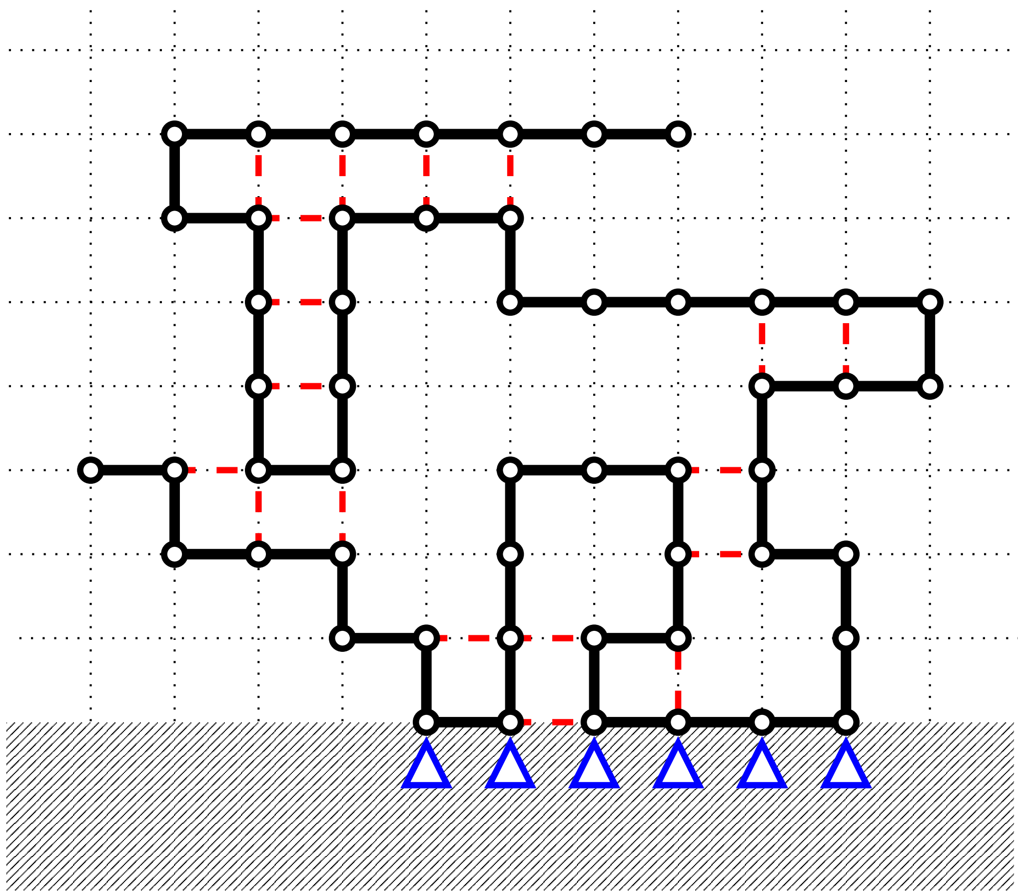
Interactions supérieures dans les chemins de Dyck

