

13 mars 2006

Introduction à la théorie quantique des champs phénoménologique:

1. Electrodynamique quantique perturbative et chromodynamique quantique à grand nombre de couleurs

Samuel FRIOT

Université du Havre
CPHT Polytechnique

Objectif: Présentation succincte des objets fondamentaux motivant le séminaire de D. Greynat.

❑ Diagrammes de Feynman

Le formalisme perturbatif de la théorie quantique de champs (sur l'exemple de l'électrodynamique quantique).

❑ Fonctions à 2 points en Large N_c QCD:

L'approche du secteur mésonique en chromodynamique quantique à grand nombre de couleurs.

Les quatre interactions fondamentales

Classe 1

- Interaction électromagnétique
- Interaction faible
- Interaction forte

Théorie quantique
de champs

Classe 2

- Interaction gravitationnelle

Relativité générale

Les différents champs quantiques (particules élémentaires)

Chaque interaction de la classe 1 est caractérisée par un ou plusieurs **bosons de jauge** dont les propriétés sont bien mesurées expérimentalement

- Les bosons de jauge (spin $j=1$):

le photon (γ , $m=0$, $q=0$) \mapsto Interaction électromagnétique U(1)
les W ($m=80$ GeV, $q=\pm 1$)
le Z ($m=91$ GeV, $q=0$) } \mapsto Interaction faible SU(2)
les gluons (g , $m=0$, $q=0$) \mapsto Interaction forte SU(3)

- Les fermions de matière (spin $j=1/2$):

les quarks/anti-quarks (hiérarchie de masses, $q = \pm 1/3$ ou $\pm 2/3$, couleur)
les leptons/anti-leptons (hiérarchie de masses, $q=0$ ou ± 1)

Particules composites

(confinement de couleur)

Hadrons :

- Mésons (états liés quark + antiquark):
les pions (π), les kaons (K), les êta (η)...
- Baryons (états liés à trois quarks):
les protons (p), les neutrons (n)...
- Pentaquarks (états liés à quatre quarks + un antiquark):
existence sujette à polémique

L'interaction électromagnétique pure: échanges de photons entre les fermions ($q \neq 0$)

Electrodynamique quantique (QED):

Théorie quantique de champs: Mécanique quantique + Relativité restreinte

Théorie de jauge basée sur l'invariance sous $U(1)$

Théorie d'interaction des photons et des électrons achevée dans les années 40 (Feynman, Schwinger, Tomonaga, Dyson...)

Meilleure théorie physique actuelle (prédiction théorique du moment magnétique anormal de l'électron **en accord avec l'expérience à 10^{-11} près!!**)

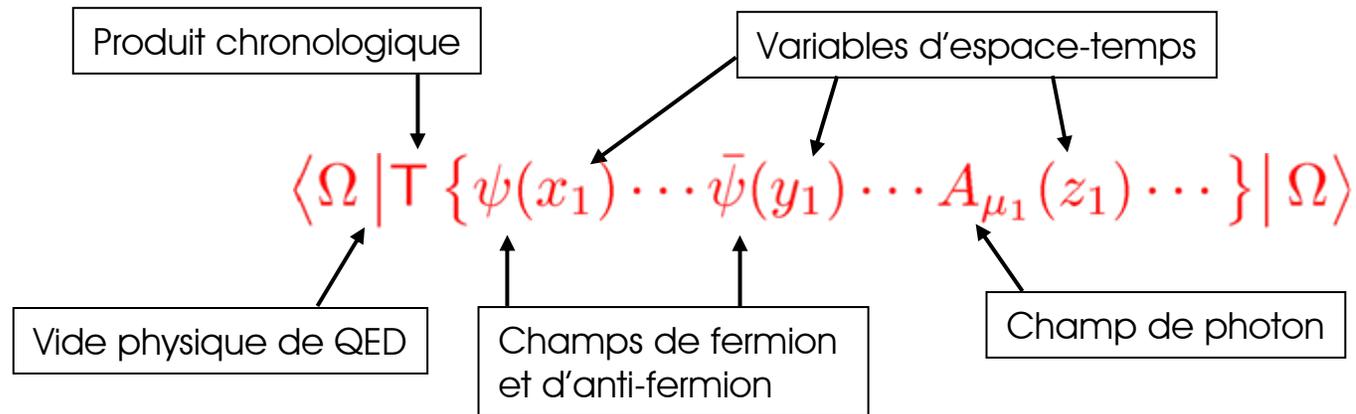
De façon surprenante et contrairement à toutes les autres théories physiques: **pas de définition mathématique précise ni de construction rigoureuse complète de QED...**

[Jaffe & Witten, 2000, Clay Institute Millenium Problem]

Fonctions de Green et théorie perturbative

Les quantités mesurables en QED sont les sections efficaces, largeurs de désintégration, rapports de branchement, etc..

Ces quantités sont reliées à des **fonctions de Green**:



Equation heuristique (Gell-Mann Low):

$$\langle \Omega | T \{ \psi(x_1) \cdots \bar{\psi}(y_1) \cdots A_{\mu_1}(z_1) \cdots \} | \Omega \rangle = \frac{\langle 0 | T \{ \psi^0(x_1) \cdots \bar{\psi}^0(y_1) \cdots A_{\mu_1}^0(z_1) \cdots e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{int.}(x)} \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{int.}(x)} | 0 \rangle}$$

Diagram illustrating the components of the Gell-Mann Low equation:

- Champs en interaction** (Interaction fields) points to $\psi(x_1), \bar{\psi}(y_1), A_{\mu_1}(z_1)$ in the numerator.
- Champs libres** (Free fields) points to $\psi^0(x_1), \bar{\psi}^0(y_1), A_{\mu_1}^0(z_1)$ in the numerator.
- vide libre de QED** (Free QED vacuum) points to the $|0\rangle$ states in the numerator and denominator.
- Lagrangien d'interaction de QED** (QED interaction Lagrangian) points to $\mathcal{L}_{int.}(x)$ in the exponent of the denominator.

Lagrangien d'interaction de QED:
(dicté par l'invariance de jauge)

Matrice de Dirac

Produit normal

$$\mathcal{L}_{\text{int.}}(x) = -e : \bar{\psi}^0(x) \gamma^\mu A_\mu^0(x) \psi^0(x) :$$

Champ de fermion

spineurs

$$\psi^0(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}}} \sum_{s=1}^2 \left[a_s^{(+)}(\vec{p}) v_s(\vec{p}) e^{ip \cdot x} + a_s^{(-)}(\vec{p}) u_s(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} \right] \Big|_{p_0 = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}}$$

Opérateur de création d'un anti-fermion

Opérateur d'annihilation d'un fermion

Champ d'anti-fermion

$$\bar{\psi}^0(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}}} \sum_{s=1}^2 \left[a_s^{\dagger(+)}(\vec{p}) \bar{u}_s(\vec{p}) e^{ip \cdot x} + a_s^{\dagger(-)}(\vec{p}) \bar{v}_s(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} \right] \Big|_{p_0 = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}}$$

Relations d'anti-commutation: $[a_s^{(+)}(\vec{p}), a_{s'}^{\dagger(-)}(\vec{p}')]_+ = [a_s^{(-)}(\vec{p}), a_{s'}^{\dagger(+)}(\vec{p}')]_+ = \delta_{ss'} \delta(\vec{p} - \vec{p}')$

