement de variable: $\widetilde{k} = k + (xp + xyq)$

Avec le projecteur on sélectionne la partie qui contribue à l'anomalie:

$$a_\mu = (-ie)^2\, i\, 2\int_0^1 dx\, x\int_0^1 dy\int\frac{d^{4-\epsilon}\widetilde{k}}{(2\pi)^{4-\epsilon}}\frac{2m_\mu^2\, x\,[(2-\epsilon)x-2]}{[\widetilde{k}^2-\mathbb{R}^2]^3}$$

On peut calculer l'intégrale sur les impulsions (intégrales hypersphériques)

$$\mu^\epsilon\int\frac{d^{4-\epsilon}\widetilde{k}}{(2\pi)^{4-\epsilon}}\frac{1}{[\widetilde{k}^2-\mathbb{R}^2]^3} = -\mu^\epsilon\frac{i}{(2\sqrt{\pi})^{4-\epsilon}}\frac{\Gamma(1+\frac{\epsilon}{2})}{\Gamma(3)}(\mathbb{R}^2)^{-1-\frac{\epsilon}{2}} \underset{\epsilon\to 0}{=} -\frac{i}{32\pi^2\mathbb{R}^2}$$

On obtient la représentation paramétrique de l'anomalie à l'ordre le plus bas:

$$a_\mu = (-ie)^2\, i\left(-\frac{i}{32\pi^2}\right)8\int_0^1 dx\,(x-1) = \boxed{\frac{1}{2}\frac{\alpha}{\pi}}$$

❏ Comme nous venons de le voir ce genre de calcul a nécessité tout un arsenal d'outils différents, hélas, cela n'empêche pas les calculs de devenir de plus en plus complexes pour les diagrammes d'ordre plus élevé.

❏ Principale difficulté: intégrales paramétriques (I.P.) impossibles à calculer exactement.

➟ Méthode systématique de développement asymptotique des I.P.

[S.Friot, D.Greynat et E.de Rafael, ***Physics Letters B 628:73-84*** (2005)]

1. Paramétrisation de Feynman
2. Représentation de Mellin-Barnes
3. Théorème de « Converse-Mapping »

[Ph. Flajolet, X. Gourdon et Ph. Dumas '95]

Transformée de Mellin

$$\mathcal{M}[f](s) \doteq \int_0^\infty dx\; x^{s-1}\; f(x)$$

Si f est intégrable et que: $f(x) \underset{x\to 0^+}{=} \mathcal{O}(x^{-\alpha})$ et $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}(x^{-\beta})$

Alors $\mathcal{M}[f]$ est analytique dans $\alpha < \mathrm{Re}\, s < \beta$ (bande fondamentale)

$$\forall c \in \langle \alpha, \beta \rangle, \qquad f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds\; x^{-s} \mathcal{M}[f](s)$$

- Exemples

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^\nu} \qquad \mathcal{M}[f](s) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(\nu - s)}{\Gamma(\nu)} \qquad < 0, \mathrm{Re}\,\nu >$$

$$f(x) = \ln(1+x) \qquad \mathcal{M}[f](s) = \frac{\pi}{s \sin(\pi s)} \qquad < -1, 0 >$$

Théorème de Converse Mapping

Ce théorème permet de relier les singularités de la transformée de Mellin au développement asymptotique de la fonction

- Elément singulier

  Série de Laurent de f en p:

$$f(s) \underset{s\to p}{=} \boxed{\cdots + A_{-2}\frac{1}{(s-p)^2} + A_{-1}\frac{1}{s-p}} + A_0 + A_1(s-p) + \cdots$$

- Développement singulier

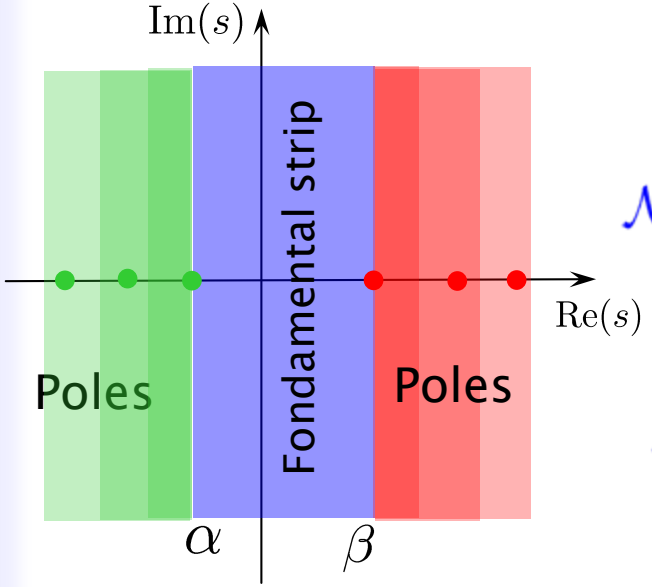
  Série formelle de tous les éléments singuliers sur l'ensemble des pôles.