Yvan Le Borgne, LaBRI

17 janvier 2005

Modèle de polymère au voisinage d'une surface



Energie du polymère

$=$

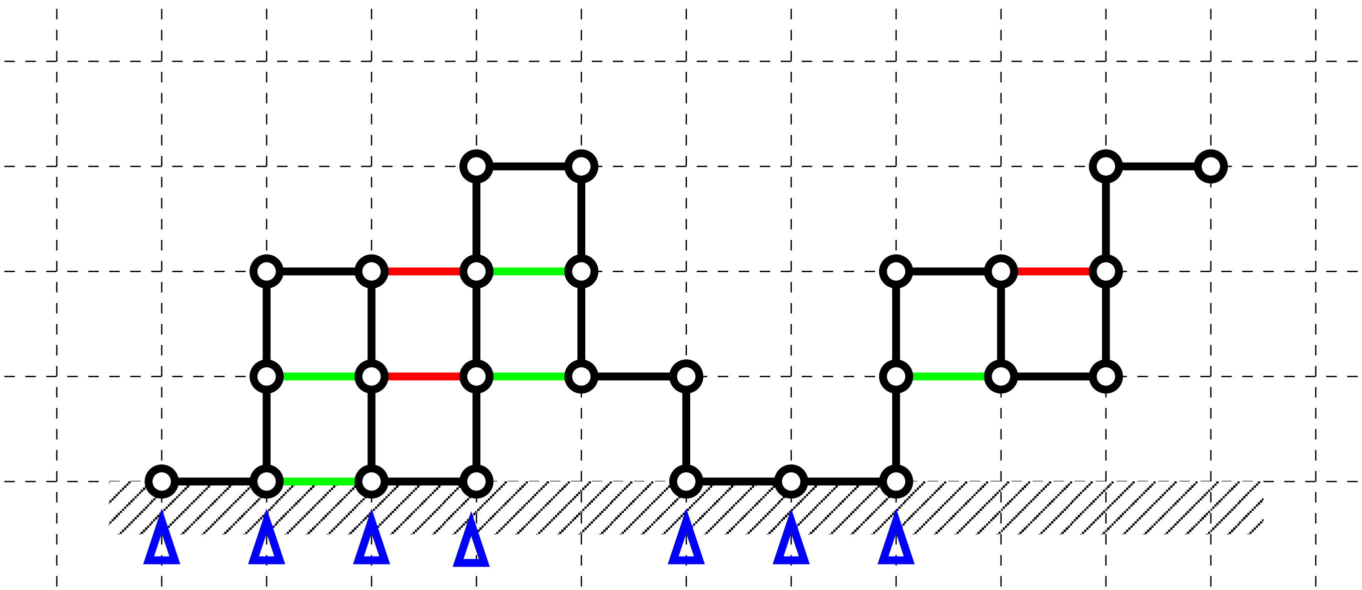
$\sum$ Energie des monomères

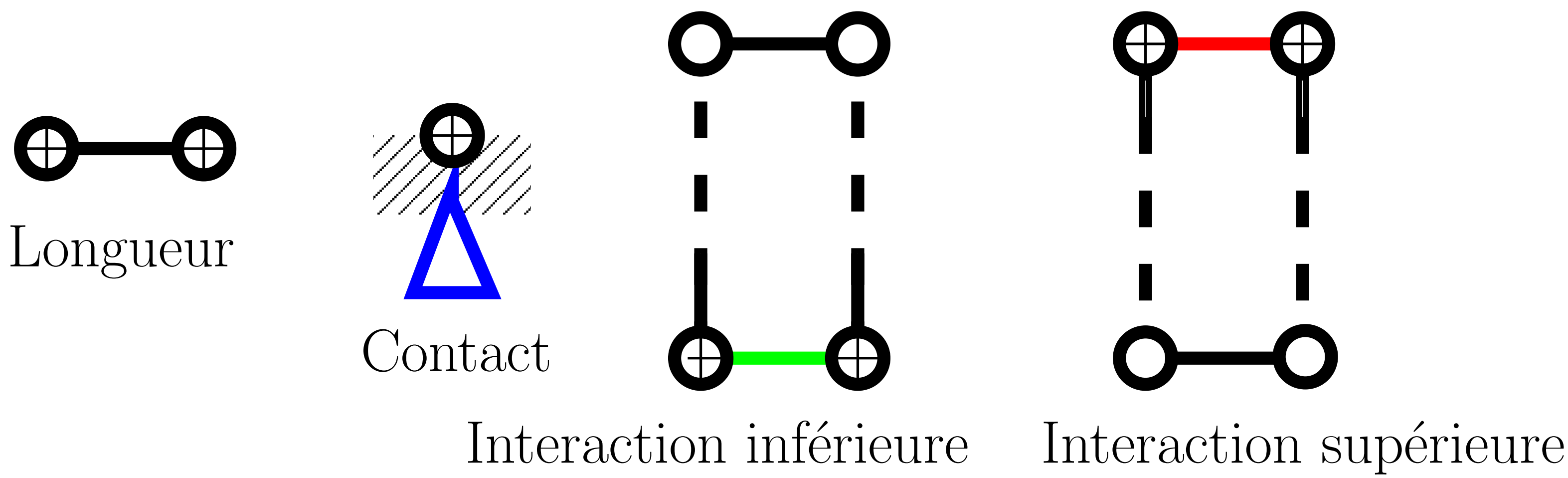
Energie d'un monomère

$=$

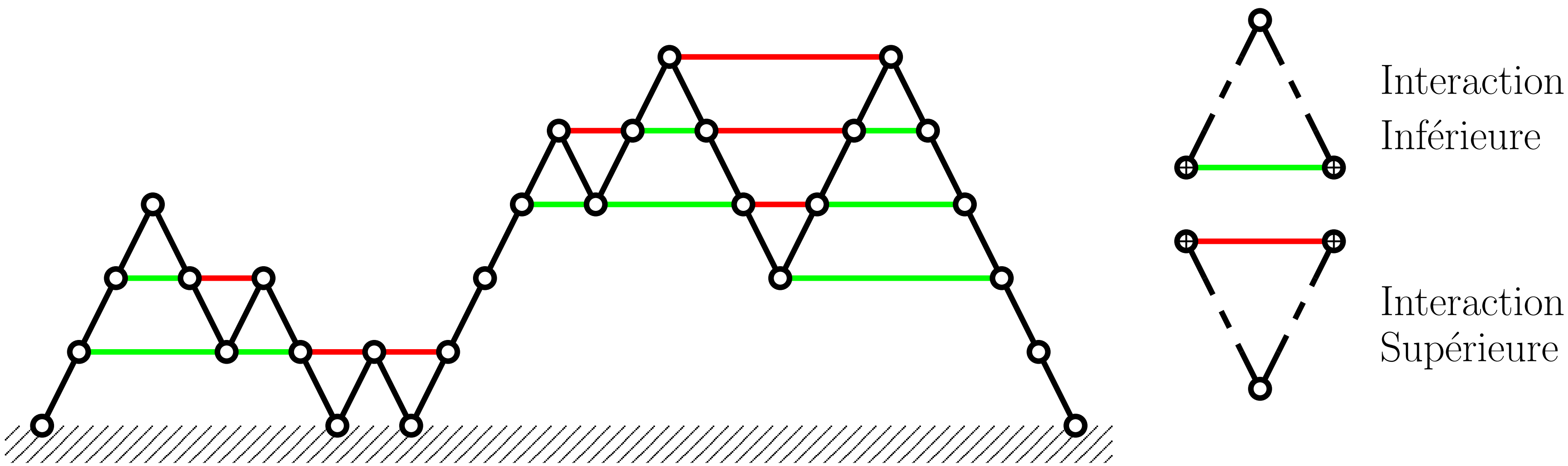
$f($ 4 voisins$)$

Une version simplifiée par les physiciens

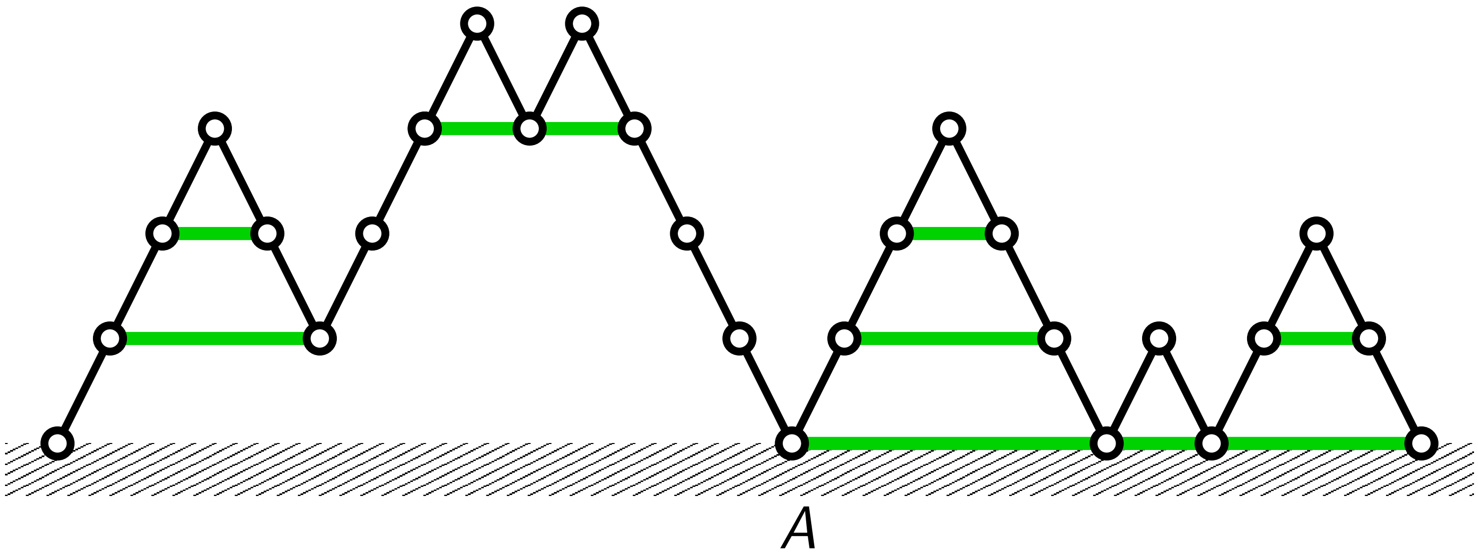




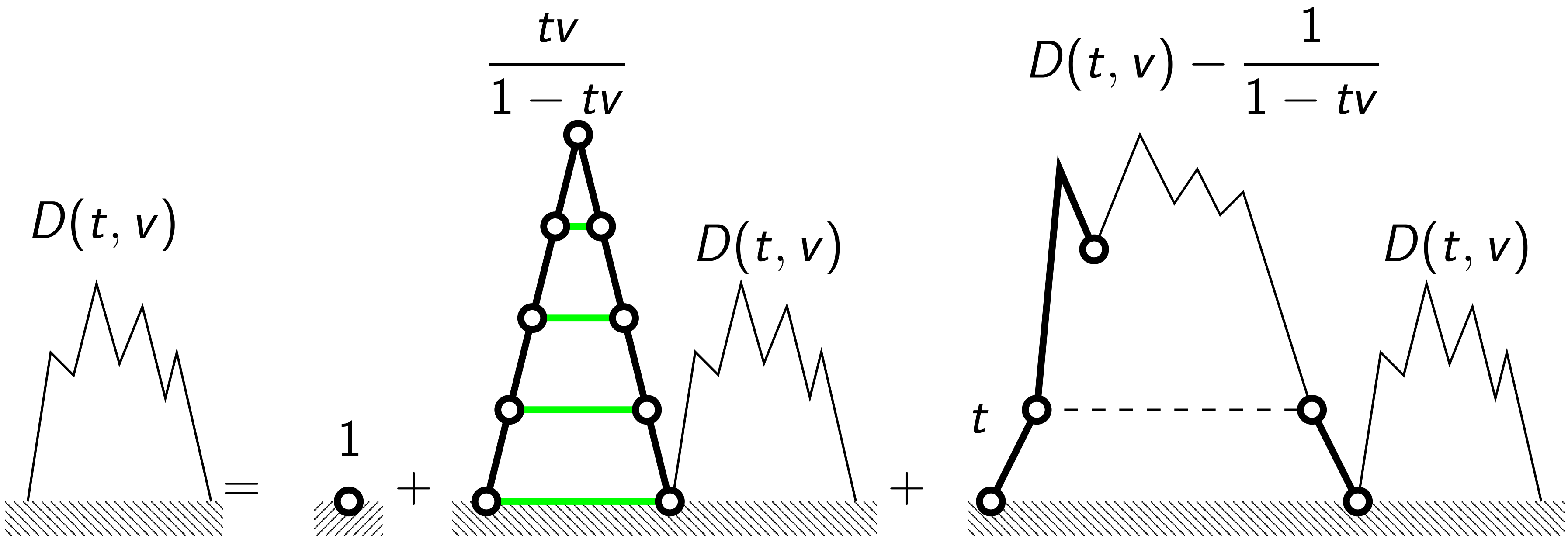