Champ de photon:

$$A_\mu^0(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{|\vec{k}|^2 + m_\gamma^2}}} \sum_{\lambda=0}^3 \varepsilon_\mu^\lambda \left[a_\lambda^{\gamma(+)}(\vec{k}) e^{ik \cdot x} + a_\lambda^{\gamma(-)}(\vec{k}) e^{-ik \cdot x} \right] \Big|_{k_0 = \sqrt{|\vec{k}|^2 + m_\gamma^2}}$$

Relation de commutation: $[a_\lambda^{\gamma(+)}(\vec{p}), a_{\lambda'}^{\gamma(-)}(\vec{p}')] = g_{\lambda\lambda'} \delta(\vec{p} - \vec{p}')$

Développement perturbatif

On veut calculer:

$$\frac{\langle 0 | \mathcal{T} \left\{ \psi^0(x_1) \cdots \bar{\psi}^0(y_1) \cdots A_{\mu_1}^0(z_1) \cdots e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int.}}(x)} \right\} | 0 \rangle}{\langle 0 | \mathcal{T} e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int.}}(x)} | 0 \rangle}$$

Développement en
série de la constante
de couplage e



Caché dans
l'exponentielle
formelle

On a donc en fait au numérateur:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ie)^n}{n!} \langle 0 | \mathcal{T} \left\{ \psi^0(x_1) \cdots \bar{\psi}^0(y_1) \cdots A_{\mu_1}^0(z_1) \cdots \left[\int d^4x : \bar{\psi}^0(x) \gamma^\mu A_\mu^0(x) \psi^0(x) : \right]^n \right\} | 0 \rangle$$

et au dénominateur:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ie)^n}{n!} \langle 0 | \mathcal{T} \left\{ \left[\int d^4x : \bar{\psi}^0(x) \gamma^\mu A_\mu^0(x) \psi^0(x) : \right]^n \right\} | 0 \rangle$$

Produit chronologique et théorème de Wick

Produits chronologiques:

$$T \{ \psi(x_1) \bar{\psi}(y_1) \} \doteq \vartheta(x_1^0 - y_1^0) \psi(x_1) \bar{\psi}(y_1) - \vartheta(y_1^0 - x_1^0) \bar{\psi}(y_1) \psi(x_1)$$

$$T \{ A_{\mu_1}(z_1) A_{\mu_2}(z_2) \} \doteq \vartheta(z_1^0 - z_2^0) A_{\mu_1}(z_1) A_{\mu_2}(z_2) + \vartheta(z_2^0 - z_1^0) A_{\mu_2}(z_2) A_{\mu_1}(z_1)$$

Le produit chronologique « d'ordre n »

$$T \left\{ \psi^0(x_1) \cdots \bar{\psi}^0(y_1) \cdots A_{\mu_1}^0(z_1) \cdots \left[\int d^4x : \bar{\psi}^0(x) \gamma^\mu A_\mu^0(x) \psi^0(x) : \right]^n \right\}$$

se factorise (relations de commutation):

$$\int d^4u_1 \cdots \int d^4u_n (\gamma^{\nu_1})_{\bar{\lambda}_1 \lambda_1} \cdots (\gamma^{\nu_n})_{\bar{\lambda}_n \lambda_n} T \{ A_{\mu_1}^0(z_1) \cdots A_{\nu_1}^0(u_1) \cdots A_{\nu_n}^0(u_n) \} \\ \times T \left\{ \psi_{\alpha_1}^0(x_1) \cdots \bar{\psi}_{\beta_1}^0(y_1) \cdots : \bar{\psi}_{\lambda_1}^0(u_1) \psi_{\lambda_1}^0(u_1) : \cdots : \bar{\psi}_{\lambda_n}^0(u_n) \psi_{\lambda_n}^0(u_n) : \right\}$$

Chaque produit chronologique peut être évalué à l'aide du **théorème de Wick**:

Théorème de Wick pour le champ de photon

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{T} \{ A_{\mu}^0(z_1) \cdots A_{\nu_1}^0(u_1) \cdots A_{\nu_n}^0(u_n) \} \\
 &= : A_{\mu_1}^0(z_1) \cdots A_{\nu_1}^0(u_1) \cdots A_{\nu_n}^0(u_n) : \\
 &+ \overbrace{A_{\mu_1}^0(z_1) A_{\mu_2}^0(z_2)} : A_{\mu_3}^0(z_3) A_{\mu_4}^0(z_4) \cdots A_{\nu_1}^0(u_1) \cdots A_{\nu_n}^0(u_n) : \\
 &\quad + \overbrace{A_{\mu_1}^0(z_1) A_{\mu_3}^0(z_3)} : A_{\mu_2}^0(z_2) A_{\mu_4}^0(z_4) \cdots A_{\nu_1}^0(u_1) \cdots A_{\nu_n}^0(u_n) : + \text{perm.} \\
 &+ \overbrace{A_{\mu_1}^0(z_1) A_{\mu_2}^0(z_2)} \overbrace{A_{\mu_3}^0(z_3) A_{\mu_4}^0(z_4)} : \cdots A_{\nu_1}^0(u_1) \cdots A_{\nu_n}^0(u_n) : \\
 &\quad + \overbrace{A_{\mu_1}^0(z_1) A_{\mu_2}^0(z_2) A_{\mu_3}^0(z_3) A_{\mu_4}^0(z_4)} : \cdots A_{\nu_1}^0(u_1) \cdots A_{\nu_n}^0(u_n) : + \text{perm.} \\
 &+ \cdots \\
 &+ \overbrace{A_{\mu_1}^0(z_1) A_{\mu_2}^0(z_2)} \overbrace{A_{\mu_3}^0(z_3) A_{\mu_4}^0(z_4)} \cdots \overbrace{A_{\nu_{n-1}}^0(u_{n-1}) A_{\nu_n}^0(u_n)} + \text{perm.}
 \end{aligned}$$

Propagateur du photon:

$$\overbrace{A_{\mu}^0(x) A_{\nu}^0(y)} = \langle 0 | \mathcal{T} \{ A_{\mu}^0(x) A_{\nu}^0(y) \} | 0 \rangle \doteq ig_{\mu\nu} D_F(x-y) \underset{\varepsilon \searrow 0}{=} -ig_{\mu\nu} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot (x-y)}}{p^2 + i\varepsilon}$$

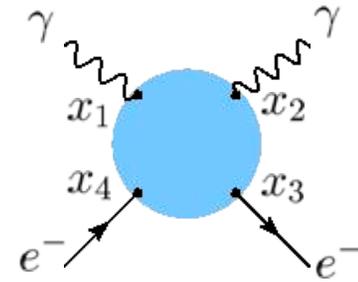
Un exemple de calcul

La fonction à quatre points de la diffusion Compton:

$$\langle \Omega | \mathcal{T} \{ A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) \psi_\alpha(x_3) \bar{\psi}_\beta(x_4) \} | \Omega \rangle$$

$$= \frac{\langle 0 | \mathcal{T} \{ A_\mu^0(x_1) A_\nu^0(x_2) \psi_\alpha^0(x_3) \bar{\psi}_\beta^0(x_4) e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int.}}(x)} \} | 0 \rangle}{\langle 0 | \mathcal{T} e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int.}}(x)} | 0 \rangle}$$