- Exemple

$$\Gamma(s) \boxed{\asymp} \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{s+n} \ .$$

Théorème de Converse Mapping

[Doetsch '55] [Flajolet *et al.* '95]



Développement singulier

$$\mathcal{M}\left[f(x)\right]_{\text{right}}(s) \asymp \sum_{p>\beta} \sum_{n}^{N(p)} c_{p,n} \frac{1}{(s-p)^n}$$

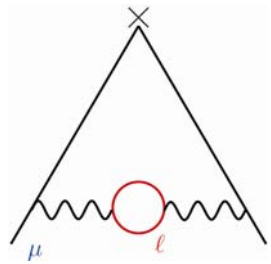
$$\mathcal{M}\left[f(x)\right]_{\text{left}}(s) \asymp \sum_{p<\alpha} \sum_{n}^{N(p)} d_{p,n} \frac{1}{(s+p)^n}$$

Le théorème donne

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\sum_{p>\beta} \sum_{n}^{N(p)} c_{p,n}\, x^{-p} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \ln^{n-1} x$$

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \sum_{p<\alpha} \sum_{n}^{N(p)} d_{p,n}\, x^{p} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \ln^{n-1} x$$

Exemple de calcul à deux boucles



$$a_\mu = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \int_0^1 \frac{dx}{x}(1-x)\Pi_R^{(\ell)}\left(-\frac{x^2}{1-x}m_\mu^2\right)$$

$$= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \int_0^1 \frac{dx}{x}(1-x)(2-x)\int_0^1 dy \frac{y(1-y)}{1+\frac{m_\ell^2}{m_\mu^2}\frac{1-x}{x^2 y(1-y)}}$$

Lautrup - de Rafael '69

On utilise alors la représentation : $\frac{1}{1+X} = \frac{1}{2i\pi}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds\, X^{-s}\,\frac{\pi}{\sin \pi s}$ pour $0 < c < 1$

$$\Longrightarrow a_\mu = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \frac{1}{2i\pi}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds \left(\frac{m_\ell^2}{m_\mu^2}\right)^{-s} \frac{\pi}{\sin \pi s}\int_0^1 dx x^{2s-1}(1-x)^{1-s}(2-x)\int_0^1 dy y^{1+s}(1-y)^{1+s}$$

$$= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \frac{1}{2i\pi}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds \left(\frac{m_\ell^2}{m_\mu^2}\right)^{-s} \frac{(1-s)}{(2+s)(1+2s)(3+2s)}\left(\frac{\pi}{\sin \pi s}\right)^2$$

$0 < c < 1$

$$a_\mu = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds \left(\frac{m_l^2}{m_\mu^2}\right)^{-s} \frac{(1-s)}{(2+s)(1+2s)(3+2s)} \left(\frac{\pi}{\sin \pi s}\right)^2$$

$0 < c < 1$

- $\frac{m_\ell^2}{m_\mu^2} \gg 1$: Développement singulier à droite de la bande fondamentale

$$\frac{(1-s)}{(2+s)(1+2s)(3+2s)} \left(\frac{\pi}{\sin \pi s}\right)^2 \asymp \left(-\frac{1}{45}\right) \frac{1}{s-1} + \left(-\frac{1}{140}\right) \frac{1}{(s-2)^2} + \left(-\frac{9}{19600}\right) \frac{1}{s-2} + \cdots$$

$$a_\mu = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \left[\frac{1}{45} \frac{m_\mu^2}{m_\ell^2} + \frac{1}{140} \left(\frac{m_\mu^2}{m_\ell^2}\right)^2 \ln\left(\frac{m_\ell^2}{m_\mu^2}\right) + \frac{9}{19600} \left(\frac{m_\mu^2}{m_\ell^2}\right)^2 + \cdots\right]$$

- $\frac{m_\ell^2}{m_\mu^2} \ll 1$: Développement singulier à gauche de la bande fondamentale

$$\frac{(1-s)}{(2+s)(1+2s)(3+2s)} \left(\frac{\pi}{\sin \pi s}\right)^2 \asymp \left(\frac{1}{6}\right) \frac{1}{s^2} + \left(-\frac{25}{36}\right) \frac{1}{s} + \left(\frac{\pi^2}{4}\right) \frac{1}{s-\frac{1}{2}} + \cdots$$

$$a_\mu = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \left[\frac{1}{6} \ln\left(\frac{m_\mu^2}{m_\ell^2}\right) - \frac{25}{36} + \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{m_\ell}{m_\mu}\right) + \cdots\right]$$

On vérifie ainsi très facilement les calculs de [Li et al. '93]

$$a_\mu = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds \left(\frac{m_l^2}{m_\mu^2}\right)^{-s} \frac{(1-s)}{(2+s)(1+2s)(3+2s)} \left(\frac{\pi}{\sin \pi s}\right)^2$$

$0 < c < 1$

- $\frac{m_\ell^2}{m_\mu^2} \gg 1$: Développement singulier à droite de la bande fondamentale

$$\frac{(1-s)}{(2+s)(1+2s)(3+2s)} \left(\frac{\pi}{\sin \pi s}\right)^2 \asymp \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{s-(n+1)} \frac{-45+28n^2+8n^3}{[(3+n)(3+2n)(5+2n)]^2} + \frac{1}{[s-(n+1)]^2} \frac{(-n)}{(3+n)(3+2n)(5+2n)}\right]$$

$$a_\mu^{\text{v.p.}} \underset{m_\ell \gg m_\mu}{\sim} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{m_\mu^2}{m_\ell^2}\right)^{n+1} \left[\frac{45-28n^2-8n^3}{[(3+n)(3+2n)(5+2n)]^2} + \frac{n}{(3+n)(3+2n)(5+2n)} \ln \frac{m_\ell^2}{m_\mu^2}\right]$$