Une version resimplifiée pour la combinatoire



Interactions inférieures



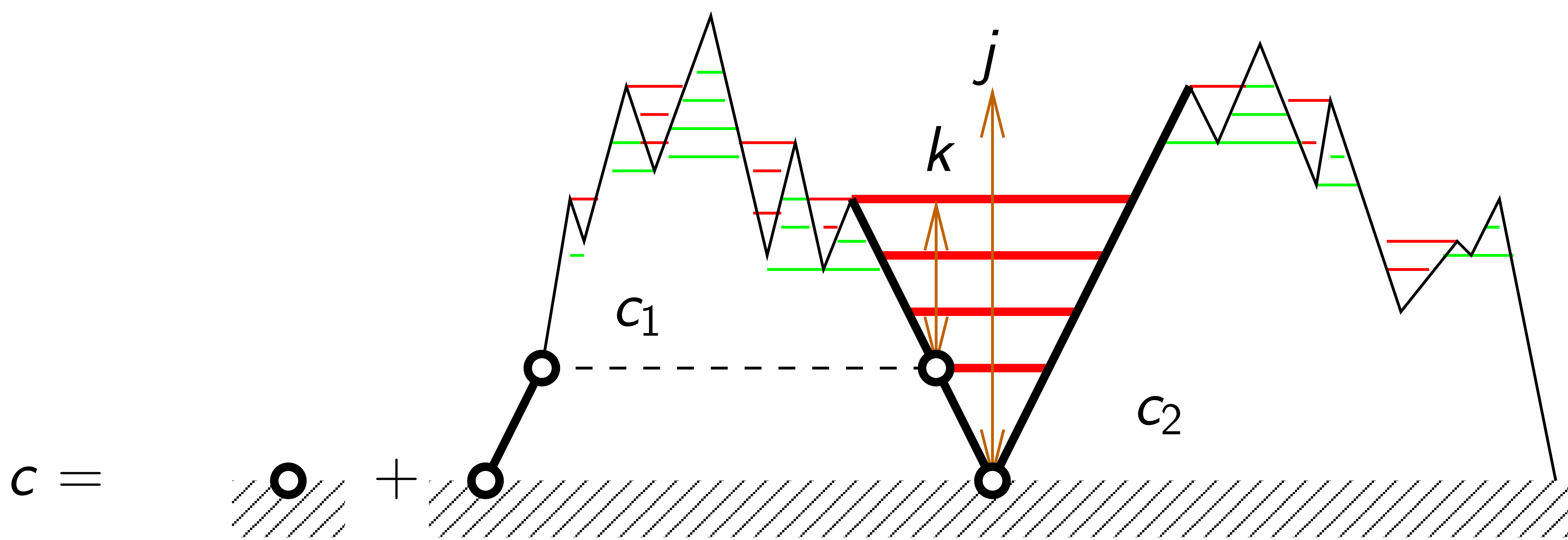
Interactions inférieures [Denise, Simion 95]



$$D(t,v) = 1 + \frac{tv}{1-tv} D(t,v) + t\left(D(t,v) - \frac{1}{1-tv}\right) D(t,v)$$

$$D(t,v) = \frac{1 + t - 2vt + \sqrt{(1-t)(1-(1+4v)t+4(vt)^2)}}{2t(1-vt)} \equiv \sigma.$$

La difficulté des interactions supérieures



$$inf(c) \simeq inf(c_1) + inf(c_2)$$
$$sup(c) = sup(c_1) + sup(c_2) + min(k+1, j)$$