(Gell-Mann Low)



□ Le numérateur:

• Terme d'ordre $\mathcal{O}(e^0)$:

$$\langle 0 | \mathcal{T} \{ A_\mu^0(x_1) A_\nu^0(x_2) \psi_\alpha^0(x_3) \bar{\psi}_\beta^0(x_4) \} | 0 \rangle = \langle 0 | \mathcal{T} \{ A_\mu^0(x_1) A_\nu^0(x_2) \} \mathcal{T} \{ \psi_\alpha^0(x_3) \bar{\psi}_\beta^0(x_4) \} | 0 \rangle$$

$$= \langle 0 | \left[: A_\mu^0(x_1) A_\nu^0(x_2) : + \overbrace{A_\mu^0(x_1) A_\nu^0(x_2)} \right] \left[: \psi_\alpha^0(x_3) \bar{\psi}_\beta^0(x_4) : + \overbrace{\psi_\alpha^0(x_3) \bar{\psi}_\beta^0(x_4)} \right] | 0 \rangle$$

Th. Wick

Tout produit normal dans le vide perturbatif $|0\rangle$ est nul donc:

$$\text{Num.} |_{\mathcal{O}(e^0)} = \overbrace{A_\mu^0(x_1) A_\nu^0(x_2)} \overbrace{\psi_\alpha^0(x_3) \bar{\psi}_\beta^0(x_4)} \overbrace{\langle 0 | 0 \rangle}^1$$

- Terme d'ordre $\mathcal{O}(e^1)$:

$$\begin{aligned} & \left\langle 0 \left| \mathcal{T} \left\{ A_\mu^0(x_1) A_\nu^0(x_2) \psi_\alpha^0(x_3) \bar{\psi}_\beta^0(x_4) (-ie) \int d^4 y_1 : \bar{\psi}^0(y_1) \gamma^{\mu_1} A_{\mu_1}^0(y_1) \psi^0(y_1) : \right\} \right| 0 \right\rangle \\ &= -ie (\gamma^{\mu_1})_{\bar{\lambda}_1 \lambda_1} \int d^4 y_1 \left\langle 0 \left| \mathcal{T} \left\{ A_\mu^0(x_1) A_\nu^0(x_2) A_{\mu_1}^0(y_1) \right\} \mathcal{T} \left\{ \psi_\alpha^0(x_3) \bar{\psi}_\beta^0(x_4) : \bar{\psi}_{\bar{\lambda}_1}^0(y_1) \psi_{\lambda_1}^0(y_1) : \right\} \right| 0 \right\rangle \end{aligned}$$

Nombre impair de champs de photon \Rightarrow Terme d'ordre $\mathcal{O}(e^1)$ nul

\Rightarrow De façon générale: terme d'ordre $\mathcal{O}(e^{2n+1})$ nul

Donc redéfinition du paramètre de développement: $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$

- Terme d'ordre $\mathcal{O}(\alpha)$:

$$\begin{aligned} & \left\langle 0 \left| \mathcal{T} \left\{ A_\mu^0(x_1) A_\nu^0(x_2) \psi_\alpha^0(x_3) \bar{\psi}_\beta^0(x_4) (-ie)^2 \int d^4 y_1 \int d^4 y_2 : \bar{\psi}^0(y_1) \gamma^{\mu_1} A_{\mu_1}^0(y_1) \psi^0(y_1) :: \bar{\psi}^0(y_2) \gamma^{\mu_2} A_{\mu_2}^0(y_2) \psi^0(y_2) : \right\} \right| 0 \right\rangle \\ &= -4\pi\alpha (\gamma^{\mu_1})_{\bar{\lambda}_1 \lambda_1} (\gamma^{\mu_2})_{\bar{\lambda}_2 \lambda_2} \iint d^4 y_1 d^4 y_2 \\ & \quad \times \left\langle 0 \left| \mathcal{T} \left\{ A_\mu^0(x_1) A_\nu^0(x_2) A_{\mu_1}^0(y_1) A_{\mu_2}^0(y_2) \right\} \mathcal{T} \left\{ \psi_\alpha^0(x_3) \bar{\psi}_\beta^0(x_4) : \bar{\psi}_{\bar{\lambda}_1}^0(y_1) \psi_{\lambda_1}^0(y_1) :: \bar{\psi}_{\bar{\lambda}_2}^0(y_2) \psi_{\lambda_2}^0(y_2) : \right\} \right| 0 \right\rangle \\ &= -4\pi\alpha (\gamma^{\mu_1})_{\bar{\lambda}_1 \lambda_1} (\gamma^{\mu_2})_{\bar{\lambda}_2 \lambda_2} \iint d^4 y_1 d^4 y_2 \left[\overbrace{A_\mu^0(x_1) A_\nu^0(x_2) A_{\mu_1}^0(y_1) A_{\mu_2}^0(y_2)} + \overbrace{A_\mu^0(x_1) A_\nu^0(x_2) A_{\mu_1}^0(y_1) A_{\mu_2}^0(y_2)} + \overbrace{A_\mu^0(x_1) A_\nu^0(x_2) A_{\mu_1}^0(y_1) A_{\mu_2}^0(y_2)} \right] \\ & \quad \times \left[\overbrace{\psi_\alpha^0(x_3) \bar{\psi}_\beta^0(x_4) \bar{\psi}_{\bar{\lambda}_1}^0(y_1) \psi_{\lambda_1}^0(y_1) \bar{\psi}_{\bar{\lambda}_2}^0(y_2) \psi_{\lambda_2}^0(y_2)} + \overbrace{\psi_\alpha^0(x_3) \bar{\psi}_\beta^0(x_4) \bar{\psi}_{\bar{\lambda}_1}^0(y_1) \psi_{\lambda_1}^0(y_1) \bar{\psi}_{\bar{\lambda}_2}^0(y_2) \psi_{\lambda_2}^0(y_2)} + \overbrace{\psi_\alpha^0(x_3) \bar{\psi}_\beta^0(x_4) \bar{\psi}_{\bar{\lambda}_1}^0(y_1) \psi_{\lambda_1}^0(y_1) \bar{\psi}_{\bar{\lambda}_2}^0(y_2) \psi_{\lambda_2}^0(y_2)} \right] \langle 0|0 \rangle \end{aligned}$$

$$\text{Num.}|_{\mathcal{O}(e^2)} = -4\pi\alpha (\gamma^{\mu_1})_{\bar{\lambda}_1\lambda_1} (\gamma^{\mu_2})_{\bar{\lambda}_2\lambda_2} \iint d^4y_1 d^4y_2 \left[\overbrace{A_\mu^0(x_1)A_\nu^0(x_2)A_{\mu_1}^0(y_1)A_{\mu_2}^0(y_2)} + \overbrace{A_\mu^0(x_1)A_\nu^0(x_2)A_{\mu_1}^0(y_1)A_{\mu_2}^0(y_2)} + \overbrace{A_\mu^0(x_1)A_\nu^0(x_2)A_{\mu_1}^0(y_1)A_{\mu_2}^0(y_2)} \right]$$