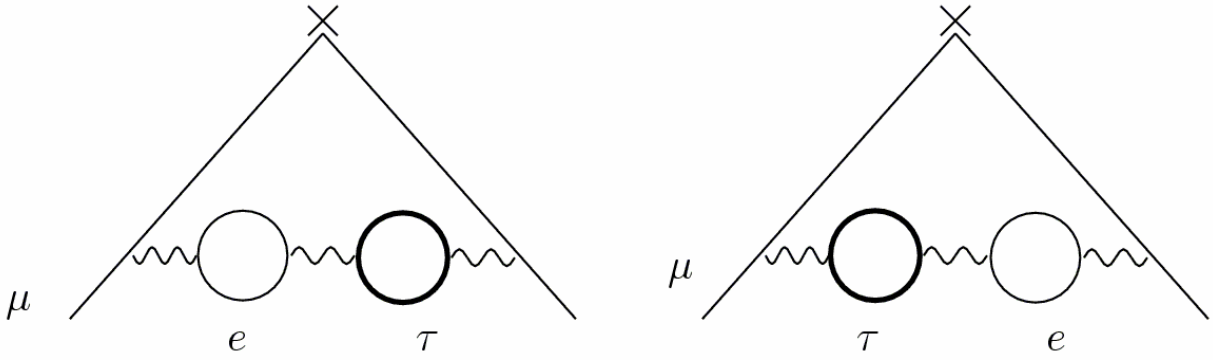
- $\frac{m_\ell^2}{m_\mu^2} \ll 1$: Développement singulier à gauche de la bande fondamentale

$$\frac{(1-s)}{(2+s)(1+2s)(3+2s)} \left(\frac{\pi}{\sin \pi s}\right)^2 \asymp \left(\frac{1}{6}\right) \frac{1}{s^2} + \left(-\frac{25}{36}\right) \frac{1}{s} + \left(\frac{\pi^2}{4}\right) \frac{1}{s-\frac{1}{2}} + \cdots$$

$$a_\mu = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \left[\frac{1}{6} \ln \left(\frac{m_\mu^2}{m_\ell^2}\right) - \frac{25}{36} + \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{m_\ell}{m_\mu}\right) + \cdots\right]$$

On vérifie ainsi très facilement les calculs de [Li et al. '93]

Exemple de calcul à trois boucles



$$a_\mu^{\text{v.p.}}(e\,,\tau) = \frac{\alpha}{\pi}\int_0^1 dx(1-x)\;2\;\left[-e^2\Pi_{\rm R}^{(e)}\left(\frac{-x^2}{1-x}m_\mu^2\right)\right]\left[-e^2\Pi_{\rm R}^{(\tau)}\left(\frac{-x^2}{1-x}m_\mu^2\right)\right]$$

$$(-ie)^2\Pi_{\rm R}^{(l)}\left(\frac{-x^2}{1-x}m_\mu^2\right) = -\frac{\alpha}{\pi}\int_0^1 dz_l\;2z_l\;(1-z_l)\;\ln\left(1+\frac{x^2}{1-x}\frac{m_\mu^2}{m_l^2}\;z_l\;(1-z_l)\right)$$

On utilise la représentation:

$$\ln\left(1+\frac{m_\mu^2}{m_l^2}X_l\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds\left(\frac{m_\mu^2}{m_l^2}\right)^{-s}[X_l]^{-s}\,\frac{\pi}{s\sin(\pi s)}$$

$$c = \mathrm{Re}(s)\;\in\,]-1,0[$$

Représentation de Mellin-Barnes:

$$\mathcal{M}[a_\mu^{\text{v.p.}}](s,t) = 8\,\frac{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}{s}\,\frac{\Gamma(t)\Gamma(1-t)}{t}\,\frac{\left[\Gamma(2-s)\Gamma(2-t)\right]^2}{\Gamma(4-2s)\Gamma(4-2t)}\,\frac{\Gamma(1-2s-2t)\Gamma(2+s+t)}{\Gamma(3-s-t)}$$

Nous appliquons le théorème de Converse Mapping de façon « séquentielle »:

$$\mathrm{a}_\mu^{\text{2v.p.}}\left(\frac{m_e^2}{m_\mu^2},\frac{m_\tau^2}{m_\mu^2}\right) \underset{\frac{m_\mu^2}{m_\tau^2}\to 0}{\sim} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 \frac{1}{2i\pi}\int_{c_s-i\infty}^{c_s+i\infty} ds \left[\left(\frac{m_\mu^2}{m_e^2}\right)^{-s}\sum_{n\geq 1} A_n(s)\left(\frac{m_\mu^2}{m_\tau^2}\right)^n + \left(\frac{m_\tau^2}{m_e^2}\right)^{-s}\sum_{n\geq 0} B_n(s)\left(\frac{m_\mu^2}{m_\tau^2}\right)^{n+2}\right].$$

avec:

$$\begin{pmatrix} A_n(s) \\ B_n(s) \end{pmatrix} \doteq 8\,\frac{\Gamma(s)\Gamma(1-s)\Gamma^2(2-s)}{s\Gamma(4-2s)} \begin{pmatrix} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\,\frac{\Gamma(2+n)\Gamma(2+n)}{\Gamma(4+2n)}\,\frac{\Gamma(1-2s+2n)\Gamma(2+s-n)}{\Gamma(3-s+n)} \\ \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\,\frac{\Gamma(-2-n-s)\Gamma(3+n+s)\Gamma(4+n+s)\Gamma(4+n+s)\Gamma(5+2n)}{(s+n+2)\Gamma(8+2n+2s)\Gamma(5+n)} \end{pmatrix}$$

$$a_\mu^{\text{v.p.}} = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 \left\{ -\frac{4\pi^2}{45}\frac{m_\mu^2}{m_\tau^2}\left(\frac{m_\mu^2}{m_e^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \right.$$
$$+ \sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 0} \frac{2^{2n}\Gamma^2(2+n)}{n\Gamma(4+2n)} \left(\frac{m_\mu^2}{m_\tau^2}\right)^n \left(\frac{m_\mu^2}{m_e^2}\right)^{-k} \left[-\frac{1}{2}A_{n,k}^{(3)} \ln^2\left(\frac{m_\mu^2}{m_e^2}\right) + A_{n,k}^{(2)} \ln\left(\frac{m_\mu^2}{m_e^2}\right) - A_{n,k}^{(1)}\right]$$
$$\left. - \sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0} \frac{\Gamma(5+2n)}{n!\Gamma(5+n)} \left(\frac{m_\mu^2}{m_\tau^2}\right)^{n+2} \left(\frac{m_\tau^2}{m_e^2}\right)^{-k} \left[-\frac{1}{2}B_{n,k}^{(3)} \ln^2\left(\frac{m_\tau^2}{m_e^2}\right) + B_{n,k}^{(2)} \ln\left(\frac{m_\tau^2}{m_e^2}\right) - B_{n,k}^{(1)}\right] \right\}$$