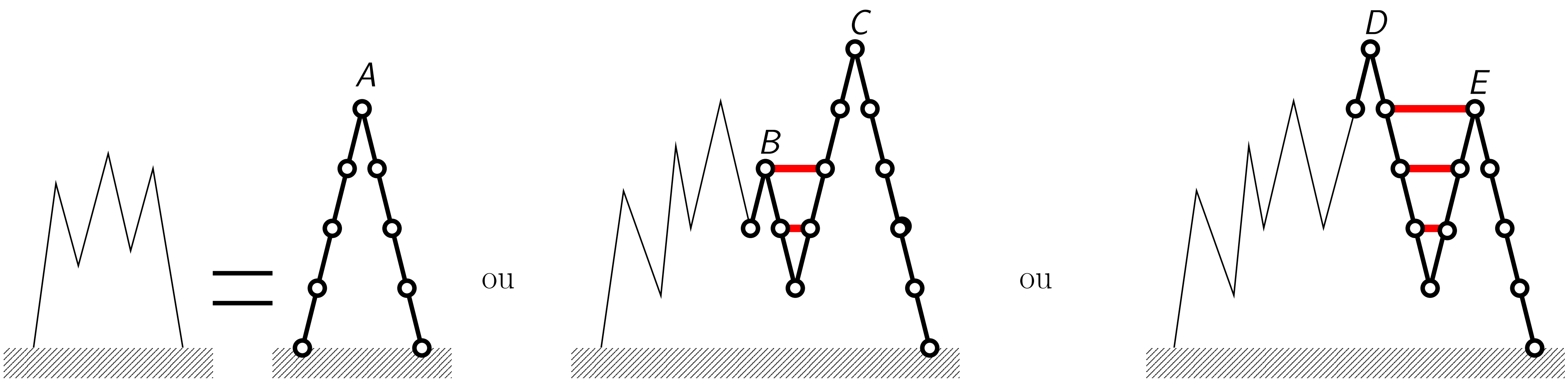
Plan

Trois approches pour énumérer les chemins de Dyck selon la demi-longueur et le nombre d'interactions supérieures :

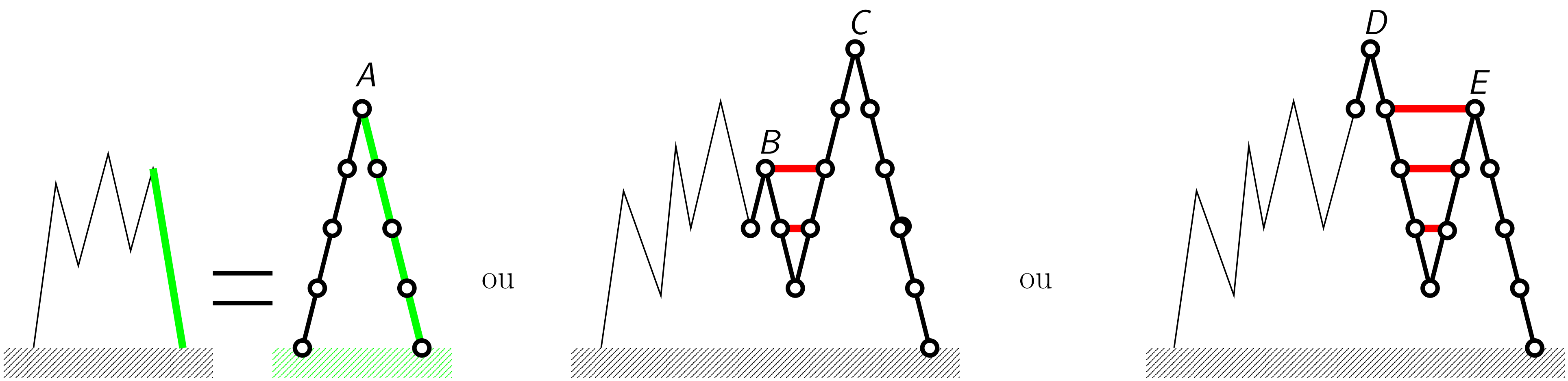
- Une équation fonctionnelle “ à la Temperley”.
- Une équation q-algébrique.
- Des interprétations combinatoires en termes d'empilements.

Utilisation d'une équation fonctionnelle à la Temperle

Mise en équation par strates

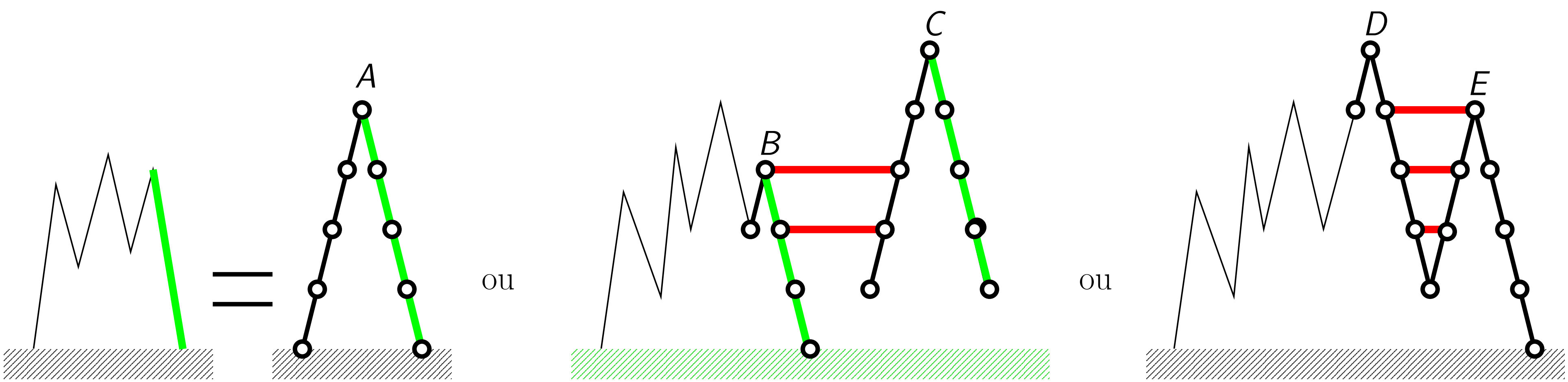


Mise en équation par strates



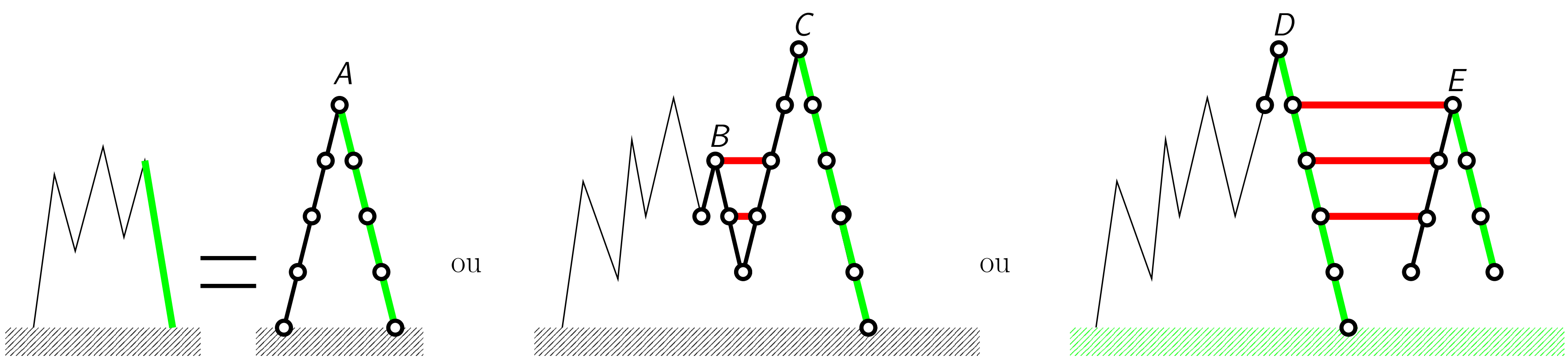
$D(t, u; s)$ $\qquad$ $\dfrac{ts}{1-ts}$