$$\times \left[\overbrace{\psi_\alpha^0(x_3)\bar{\psi}_\beta^0(x_4)\bar{\psi}_{\lambda_1}^0(y_1)\psi_{\lambda_1}^0(y_1)\bar{\psi}_{\lambda_2}^0(y_2)\psi_{\lambda_2}^0(y_2)} + \overbrace{\psi_\alpha^0(x_3)\bar{\psi}_\beta^0(x_4)\bar{\psi}_{\lambda_1}^0(y_1)\psi_{\lambda_1}^0(y_1)\bar{\psi}_{\lambda_2}^0(y_2)\psi_{\lambda_2}^0(y_2)} + \overbrace{\psi_\alpha^0(x_3)\bar{\psi}_\beta^0(x_4)\bar{\psi}_{\lambda_1}^0(y_1)\psi_{\lambda_1}^0(y_1)\bar{\psi}_{\lambda_2}^0(y_2)\psi_{\lambda_2}^0(y_2)} \right] \langle 0|0 \rangle$$

$$\text{Donc Num.}|_{\mathcal{O}(e^2)} = -4\pi\alpha (\gamma^{\mu_1})_{\bar{\lambda}_1\lambda_1} (\gamma^{\mu_2})_{\bar{\lambda}_2\lambda_2} \iint d^4y_1 d^4y_2$$

$$\left[\begin{aligned} & - \overbrace{A_\mu^0(x_1)A_\nu^0(x_2)A_{\mu_1}^0(y_1)A_{\mu_2}^0(y_2)} \overbrace{\psi_\alpha^0(x_3)\bar{\psi}_\beta^0(x_4)\psi_{\lambda_2}^0(y_2)\bar{\psi}_{\lambda_1}^0(y_1)\psi_{\lambda_1}^0(y_1)\bar{\psi}_{\lambda_2}^0(y_2)} \\ & - \overbrace{A_\mu^0(x_1)A_\nu^0(x_2)A_{\mu_1}^0(y_1)A_{\mu_2}^0(y_2)} \overbrace{\psi_\alpha^0(x_3)\bar{\psi}_{\lambda_1}^0(y_1)\psi_{\lambda_2}^0(y_2)\bar{\psi}_\beta^0(x_4)\psi_{\lambda_1}^0(y_1)\bar{\psi}_{\lambda_2}^0(y_2)} \\ & + \overbrace{A_\mu^0(x_1)A_\nu^0(x_2)A_{\mu_1}^0(y_1)A_{\mu_2}^0(y_2)} \overbrace{\psi_\alpha^0(x_3)\bar{\psi}_{\lambda_2}^0(y_2)\psi_{\lambda_1}^0(y_1)\bar{\psi}_\beta^0(x_4)\psi_{\lambda_2}^0(y_2)\bar{\psi}_{\lambda_1}^0(y_1)} \\ & - \overbrace{A_\mu^0(x_1)A_{\mu_1}^0(y_1)A_\nu^0(x_2)A_{\mu_2}^0(y_2)} \overbrace{\psi_\alpha^0(x_3)\bar{\psi}_\beta^0(x_4)\psi_{\lambda_2}^0(y_2)\bar{\psi}_{\lambda_1}^0(y_1)\psi_{\lambda_1}^0(y_1)\bar{\psi}_{\lambda_2}^0(y_2)} \\ & - \overbrace{A_\mu^0(x_1)A_{\mu_1}^0(y_1)A_\nu^0(x_2)A_{\mu_2}^0(y_2)} \overbrace{\psi_\alpha^0(x_3)\bar{\psi}_{\lambda_1}^0(y_1)\psi_{\lambda_2}^0(y_2)\bar{\psi}_\beta^0(x_4)\psi_{\lambda_1}^0(y_1)\bar{\psi}_{\lambda_2}^0(y_2)} \\ & + \overbrace{A_\mu^0(x_1)A_{\mu_1}^0(y_1)A_\nu^0(x_2)A_{\mu_2}^0(y_2)} \overbrace{\psi_\alpha^0(x_3)\bar{\psi}_{\lambda_2}^0(y_2)\psi_{\lambda_1}^0(y_1)\bar{\psi}_\beta^0(x_4)\psi_{\lambda_2}^0(y_2)\bar{\psi}_{\lambda_1}^0(y_1)} \\ & - \overbrace{A_\mu^0(x_1)A_{\mu_2}^0(y_2)A_\nu^0(x_2)A_{\mu_1}^0(y_1)} \overbrace{\psi_\alpha^0(x_3)\bar{\psi}_\beta^0(x_4)\psi_{\lambda_2}^0(y_2)\bar{\psi}_{\lambda_1}^0(y_1)\psi_{\lambda_1}^0(y_1)\bar{\psi}_{\lambda_2}^0(y_2)} \\ & - \overbrace{A_\mu^0(x_1)A_{\mu_2}^0(y_2)A_\nu^0(x_2)A_{\mu_1}^0(y_1)} \overbrace{\psi_\alpha^0(x_3)\bar{\psi}_{\lambda_1}^0(y_1)\psi_{\lambda_2}^0(y_2)\bar{\psi}_\beta^0(x_4)\psi_{\lambda_1}^0(y_1)\bar{\psi}_{\lambda_2}^0(y_2)} \\ & + \overbrace{A_\mu^0(x_1)A_{\mu_2}^0(y_2)A_\nu^0(x_2)A_{\mu_1}^0(y_1)} \overbrace{\psi_\alpha^0(x_3)\bar{\psi}_{\lambda_2}^0(y_2)\psi_{\lambda_1}^0(y_1)\bar{\psi}_\beta^0(x_4)\psi_{\lambda_2}^0(y_2)\bar{\psi}_{\lambda_1}^0(y_1)} \end{aligned} \right]$$

Plus la puissance de α augmente, plus les expressions deviennent compliquées
 ➡ Méthode graphique de manipulation: **Diagrammes de Feynman**.

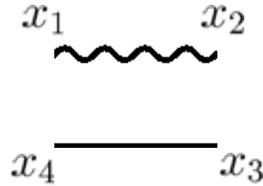
Exemple:

Propagateur photonique

Propagateur fermionique

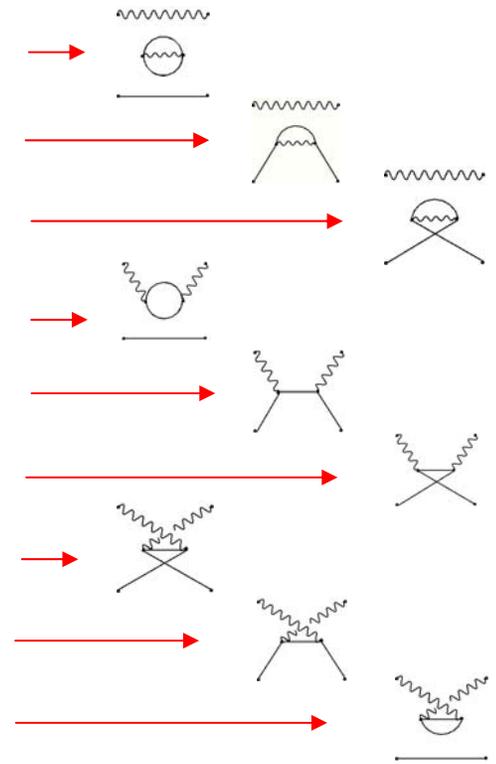
$$\text{Num.}|_{\mathcal{O}(e^0)} = \overbrace{A_\mu^0(x_1)A_\nu^0(x_2)} \overbrace{\psi_\alpha^0(x_3)\bar{\psi}_\beta^0(x_4)}$$