$$A_{n,1}^{(3)} = 0$$
$$A_{n,1}^{(2)} = \frac{2\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2+n)}(n-2)(n-1)$$
$$A_{n,1}^{(1)} = A_{n,1}^{(2)}\left[\frac{3-2n}{(n-2)(n-1)} + \psi\left(\frac{3}{2}\right) - \psi\left(n-\frac{1}{2}\right) + \psi(2+n) - \psi(2)\right]$$

$$A_{n,n-1}^{(3)} = 0$$
$$A_{n,n-1}^{(2)} = (-1)^n \frac{\sqrt{\pi}(2-n)}{12\,\Gamma(n)\Gamma\left(\frac{7}{2}-n\right)}$$
$$A_{n,n-1}^{(1)} = A_{n,n-1}^{(2)}\left[\frac{n-3}{2-n} + \psi\left(\frac{7}{2}-n\right) - \psi\left(\frac{3}{2}\right) + \psi(4) - \psi(n)\right]$$

$$A^{(3)}_{n,n} = 0$$

$$A^{(2)}_{n,n} = -(-1)^n \frac{\sqrt{\pi}(n-1)}{2\,(n!)\,\Gamma\left(\frac{5}{2}-n\right)}$$

$$A^{(1)}_{n,n} = A^{(2)}_{n,n}\left[\frac{n}{n-1} + \psi\left(\frac{5}{2}-n\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) + \psi\,(3) - \psi(n+1)\right]$$

$$A^{(3)}_{n,k} = (-1)^k \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+n-k\right)}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(\frac{5}{2}-k\right)\Gamma(3-k+n)}(n-1-k)(n-k)(1-k)$$

$$A^{(2)}_{n,k} = A^{(3)}_{n,k}\left[\frac{1-n-n^2+4nk-3k^2}{(n-1-k)(n-k)(1-k)} + \psi\left(\frac{5}{2}-k\right) - \psi\left(\frac{1}{2}+n-k\right) + \psi\,(3+n-k) - \psi(k+1)\right]$$

$$A^{(1)}_{n,k} = \frac{1}{2}A^{(3)}_{n,k}\left\{\pi^2 + \left[\frac{1-n-n^2+4nk-3k^2}{(n-1-k)(n-k)(1-k)} + \psi\left(\frac{5}{2}-k\right) - \psi\left(\frac{1}{2}+n-k\right) + \psi\,(3+n-k) - \psi(k+1)\right]^2 \right.$$
$$\left. - \frac{1}{(k-n)^2} - \frac{1}{(k-1)^2} - \frac{1}{(k-n+1)^2} - \psi'\left(\frac{5}{2}-k\right) + \psi'\left(\frac{1}{2}+n-k\right) - \psi'\,(3+n-k) - \psi'(1+k)\right\}$$

$$B^{(3)}_{n,1} = 0$$

$$B^{(2)}_{n,1} = \frac{8\Gamma^2(5+n)}{(n+3)\Gamma(10+2n)}$$

$$B^{(1)}_{n,1} = B^{(2)}_{n,1}\left[-\frac{21+5n}{6(n+3)} + \ln 4 + \psi\left(\frac{3}{2}\right) - 2\psi(2) + \psi(4) + 2\psi(5+n) - 2\psi(10+2n)\right]$$

$$B^{(3)}_{n,k} = \sqrt{\pi}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\frac{4^k\Gamma(3+k)\Gamma^2(4+n+k)(k-1)}{(k+2)(k+1)(k+n+2)\Gamma\left(\frac{5}{2}-k\right)\Gamma(8+2n+2k)}$$

$$B^{(2)}_{n,k} = B^{(3)}_{n,k}\left[\frac{12+5n+2(5+n)k-(2+n)k^2-2k^3}{(k-1)(1+k)(2+k)(2+n+k)}\right.$$
$$\left.+\ln 4+\psi\left(\frac{5}{2}-k\right)-2\psi(1+k)+\psi(3+k)+2\psi(4+n+k)-2\psi(8+2n+2k)\right]$$

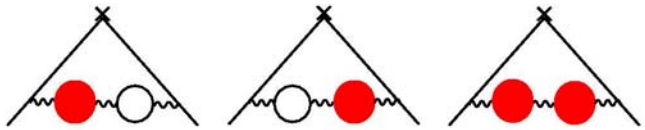
$$B^{(1)}_{n,k} = \frac{1}{2}B^{(3)}_{n,k}\left\{9\psi^2(k+1)+\pi^2+3\psi'(k+1)\right.$$
$$-6\psi(k+1)\left[\frac{12+5n+2(5+n)k-(2+n)k^2-2k^3}{(k-1)(1+k)(2+k)(2+n+k)}\right.$$
$$\left.+\ln 4+\psi\left(\frac{5}{2}-k\right)+\psi(1+k)+\psi(3+k)+2\psi(4+n+k)-2\psi(8+2n+2k)\right]$$
$$+\left[\frac{12+5n+2(5+n)k-(2+n)k^2-2k^3}{(k-1)(1+k)(2+k)(2+n+k)}\right.$$
$$\left.+\ln 4+\psi\left(\frac{5}{2}-k\right)+\psi(1+k)+\psi(3+k)+2\psi(4+n+k)-2\psi(8+2n+2k)\right]^2$$
$$-\frac{1}{(k-1)^2}+\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{1}{(k+2)^2}+\frac{1}{(k+n+2)^2}$$
$$\left.-\psi'\left(\frac{5}{2}-k\right)+\psi'(1+k)+\psi'(3+k)+2\psi'(4+n+k)-4\psi'(8+2n+2k)\right\}$$

Premier résultat complet de ce calcul à 3 boucles (après les premiers termes obtenus en 1999).