Mise en équation par strates



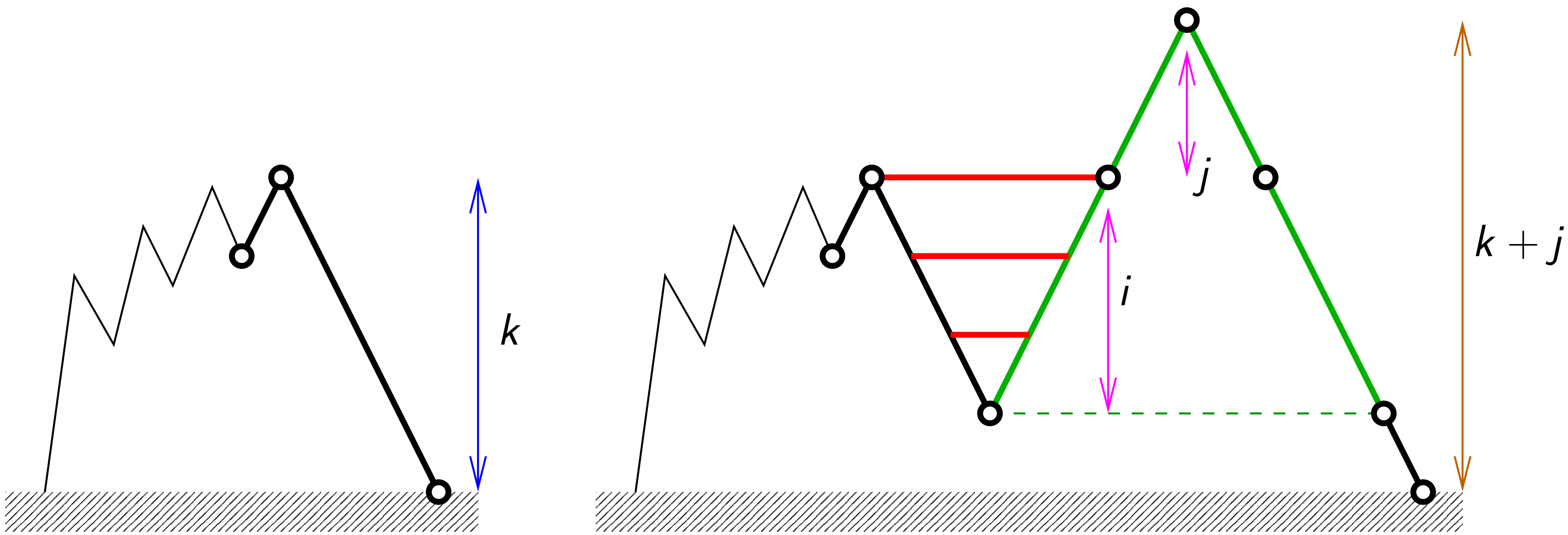
$$D(t,u;s) = \frac{ts}{1-ts} \quad \text{ou} \quad \frac{ut}{1-ut}\frac{ts}{1-ts}\left(D(t,u;s) - D(t,u;uts)\right)$$

Mise en équation par strates



$$D(t,u;s) = \frac{ts}{1-ts} + \frac{ut}{1-ut}\frac{ts}{1-ts}(D(t,u;s) - D(t,u;uts))$$
$$+\frac{ut}{1-ut}\left(\frac{s}{1-s}(D(t,u;1) - D(t,u;s)) - \frac{uts}{1-uts}(D(t,u;1) - D(t,u;uts))\right)$$

Ajout strictement croissant d'un pic



$$f_c(t,u)s^k$$

$$\sum_c f_c(t,u)s^k = D(s)$$

$$f_c(t,u)\sum_{i=1}^{k}\sum_{j\geq 1}(ut)^i s^k (ts)^j = f_c(t,u)\frac{ts}{1-ts}\frac{ut}{1-ut}(s^k-(uts)^k)$$

$$\frac{ts}{1-ts}\frac{ut}{1-ut}\sum_c f_c(t,u)(s^k-(uts)^k)$$

$$= \frac{ts}{1-ts}\frac{ut}{1-ut}(D(s)-D(uts))$$

Résolution algébrique de l'équation fonctionnelle

On pose $q = ut$ et on écrit l'équation sous la forme

$$D(s) = a(s) + b(s)D(1) + c(s)D(qs) + d(s)D(s).$$

- Une itération de l'équation élimine $D(qs)$.

$$D(t,u) = -\frac{t\sum_{n\geq 0}\left(\frac{(q-t)\sigma}{1-q}\right)^n \frac{q^{\binom{n+2}{2}-1}}{(q)_n(qt\sigma^2)_n}}{q\sum_{n\geq 0}\left(\frac{(q-t)\sigma}{1-q}\right)^n \frac{q^{\binom{n+2}{2}-1}}{(q)_n(qt\sigma^2)_n}\frac{(1-tq^n\sigma)}{(1-q^n\sigma)(1-q^{n+1}\sigma)}}$$

Résolution algébrique de l'équation fonctionnelle

On pose $q = ut$

$$D(s) = \alpha_N(s) + \beta_N(s)D(1) + \gamma_N(s)D(q^N s) + d(s)D(s).$$

- Une itération de l'équation élimine $D(qs)$.

$$D(t,u) = -\frac{t \sum_{n\geq 0} \left(\frac{(q-t)\sigma}{1-q}\right)^n \frac{q^{\binom{n+2}{2}-1}}{(q)_n(qt\sigma^2)_n}}{q \sum_{n\geq 0} \left(\frac{(q-t)\sigma}{1-q}\right)^n \frac{q^{\binom{n+2}{2}-1}}{(q)_n(qt\sigma^2)_n} \frac{(1-tq^n\sigma)}{(1-q^n\sigma)(1-q^{n+1}\sigma)}}$$

Résolution algébrique de l'équation fonctionnelle

On pose $q = ut$

$$D(s) = \alpha_\infty(s) + \beta_\infty(s)D(1) + d(s)D(s).$$

- Une itération de l'équation élimine $D(qs)$.
- La méthode du noyau élimine $D(s)$ et introduit σ.

$$D(t,u) = -\frac{t\sum_{n\geq 0}\left(\frac{(q-t)\sigma}{1-q}\right)^n \frac{q^{\binom{n+2}{2}-1}}{(q)_n(qt\sigma^2)_n}}{q\sum_{n\geq 0}\left(\frac{(q-t)\sigma}{1-q}\right)^n \frac{q^{\binom{n+2}{2}-1}}{(q)_n(qt\sigma^2)_n}\frac{(1-tq^n\sigma)}{(1-q^n\sigma)(1-q^{n+1}\sigma)}}$$