Diagramme de Feynman associé:



$$\text{Num.}|_{\mathcal{O}(e^2)} = -4\pi\alpha (\gamma^{\mu_1})_{\bar{\lambda}_1\lambda_1} (\gamma^{\mu_2})_{\bar{\lambda}_2\lambda_2} \iint d^4y_1 d^4y_2$$

$$\left[\begin{aligned} & - \overbrace{A_\mu^0(x_1)A_\nu^0(x_2)} \overbrace{A_{\mu_1}^0(y_1)A_{\mu_2}^0(y_2)} \overbrace{\psi_\alpha^0(x_3)\bar{\psi}_\beta^0(x_4)} \overbrace{\psi_{\lambda_2}^0(y_2)\bar{\psi}_{\bar{\lambda}_1}^0(y_1)} \overbrace{\psi_{\lambda_1}^0(y_1)\bar{\psi}_{\bar{\lambda}_2}^0(y_2)} \\ & - \overbrace{A_\mu^0(x_1)A_\nu^0(x_2)} \overbrace{A_{\mu_1}^0(y_1)A_{\mu_2}^0(y_2)} \overbrace{\psi_\alpha^0(x_3)\bar{\psi}_{\bar{\lambda}_1}^0(y_1)} \overbrace{\psi_{\lambda_2}^0(y_2)\bar{\psi}_\beta^0(x_4)} \overbrace{\psi_{\lambda_1}^0(y_1)\bar{\psi}_{\bar{\lambda}_2}^0(y_2)} \\ & + \overbrace{A_\mu^0(x_1)A_\nu^0(x_2)} \overbrace{A_{\mu_1}^0(y_1)A_{\mu_2}^0(y_2)} \overbrace{\psi_\alpha^0(x_3)\bar{\psi}_{\bar{\lambda}_2}^0(y_2)} \overbrace{\psi_{\lambda_1}^0(y_1)\bar{\psi}_\beta^0(x_4)} \overbrace{\psi_{\lambda_2}^0(y_2)\bar{\psi}_{\bar{\lambda}_1}^0(y_1)} \\ & - \overbrace{A_\mu^0(x_1)A_{\mu_1}^0(y_1)} \overbrace{A_\nu^0(x_2)A_{\mu_2}^0(y_2)} \overbrace{\psi_\alpha^0(x_3)\bar{\psi}_\beta^0(x_4)} \overbrace{\psi_{\lambda_2}^0(y_2)\bar{\psi}_{\bar{\lambda}_1}^0(y_1)} \overbrace{\psi_{\lambda_1}^0(y_1)\bar{\psi}_{\bar{\lambda}_2}^0(y_2)} \\ & - \overbrace{A_\mu^0(x_1)A_{\mu_1}^0(y_1)} \overbrace{A_\nu^0(x_2)A_{\mu_2}^0(y_2)} \overbrace{\psi_\alpha^0(x_3)\bar{\psi}_{\bar{\lambda}_1}^0(y_1)} \overbrace{\psi_{\lambda_2}^0(y_2)\bar{\psi}_\beta^0(x_4)} \overbrace{\psi_{\lambda_1}^0(y_1)\bar{\psi}_{\bar{\lambda}_2}^0(y_2)} \\ & + \overbrace{A_\mu^0(x_1)A_{\mu_1}^0(y_1)} \overbrace{A_\nu^0(x_2)A_{\mu_2}^0(y_2)} \overbrace{\psi_\alpha^0(x_3)\bar{\psi}_{\bar{\lambda}_2}^0(y_2)} \overbrace{\psi_{\lambda_1}^0(y_1)\bar{\psi}_\beta^0(x_4)} \overbrace{\psi_{\lambda_2}^0(y_2)\bar{\psi}_{\bar{\lambda}_1}^0(y_1)} \\ & - \overbrace{A_\mu^0(x_1)A_{\mu_2}^0(y_2)} \overbrace{A_\nu^0(x_2)A_{\mu_1}^0(y_1)} \overbrace{\psi_\alpha^0(x_3)\bar{\psi}_\beta^0(x_4)} \overbrace{\psi_{\lambda_2}^0(y_2)\bar{\psi}_{\bar{\lambda}_1}^0(y_1)} \overbrace{\psi_{\lambda_1}^0(y_1)\bar{\psi}_{\bar{\lambda}_2}^0(y_2)} \\ & - \overbrace{A_\mu^0(x_1)A_{\mu_2}^0(y_2)} \overbrace{A_\nu^0(x_2)A_{\mu_1}^0(y_1)} \overbrace{\psi_\alpha^0(x_3)\bar{\psi}_{\bar{\lambda}_1}^0(y_1)} \overbrace{\psi_{\lambda_2}^0(y_2)\bar{\psi}_\beta^0(x_4)} \overbrace{\psi_{\lambda_1}^0(y_1)\bar{\psi}_{\bar{\lambda}_2}^0(y_2)} \\ & + \overbrace{A_\mu^0(x_1)A_{\mu_2}^0(y_2)} \overbrace{A_\nu^0(x_2)A_{\mu_1}^0(y_1)} \overbrace{\psi_\alpha^0(x_3)\bar{\psi}_{\bar{\lambda}_2}^0(y_2)} \overbrace{\psi_{\lambda_1}^0(y_1)\bar{\psi}_\beta^0(x_4)} \overbrace{\psi_{\lambda_2}^0(y_2)\bar{\psi}_{\bar{\lambda}_1}^0(y_1)} \end{aligned} \right]$$



Règles et diagrammes de Feynman

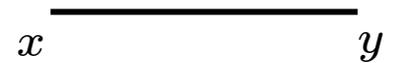
(représentation en position)

1948

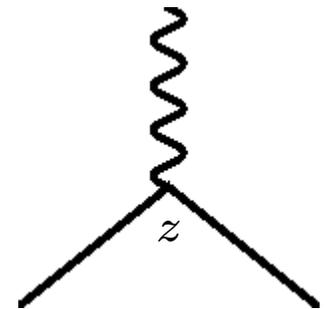
$$\overline{A_\mu^0(x)} A_\nu^0(y) = ig_{\mu\nu} D_F(x-y) \stackrel{\varepsilon \searrow 0}{=} -ig_{\mu\nu} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot (x-y)}}{p^2 + i\varepsilon}$$



$$\overline{\psi_\alpha^0(x)} \psi_\beta^0(y) = iS_F(x-y)_{\alpha\beta} \stackrel{\varepsilon \searrow 0}{=} i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} \left(\frac{1}{\not{p} - m + i\varepsilon} \right)_{\alpha\beta}$$



$$-ie(\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \int d^4 z$$

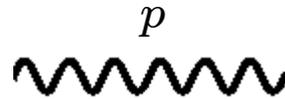


Il existe une autre représentation aussi souvent utilisée: la représentation en impulsion

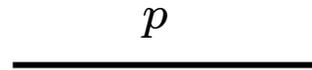
Règles et diagrammes de Feynman

(représentation en impulsion)

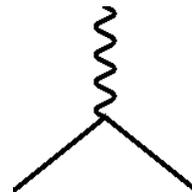
$$-ig_{\mu\nu} \frac{1}{p^2 + i\varepsilon}$$



$$\left(\frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon} \right)_{\alpha\beta}$$



$$-ie(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}$$



Pour chaque boucle d'impulsion p :