Cette formule clôt 30 ans de calculs nécessaires à l'obtention de la contribution « analytique » à trois boucles de l'anomalie (∼70 diagrammes!)…

Exemple: Insertion de polarisations hadroniques
(sous-dominantes)

[S.Friot, D.Greynat et E.de Rafael, *Travail en cours de réalisation*]



[Krause '96]

Relations de dispersion (séparation perturbatif—non perturbatif)

$$a_\mu^{\text{2pol.}} = \frac{\alpha}{\pi}\int_{4m^2}^{\infty}\frac{ds}{s}\int_{4m^2}^{\infty}\frac{dt}{t}\,\frac{1}{\pi^2}\,\text{Im}\Pi_1(s)\,\text{Im}\Pi_2(t)\int_0^1 dx\,\frac{x^4(1-x)}{\left[x^2+(1-x)\frac{t}{m_{\mu^2}}\right]\left[x^2+(1-x)\frac{s}{m_{\mu^2}}\right]}$$

Cas d'une pol. électromagnétique et d'une pol. Hadronique:

$$\int_{4m_\ell^2}^{\infty}\frac{ds}{s}\,\frac{1}{x^2+(1-x)\frac{s}{m_\mu^2}}\,\frac{1}{\pi}\text{Im}\Pi_E(s) = -\frac{1}{x^2}\Pi_E\left(-\frac{x^2}{1-x}m_\mu^2\right)$$

$$\frac{1}{1+X} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds\; X^{-s}\;\frac{\pi}{\sin(\pi s)} \qquad c=\text{Re}(s)\;\in\,]0,1[$$

$$\ln(1+X) = \frac{1}{2\pi i}\int_{d-i\infty}^{d+i\infty} du\, X^{-u}\,\frac{\pi}{u\sin(\pi u)} \qquad d=\text{Re}(u)\;\in\,]-1,0[$$

On obtient

$$a_\mu^{\text{2pol.E-H}} = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \int_{4m_\pi^2}^{\infty} \frac{dt}{t}\, \frac{1}{\pi} \mathrm{Im}\Pi_H(t) \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds \left(\frac{t}{m_\mu^2}\right)^{-s} \frac{1}{2i\pi} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} du \left(\frac{m_\mu^2}{m_\ell^2}\right)^{-u}$$
$$\times \underbrace{\frac{\pi}{\sin(\pi s)} \frac{\Gamma(2s-2u+1)\Gamma(2-s+u)}{\Gamma(3+s-u)}\, 2\, \frac{\pi}{u\sin(\pi u)} \frac{\Gamma(2-u)^2}{\Gamma(4-2u)}}_{\frac{1}{2}\mathcal{M}\left[K^{(2b)}\right](u,s)}$$

Cas de l'électron dans la pol. élect.

$$\mathcal{M}\left[K^{(2b)}\right](u,s) \underset{u\to 0,\, s\to 1}{\sim} 4\frac{1}{u^2}\frac{1}{s-1}(-1)^0(-1)\frac{\Gamma(3)\Gamma(1)}{\Gamma(4)}\frac{\Gamma(2)^2}{\Gamma(4)} = -\frac{1}{u^2}\frac{1}{s-1}\frac{2}{9}$$

Donc, par le théorème de Converse Mapping,

$$K^{(2b)}\Big|_{\text{électron}}(t) \underset{\frac{t}{m_\mu^2}\to\infty,\, \frac{m_\mu^2}{m_e^2}\to\infty}{\sim} \frac{2}{9}\frac{m_\mu^2}{t}\ln\frac{m_\mu^2}{m_e^2}$$

On obtient facilement les termes suivants du développement, ce qui permet de vérifier et d'étendre les calculs de *[Krause '96]*:

$$K^{(2b)}\Big|_{\text{électron}} \underset{\frac{t}{m_\mu^2}\to\infty,\ \frac{m_\mu^2}{m_e^2}\to\infty}{\sim} 2\frac{m_\mu^2}{t}\left\{\left(-\frac{2}{18}+\frac{1}{9}\ln\frac{m_\mu^2}{m_e^2}\right)\right.$$

$$+\frac{m_\mu^2}{t}\left(-\frac{55}{48}+\frac{\pi^2}{18}+\frac{25}{36}\ln\frac{m_\mu^2}{m_e^2}+\frac{5}{9}\ln\frac{t}{m_\mu^2}-\frac{1}{3}\ln\frac{t}{m_\mu^2}\ln\frac{m_\mu^2}{m_e^2}-\frac{1}{6}\ln^2\frac{t}{m_\mu^2}\right)$$

$$+\frac{m_\mu^4}{t^2}\left(-\frac{11299}{1800}+\frac{\pi^2}{3}+\frac{97}{30}\ln\frac{m_\mu^2}{m_e^2}+\frac{10}{3}\ln\frac{t}{m_\mu^2}-2\ln\frac{t}{m_\mu^2}\ln\frac{m_\mu^2}{m_e^2}-\ln^2\frac{t}{m_\mu^2}\right)$$

$$+\frac{m_\mu^6}{t^3}\left(-\frac{6419}{225}+\frac{14}{9}\pi^2+\frac{208}{15}\ln\frac{m_\mu^2}{m_e^2}+\frac{140}{9}\ln\frac{t}{m_\mu^2}-\frac{28}{3}\ln\frac{t}{m_\mu^2}\ln\frac{m_\mu^2}{m_e^2}-\frac{14}{3}\ln^2\frac{t}{m_\mu^2}\right)$$