Résolution algébrique de l'équation fonctionnelle

On pose $q = ut$

$$(1 - d(s))D(s) = \alpha_\infty a(q^n s) + \beta_\infty b(q^n s)D(1).$$

- Une itération de l'équation élimine $D(qs)$.
- La méthode du noyau élimine $D(s)$ et introduit σ.

$$D(t,u) = -\frac{t\sum_{n\geq 0}\left(\frac{(q-t)\sigma}{1-q}\right)^n \frac{q^{\binom{n+2}{2}-1}}{(q)_n(qt\sigma^2)_n}}{q\sum_{n\geq 0}\left(\frac{(q-t)\sigma}{1-q}\right)^n \frac{q^{\binom{n+2}{2}-1}}{(q)_n(qt\sigma^2)_n}\frac{(1-tq^n\sigma)}{(1-q^n\sigma)(1-q^{n+1}\sigma)}}$$

Résolution algébrique de l'équation fonctionnelle

On pose $q = ut$

$$0 = \alpha_\infty(\sigma) + \beta_\infty(\sigma) D(1).$$

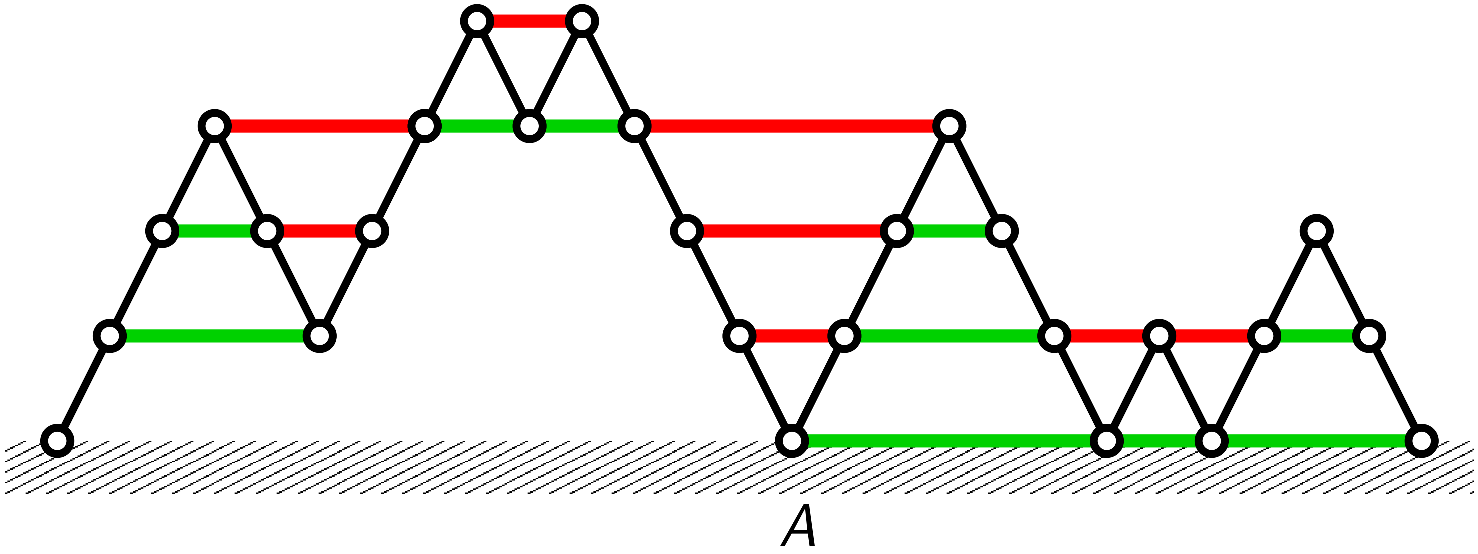
$$1 - d(\sigma) = 0.$$

- Une itération de l'équation élimine $D(qs)$.
- La méthode du noyau élimine $D(s)$ et introduit σ.
- On utilise les relations entre les racines du noyau.
- Une division permet d'exprimer $D(1)$.

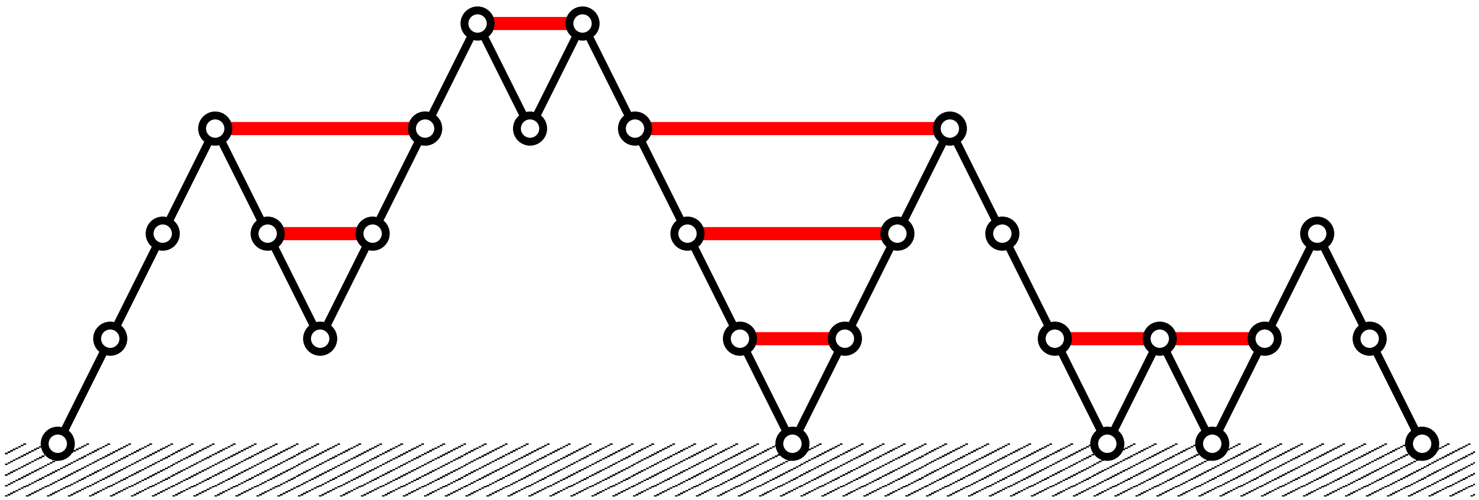
$$D(t,u) = -\frac{t \sum_{n \geq 0} \left(\frac{(q-t)\sigma}{1-q} \right)^n \frac{q^{\binom{n+2}{2}-1}}{(q)_n (qt\sigma^2)_n}}{q \sum_{n \geq 0} \left(\frac{(q-t)\sigma}{1-q} \right)^n \frac{q^{\binom{n+2}{2}-1}}{(q)_n (qt\sigma^2)_n} \frac{(1-tq^n\sigma)}{(1-q^n\sigma)(1-q^{n+1}\sigma)}}$$