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$$

Nous avons calculé le numérateur de

$$\frac{\langle 0 | \mathcal{T} \left\{ A_\mu^0(x_1) A_\nu^0(x_2) \psi_\alpha^0(x_3) \bar{\psi}_\beta^0(x_4) e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int.}}(x)} \right\} | 0 \rangle}{\langle 0 | \mathcal{T} e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int.}}(x)} | 0 \rangle}$$

Calcul du dénominateur:

$$\begin{aligned} & \langle 0 | \mathcal{T} e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int.}}(x)} | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | 0 \rangle - ie \gamma_1^\mu \langle 0 | \int d^4y_1 : \bar{\psi}^0(y_1) A_{\mu_1}^0(y_1) \psi^0(y_1) : | 0 \rangle \\ & \quad + \frac{(-ie)^2}{2} \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \langle 0 | \iint d^4y_1 d^4y_2 \mathcal{T} \{ : \bar{\psi}^0(y_1) A_{\mu_1}^0(y_1) \psi^0(y_1) : : \bar{\psi}^0(y_2) A_{\mu_2}^0(y_2) \psi^0(y_2) : \} | 0 \rangle \\ & \quad + \dots \\ &= 1 + \text{diagramme 1} + \text{diagramme 2} + \text{diagramme 3} + \text{diagramme 4} + \dots \end{aligned}$$

Ce sont des diagrammes du vide

Ils sont supprimés par les diagrammes du vide du numérateur.

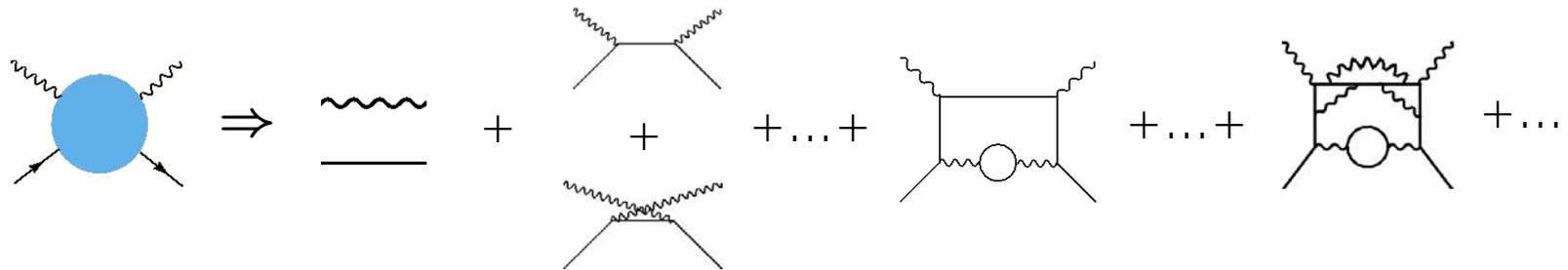
Règles de Feynman



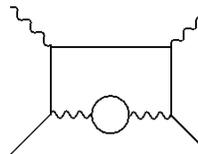
Intégrale d'un diagramme arbitraire

□ La contribution $\mathcal{O}(\alpha^n)$ est la somme des diagrammes (topologiquement différents) à $2n$ vertex

⇒ Développement en puissance de α ou en nombre de boucles



Exemple: les règles de Feynman nous donnent (en représentation en impulsion):



$$= (4\pi\alpha)^3 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \gamma^\mu \frac{1}{\not{k} + \not{q}_1 + \not{q}_4 + \not{q}_2 - m} \gamma^\nu \frac{1}{\not{k} + \not{q}_1 + \not{q}_4 - m} \gamma^\rho \frac{1}{\not{k} + \not{q}_4 - m} \gamma^\sigma \frac{1}{k^2} \text{Tr} \left[\gamma_\sigma \frac{1}{\not{q} + \not{k} - M} \gamma_\mu \frac{1}{\not{q} - M} \right]$$

□ En général très difficile à calculer!

⇒ Développements asymptotiques

(Représentation de Mellin-Barnes, etc. cf. séminaire de D. Greynat)

La série perturbative

Problème très important: certains diagrammes de Feynman divergent...

⇒ REGULARISATION & RENORMALISATION

- ❑ Régularisation (dimensionnelle): passage de la dimension 4 à $4-\epsilon$
 - ⇒ Extraction des divergences des diagrammes en puissance de $\frac{1}{\epsilon}$.
- ❑ Renormalisation: redéfinition de la constante de couplage, des masses et champs.
 - ⇒ Elimination des divergences des diagrammes.

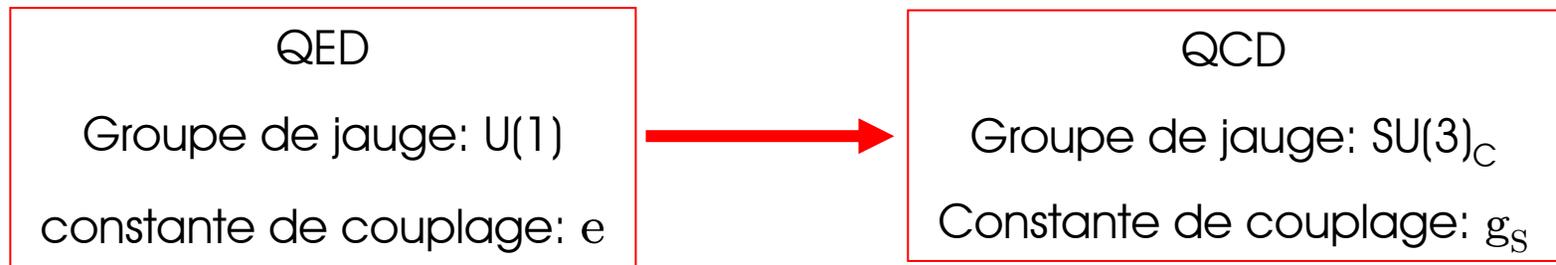
Malgré la renormalisation, la série perturbative est une série asymptotique divergente (nombre de graphes à n boucles $\sim n!$)

❑ Resommation (transformée de Borel) ⇒ mais on trouve des divergences sur l'axe réel positif (renormalons) ⇒ non-resommable...

❑ Aucune quantité n'a été calculée au-delà de 4 boucles en QED, sauf moment magnétique anormal de l'électron (et du muon) pour lequel l'approximation à 5 boucles est déjà en accord à 10^{-11} !!

cf. séminaire de D. Greynat pour moment magnétique anormal du muon.

Il existe une méthode de resommation par paquets (classes de diagrammes) très utile pour la Chromodynamique quantique (QCD), théorie des interactions fortes, généralisation non-abélienne de QED.



Cette resommation par paquets peut être obtenue dans la limite:

$$SU(3)_C \rightsquigarrow SU(N)_C \quad N_C \rightarrow \infty \text{ et } g_s^2 N_C \text{ fixe}$$

Cette limite est la QCD à grand nombre de couleurs (Large N_C QCD).