$$\left.+\frac{m_\mu^8}{t^4}\left(-\frac{53350}{441}+\frac{20}{3}\pi^2+\frac{3608}{63}\ln\frac{m_\mu^2}{m_e^2}+\frac{200}{3}\ln\frac{t}{m_\mu^2}-40\ln\frac{t}{m_\mu^2}\ln\frac{m\mu^2}{m_e^2}-20\ln^2\frac{t}{m_\mu^2}\right)\right\}$$

$$+2\frac{m_e^2}{m_\mu^2}\left\{\frac{m_\mu^2}{t}-\frac{2}{3}\frac{m_\mu^4}{t^2}+\frac{m_\mu^6}{t^3}\left(2\ln\frac{t}{m\mu^2}-\frac{25}{6}\right)+\frac{m_\mu^8}{t^4}\left(12\ln\frac{t}{m_\mu^2}-\frac{97}{5}\right)+\frac{m_\mu^{10}}{t^5}\left(56\ln\frac{s}{m_\mu^2}-\frac{416}{5}\right)\right\}$$

Cas du tau dans la pol. élect. (non calculé jusqu'à présent)

$$K^{(2b)}\Big|_{\rm tau}(t) \underset{\frac{t}{m_\mu^2}\to\infty,\ \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2}\to 0}{\sim} 2\frac{m_\mu^2}{m_\tau^2}\left\{\frac{1}{15}\frac{m_\mu^4}{t^2}\ln\frac{t}{m_\mu^2} - \frac{5}{36}\frac{m_\mu^2}{t}\right\}$$

Double polarisation hadronique

$$\frac{1}{1+X} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds\ X^{-s}\ \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \qquad c = \mathrm{Re}(s)\ \in]0,1[$$

On obtient

$$a_\mu^{\rm 2pol.H} = \frac{\alpha}{\pi}\int_{4m^2}^{\infty}\frac{ds}{s}\int_{4m^2}^{\infty}\frac{dt}{t}\frac{1}{\pi^2}\,\mathrm{Im}\Pi_1(s)\,\mathrm{Im}\Pi_2(t)\left(\frac{1}{2i\pi}\right)^2\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}du\int_{d-i\infty}^{d+i\infty}dv\left(\frac{t}{m_{\mu^2}}\right)^{-u}\left(\frac{s}{m_{\mu^2}}\right)^{-v}$$
$$\times\frac{\pi}{\sin(\pi u)}\frac{\pi}{\sin(\pi v)}\frac{\Gamma(2u+2v+1)\Gamma(2-u-v)}{\Gamma(3+u+v)}$$

Les calculs s'effectuent ensuite de façon similaire au cas H-E

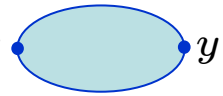
Seconde partie

Sommes harmoniques et fonctions à deux points en Large N_C QCD

E.de Rafael, ***Travail en cours***

La fonction d'Adler

(Fonction à deux points particulière)

Fonction à deux points vectorielle: $\Pi_V(q^2) =$ 

On définit la fonction d'Adler comme:

Spectre contenant l'information physique

(relation de dispersion) $$\mathcal{A}(Q^2) = \int_0^\infty dt \frac{Q^2}{(t+Q^2)^2} \frac{1}{\pi} \mathrm{Im}\Pi_V(t)$$

$$\left(Q^2 \equiv -q^2 \geq 0\right)$$

En Large N_C QCD le spectre est: $\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\Pi_V(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n M_n^2 \delta(t - M_n^2)$

En posant $z = \frac{Q^2}{M_1^2}$ et $\mu_n = \frac{M^2}{M_n^2}$, $M^2 \equiv M_1^2$ nous obtenons

$$\mathcal{A}(Q^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \frac{\mu_n z}{(1+\mu_n z)^2}$$

≡ Somme harmonique

Two-Point Functions (in Large-Nc QCD) are Harmonic Sums

$$\mathcal{A}(Q^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \frac{\mu_n z}{(1+\mu_n z)^2} \qquad \textit{where} \quad z = \frac{Q^2}{M_1^2} \quad \textit{and} \quad \mu_n = \frac{M^2}{M_n^2}, \quad M^2 \equiv M_1^2$$

$$\mathcal{A}(z) = \gamma \sum_n \lambda_n \; g_{\rm Adler}(\mu_n z) \qquad \lambda_n = \frac{\gamma_n}{\gamma_1}, \quad \gamma = \gamma_1 = \frac{3}{2\pi\alpha^2} \frac{1}{M_\rho} \Gamma_{\rho \to e^+e^-}$$

Harmonic Sums are defined by a ***Base Function*** and a ***Dirichlet Series***

Base Function: $g_{\rm Adler}(z) = \dfrac{z}{(1+z)^2}$

Dirichlet Series: $\Lambda(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \mu_n^{-s}$

(Riemann zeta-function: $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ ***)***

How does the Dirichlet Series appear ??