Utilisation d'une équation q-algébrique

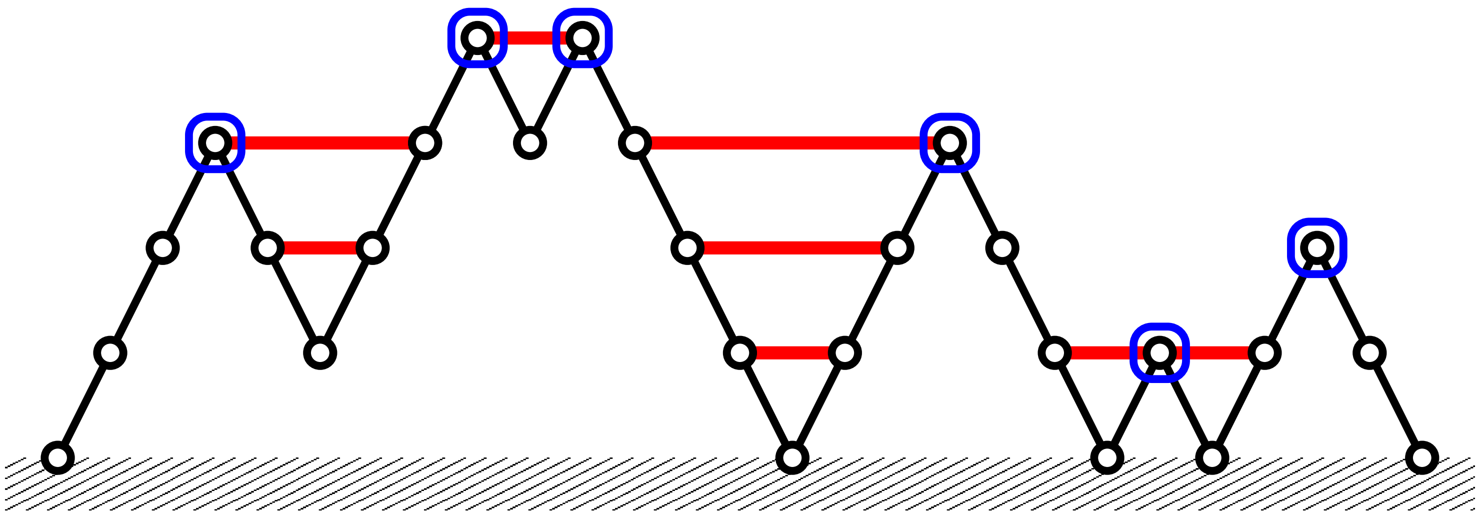
Une régularité liée aux interactions supérieures