L'interaction forte pure: échanges de gluons entre quarks et... gluons

Chromodynamique quantique (QCD)

Théorie quantique de champs: Mécanique quantique + Relativité restreinte

Théorie de jauge basée sur l'invariance sous $SU(3)_C$

Formulée dans les années 70 comme théorie d'interaction des gluons et des quarks (Yang, Mills, Gell-Mann, Gross, Wilczek, Politzer, 't Hooft, Veltman...)

Comme pour QED, il n'existe pas de définition mathématique précise ni de construction rigoureuse complète de QCD en dimension 4.

Lagrangien d'interaction de QCD:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{int.}}(x) = & -g_S : \bar{\psi}^0(x) \gamma^\mu G_{\mu}^{0a}(x) t^a \psi^0(x) : \\ & - g_S f^{abc} : [\partial_\mu G_{\nu}^{0a}(x)] G^{0\mu b}(x) G^{0\nu c}(x) : \\ & - \frac{1}{4} g_S : [f^{eab} G_{\mu}^{0a}(x) G_{\nu}^{0b}(x)] [f^{ecd} G^{0\mu c}(x) G^{0\nu d}(x)] : \end{aligned}$$

Rappel: lagrangien d'interaction de QED

$$\mathcal{L}_{\text{int.}}(x) = -e : \bar{\psi}^0(x) \gamma^\mu A_{\mu}^0(x) \psi^0(x) :$$

- Les quarks sont comme les électrons, avec un indice de couleur i en plus, qui peut prendre trois valeurs: bleu, blanc ou rouge (et aussi un indice de saveur qui ne nous intéresse pas pour la suite)

$$\psi_{\alpha}^{0i}(x)$$

- Les gluons peuvent être vus comme des matrices à deux indices de couleur i et j .

$$(G_{\mu}^{0a}(x) t^a)^i_j$$

QED

leptons



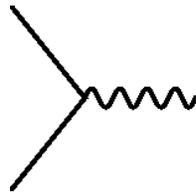
anti-leptons



photon



couplage



QCD

quarks



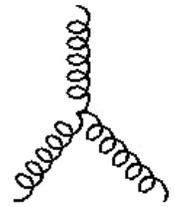
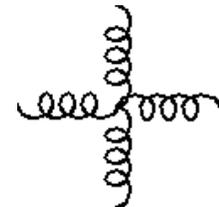
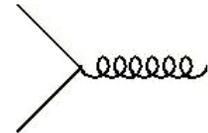
anti-quarks



gluons



couplages



Le lagrangien d'interaction de QCD induit deux nouveaux couplages.

QCD

quarks



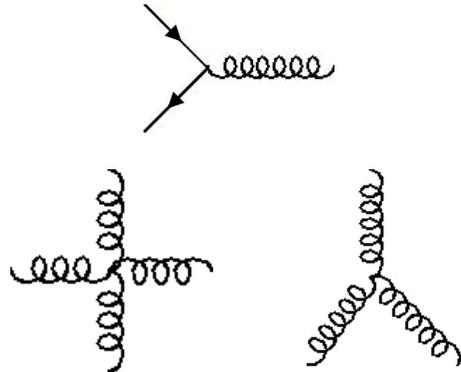
anti-quarks



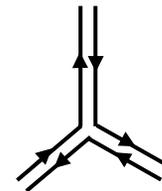
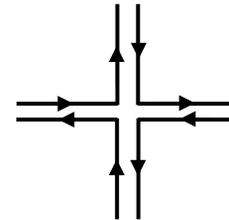
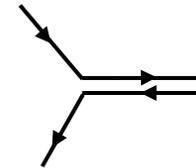
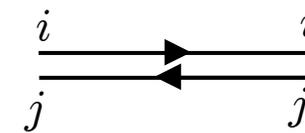
gluons



couplages

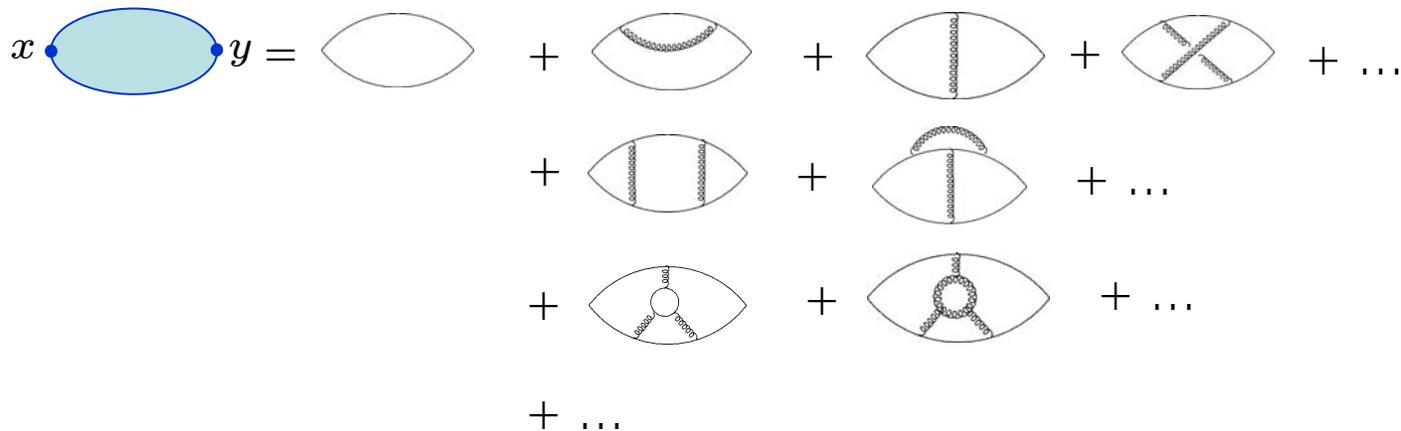


Autre représentation graphique
pertinente pour Large N_C QCD



Les fonctions à deux points

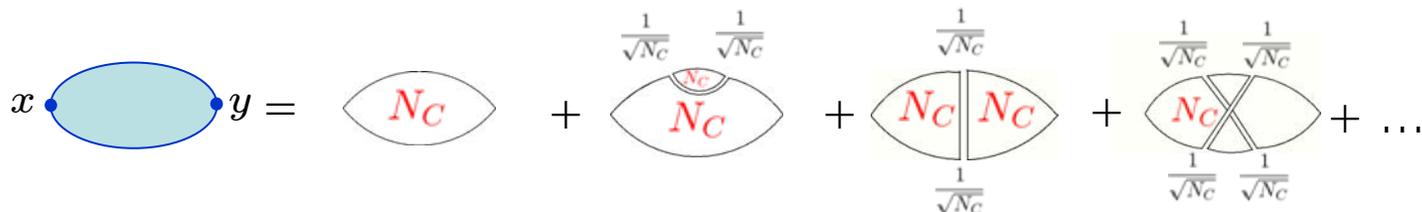
Exemple: $\langle \Omega | T \{ : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) :: \bar{\psi}(y) \gamma^\nu \psi(y) : \} | \Omega \rangle$



Redéfinition de la constante de couplage $g_s \rightarrow \frac{g_s}{\sqrt{N_C}}$ et notation double ligne pour les gluons \Rightarrow développement en $1/N_C$ qui va sélectionner une classe (« paquet ») de diagrammes de Feynman dominants dans la limite N_C infini pour la fonction à deux points: les diagrammes planaires à une seule boucle de quarks (qui doit constituer les bords de chacun de ces diagrammes).