Harmonic Sums have a factorizable Mellin-Transform

$$\mathcal{A}(z) = \gamma \sum_n \lambda_n \; g_{\rm Adler}(\mu_n z) \qquad \lambda_n = \frac{\gamma_n}{\gamma_1}\,, \quad \gamma = \gamma_1 = \frac{3}{2\pi\alpha^2}\frac{1}{M_\rho}\Gamma_{\rho\to e^+e^-}$$

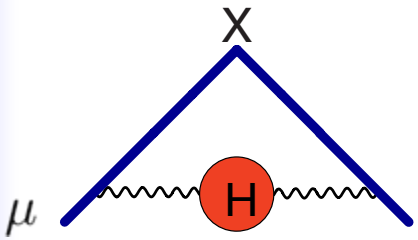
Base Function: $g_{\rm Adler}(z) = \dfrac{z}{(1+z)^2}$ **Dirichlet Series:** $\Lambda(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \mu_n^{-s}$

$$\mathcal{M}[\mathcal{A}(z)](s) = \gamma \; \mathcal{M}[g_{\rm Adler}(z)](s) \; \Lambda(s)$$

$$\mathcal{A}(z) = \frac{\gamma}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds \; z^{-s} \Lambda(s) \Gamma(1+s)\Gamma(1-s)$$

- *Comment on the factorization of the* $z = Q^2/M^2$ *dependence*
- *Comment on the fundamental strip* (*Recall that* $\mu_n = \dfrac{M^2}{M_n^2}$)

Phenomenological Example



$$a_\mu^{\rm H} = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dx \frac{1}{x}(1-x)(2-x)\; e^2\; \frac{2}{3}\mathcal{A}\left(\frac{x^2}{1-x}m_\mu^2\right)$$

In Large-N_c QCD: $$a_\mu^{\rm H} = \frac{4}{3}\alpha^2\frac{\gamma}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds \left(\frac{m_\mu^2}{M^2}\right)^{-s} \Lambda(s)\left\{\frac{\Gamma(-2s)\Gamma(1+s)}{1-s}\left[\Gamma(2+s)+\frac{\Gamma(3+s)}{2-s}\right]\right\}$$

$$\asymp \frac{2}{3}\frac{1}{1+s} - 2\frac{1}{(s+2)^2} + \frac{25}{6}\frac{1}{s+2} + \cdots$$

$$a_\mu^{\rm H} = \frac{4}{3}\alpha^2\gamma\left\{\Lambda(-1)\frac{2}{3}\;\frac{m_\mu^2}{M^2} + \Lambda(-2)\left(\frac{m_\mu^2}{M^2}\right)^2\left[2\log\frac{m_\mu^2}{M^2}+\frac{25}{6}\right]+\cdots\right\}$$

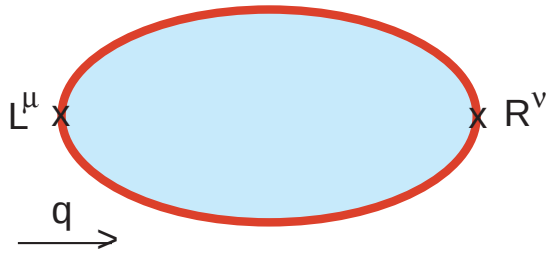
In a model where $$\frac{1}{\pi}{\rm Im}\Pi_V(t) = A\sigma^2\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-M_0^2-n\sigma^2)$$ *(Golterman, Peris, Phily, de Rafael '02)*

$$\Lambda(s) = \sum_{n=0}^{\infty}(1+2n)^{s-1} = [1-2^{s-1}]\zeta(1-s)$$

$$\Lambda(-1) = \frac{3}{4}\zeta(2) = 1.233\ldots, \qquad \Lambda(-2) = \frac{7}{8}\zeta(3) = 1.058\ldots$$

The Left-Right Correlation Function

$$\int d^4x\; e^{iq.x} \langle 0|T\left\{\bar{u}_L\gamma^\mu d_L(x)\;\bar{d}_R\gamma^\nu u_R(0)\right\}|0\rangle = \frac{1}{2i}\left(q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu}\right)\Pi_{LR}(Q^2)$$



Taylor Expansion of Green's Function

$$-Q^2\Pi_{LR}(Q^2)|_{Q^2\to 0} = F_0^2 + 4L_{10}\;Q^2 + \mathcal{O}(Q^4)$$

Integral of Green's Function

$$\mathcal{C} = \frac{3}{32\pi^2}\int_0^\infty dQ^2\left(-Q^2\Pi_{LR}(Q^2)\right)$$

$\Pi_{LR}(Q^2)$ in Large Nc QCD

$$\Pi_{LR}(Q^2) = \sum_V \frac{f_V^2 M_V^2}{Q^2 + M_V^2} - \sum_A \frac{f_A^2 M_A^2}{Q^2 + M_A^2} - \frac{F_0^2}{Q^2}$$

No $1/Q^2$ term in OPE → $\sum f_V^2 M_V^2 - \sum f_A^2 M_A^2 - F_0^2 = 0$

1st Weinberg Sum Rule

No $1/Q^4$ term in OPE → $\sum f_V^2 M_V^4 - \sum f_A^2 M_A^4 = 0$

2nd Weinberg Sum Rule

In Large-N_c QCD there are an infinite number of sum rules which relate **Hadronic Masses** and **Couplings** to Local Order Parameters of the OPE and to Non-Local Order Parameters of the Chiral Lagrangian *(Knecht—de Rafael '98)*

Matching $1/Q^6$ term to OPE → $\sum f_V^2 M_V^6 - \sum f_A^2 M_A^6 = \left[-4\pi\alpha_s + \mathcal{O}(\alpha_s^2)\right] \langle\bar{\psi}\psi\rangle^2$

Matching to $O(p^4)$ in ChPT → $\sum f_V^2 - \sum f_A^2 = -4L_{10}$

$$\Pi_{LR}(Q^2) = \sum_V^{\infty} \frac{f_V^2 M_V^2}{Q^2 + M_V^2} - \sum_A^{\infty} \frac{f_A^2 M_A^2}{Q^2 + M_A^2} - \frac{F_0^2}{Q^2}$$

- One can use Mellin-Barnes for each Sum (infinite number of states)

$$\gamma \sum_n^{\infty} \frac{\lambda_n}{1+\mu_n z} = \frac{\gamma}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds\ \Lambda(s)\ z^{-s}\ \Gamma(s)\Gamma(1-s) \qquad \text{with} \qquad \Lambda(s) = \sum_n^{\infty} \lambda_n \mu_n^{-s}$$

and define properly the matching to the chiral expansion (z-small) and the OPE (z-large)

- Models of Large-Nc (MHA): $-\frac{Q^2}{F_0^2}\Pi_{LR}(Q^2) = \frac{1}{g_A}\frac{1}{(z+1)\left(z+\frac{1}{g_A}\right)}, \qquad g_A = \frac{M_V^2}{M_A^2}$

and compare them to generalizations with an infinite number of states, example:

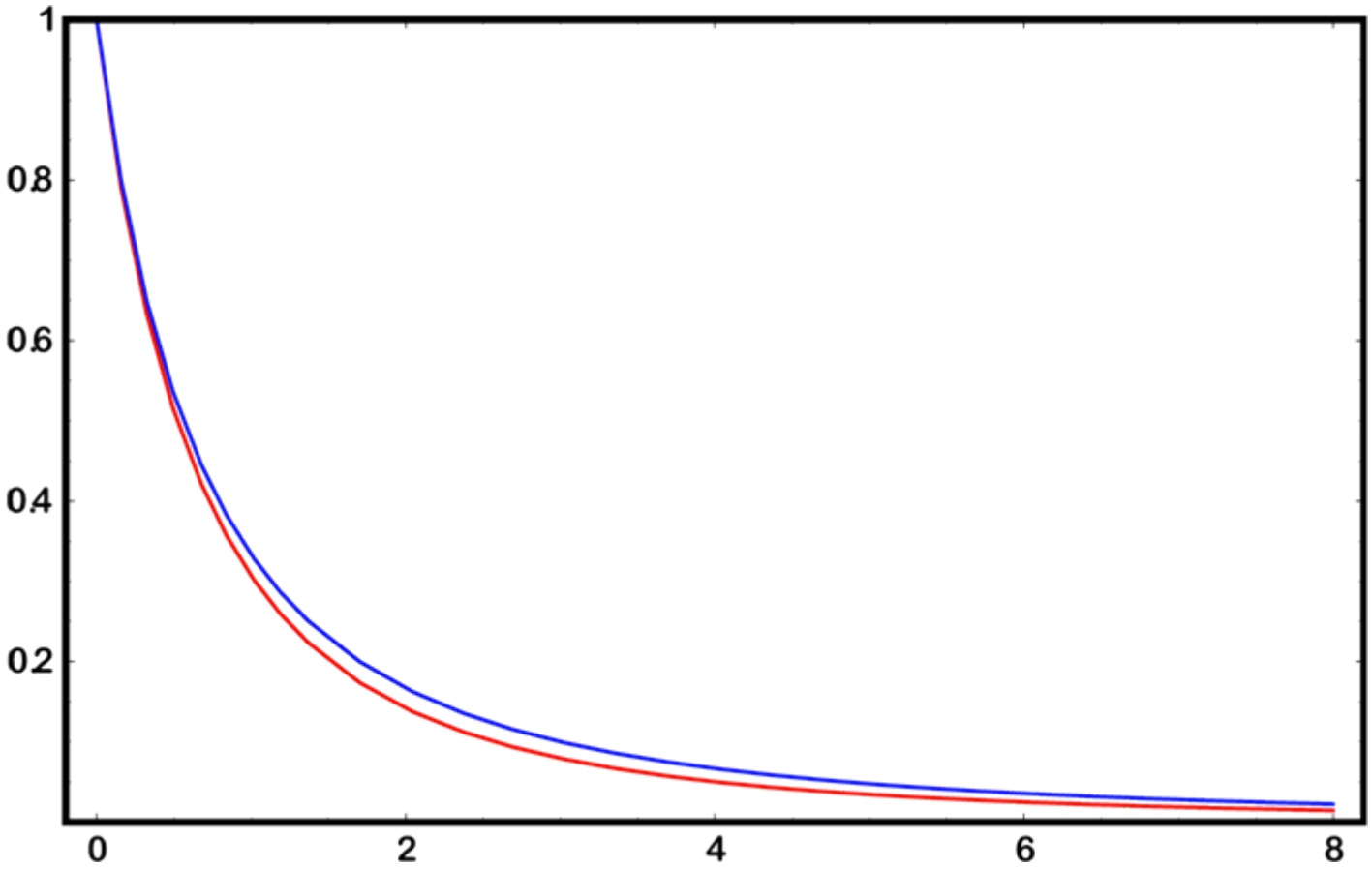
$$\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\Pi_{LR}(t) = -F_0^2\delta(t) + 2F_V^2 \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - M_V^2 - n\sigma^2) - 2F_A^2 \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - M_A^2 - n\sigma^2)$$

$$-\frac{Q^2}{F_0^2}\Pi_{LR}(Q^2) = 1 + \frac{g_A}{1-g_A} z \left[\psi\left(\frac{z+1}{1+\frac{1}{g_A}}\right) - \psi\left(\frac{z+\frac{1}{g_A}}{1+\frac{1}{g_A}}\right)\right]$$

$$\frac{1}{g_A}\frac{1}{(z+1)\left(z+\frac{1}{g_A}\right)}$$

versus

$$1+\frac{g_A}{1-g_A}z\left[\psi\left(\frac{z+1}{1+\frac{1}{g_A}}\right)-\psi\left(\frac{z+\frac{1}{g_A}}{1+\frac{1}{g_A}}\right)\right]$$



$$z=\frac{Q^2}{M_\rho}$$

CONCLUSIONS

- **Harmonic Sums are the natural framework for Large-Nc QCD**
- **Region *absolute convergence Dirichlet series*** ⟺ ***ChPT-region***
- ***OPE* defined by *Analytic Continuation* of the *Dirichlet series***
- **QUESTION ???**

QCD Generalized Two-Point Function ⟺ Type of Dirichlet series