En effet (sachant que chaque boucle fermée donne un facteur N_C)

$$\langle \Omega | T \{ : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) :: \bar{\psi}(y) \gamma^\nu \psi(y) : \} | \Omega \rangle$$



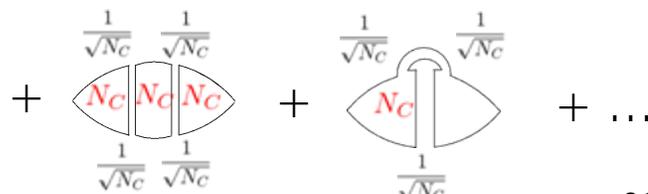
Ordre: N_C

N_C

N_C

N_C^{-1}

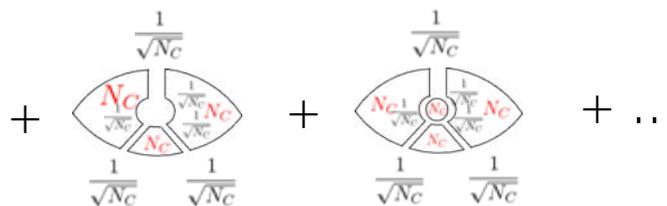
sous-dominant
(non-planaire)



N_C

$N_C^{-1/2}$

sous-dominant
(gluon sur un bord)



sous-dominant
(2 boucles de quarks)

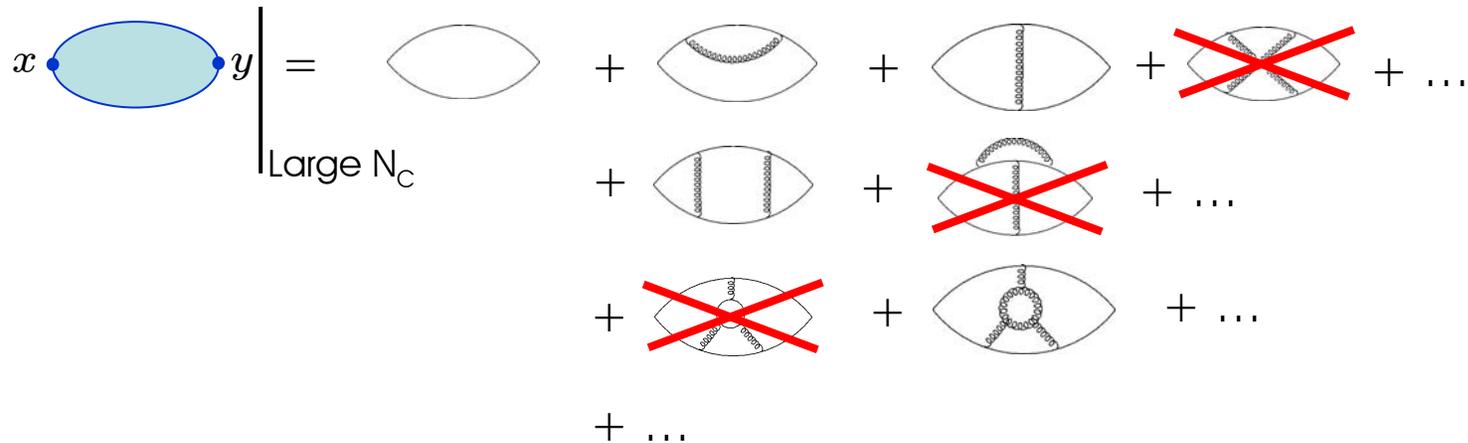
N_C^0

N_C

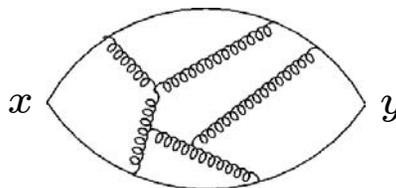
+ ...

En conclusion, dans la limite Large N_C :

$$\langle \Omega | T \{ : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) :: \bar{\psi}(y) \gamma^\nu \psi(y) : \} | \Omega \rangle$$



Plus généralement les diagrammes dominants dans cette limite sont du type



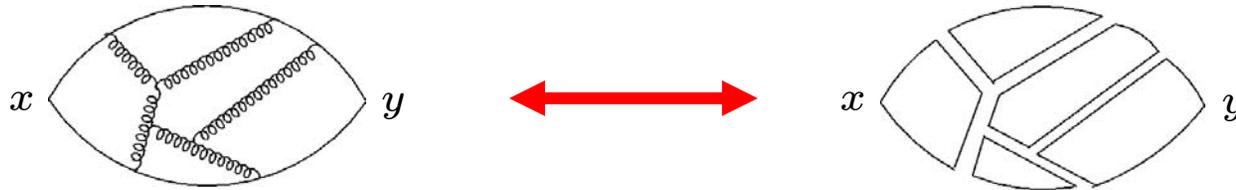
On effectue donc une classification (topologique) par « paquets » infinis de diagrammes de Feynman.

La resommation du « paquet » dominant n'a pas pu être calculée jusqu'ici mais peut être interprétée physiquement en terme de champs de mésons.

Les états intermédiaires

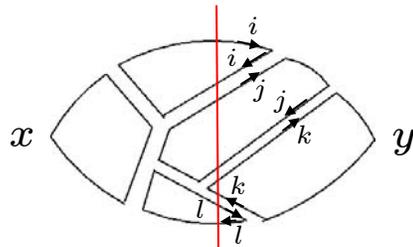
(de notre fonction à deux points)

Diagramme de Feynman typique



Les états intermédiaires sont une somme infinie d'états à un méson (rappel: méson \Rightarrow état lié quark - anti-quark)

Ceci est dû au confinement de couleur (les hadrons n'ont pas de couleur).



États intermédiaires

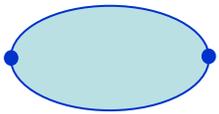
du type : $\bar{\psi}_l^0 G^{0l}_k G^{0k}_j G^{0j}_i \psi^{0i}$ (singlet de couleur indivisible)

Donc approximation perturbative d'un méson.

A contrario on ne peut pas avoir car c'est un état intermédiaire à 2 particules, typiquement non-planaire

$$\underbrace{\bar{\psi}_k^0 G^{0k}_l \psi^{0l}}_{\text{Singlet mésonique}} \underbrace{G^{0j}_m G^{0m}_j}_{\text{Singlet glueball}}$$

La resommation («non-perturbative») de tous les diagrammes planaires est donc une somme de propagateurs mésoniques



$$\left. \begin{array}{c} \text{Diagram} \\ \text{Large } N_c \end{array} \right| = \sum_n \frac{a_n^2}{k^2 - m_n^2}$$

inconnus

Donc fonction de Green méromorphe.

Non seulement interprétation mésonique, mais aussi grande simplicité. En fait, la somme est infinie (pour reproduire des contraintes de QCD perturbative).

Fonctions à deux points très importantes pour la physique des mésons. Permettent de connaître constantes de couplages de Lagrangiens effectifs, etc.

- Lien avec sommes harmoniques (cf. séminaire de D. Greynat) :

fonction de base	$g(k^2) = \frac{1}{k^2 - 1}$
amplitudes	$\lambda_n = \frac{a_n^2}{m_n^2}$
fréquences	$\mu_n = \frac{1}{m_n^2}$