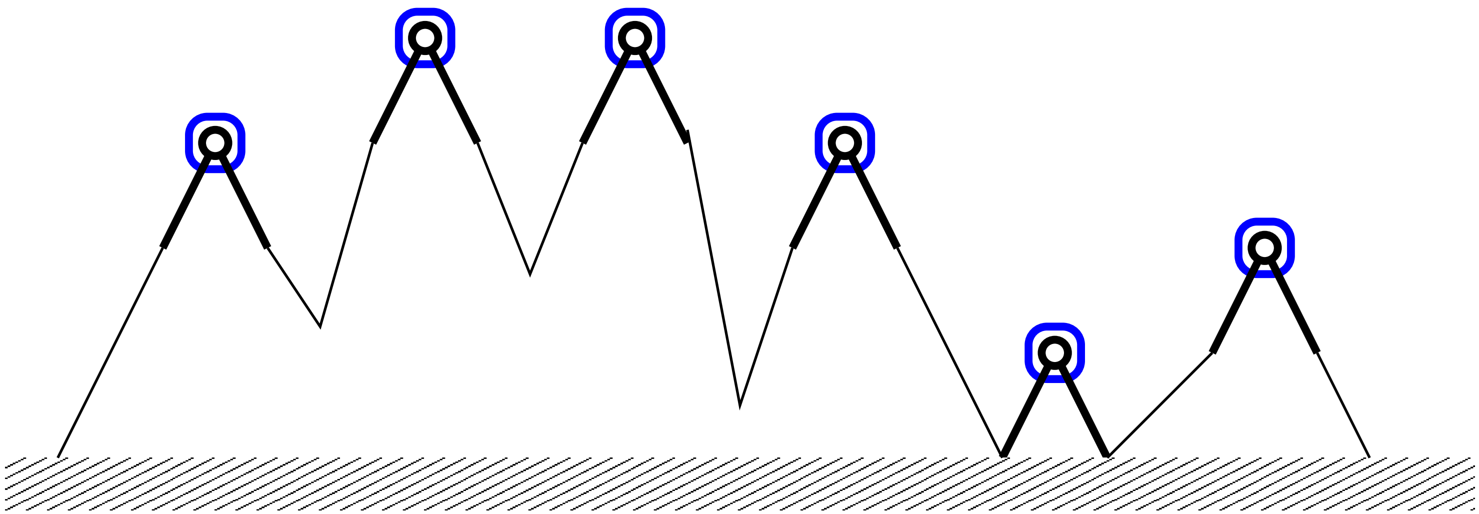
Changement de modèle



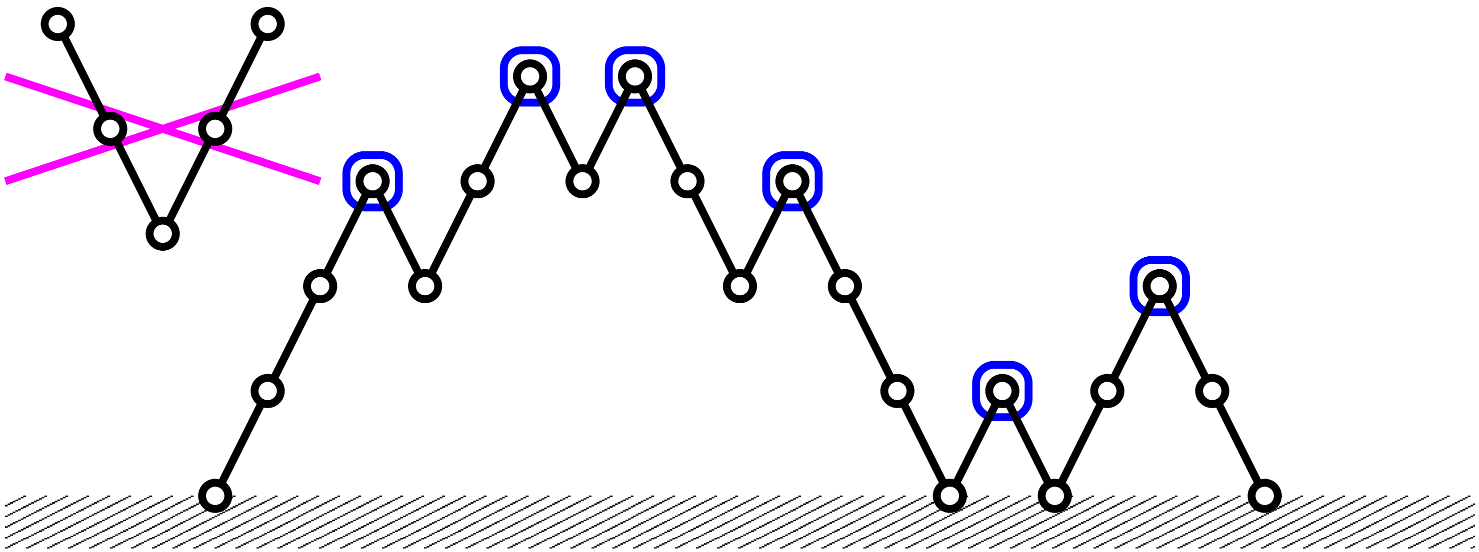
Changement de modèle



Changement de modèle

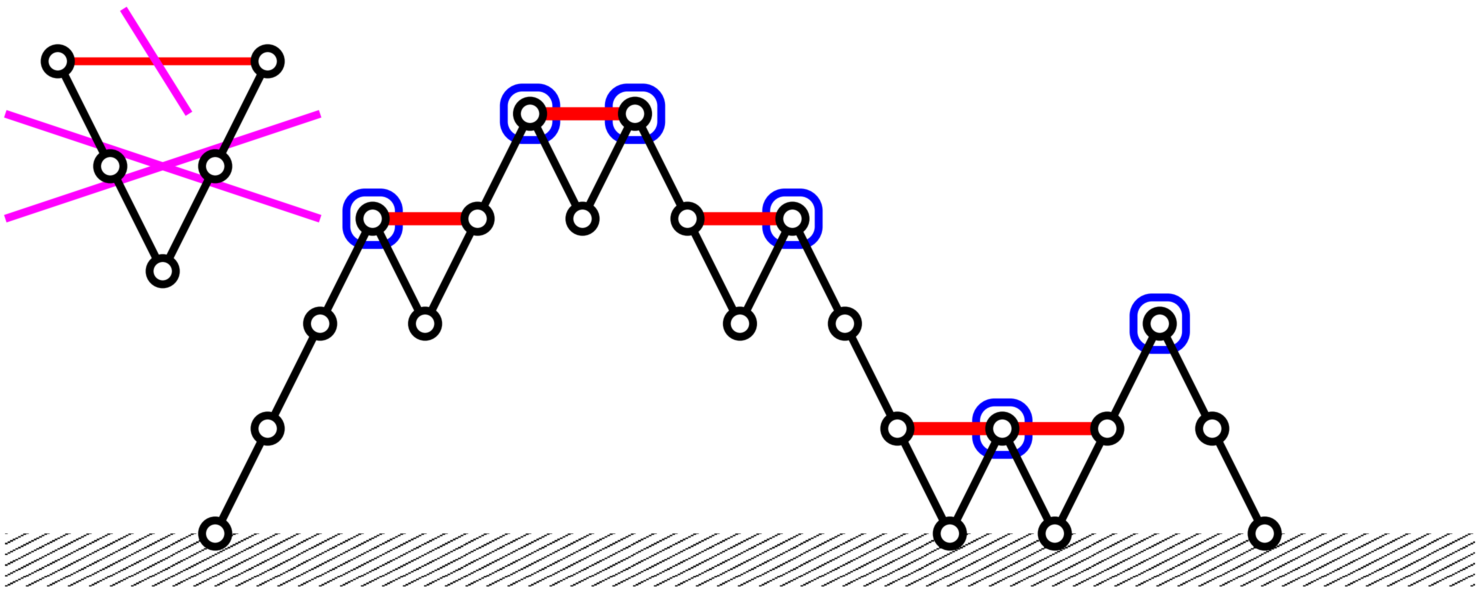


Changement de modèle



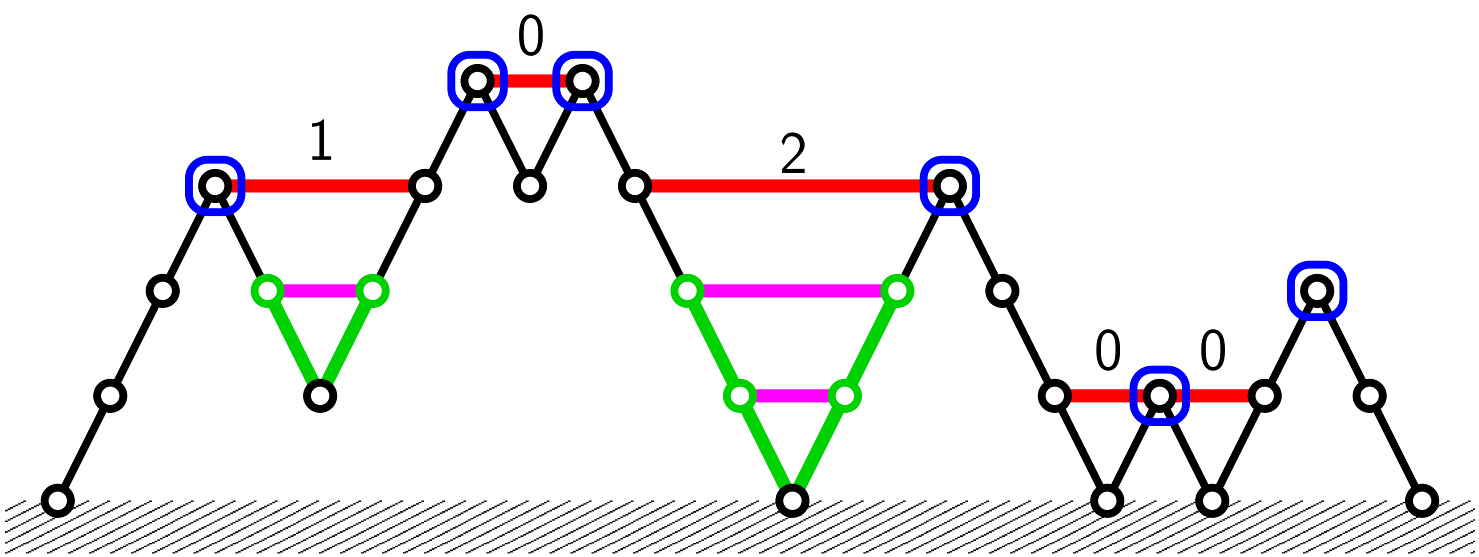
Les *chemins à petits creux* sont les chemins de Dyck évitant les double-creu

Changement de modèle



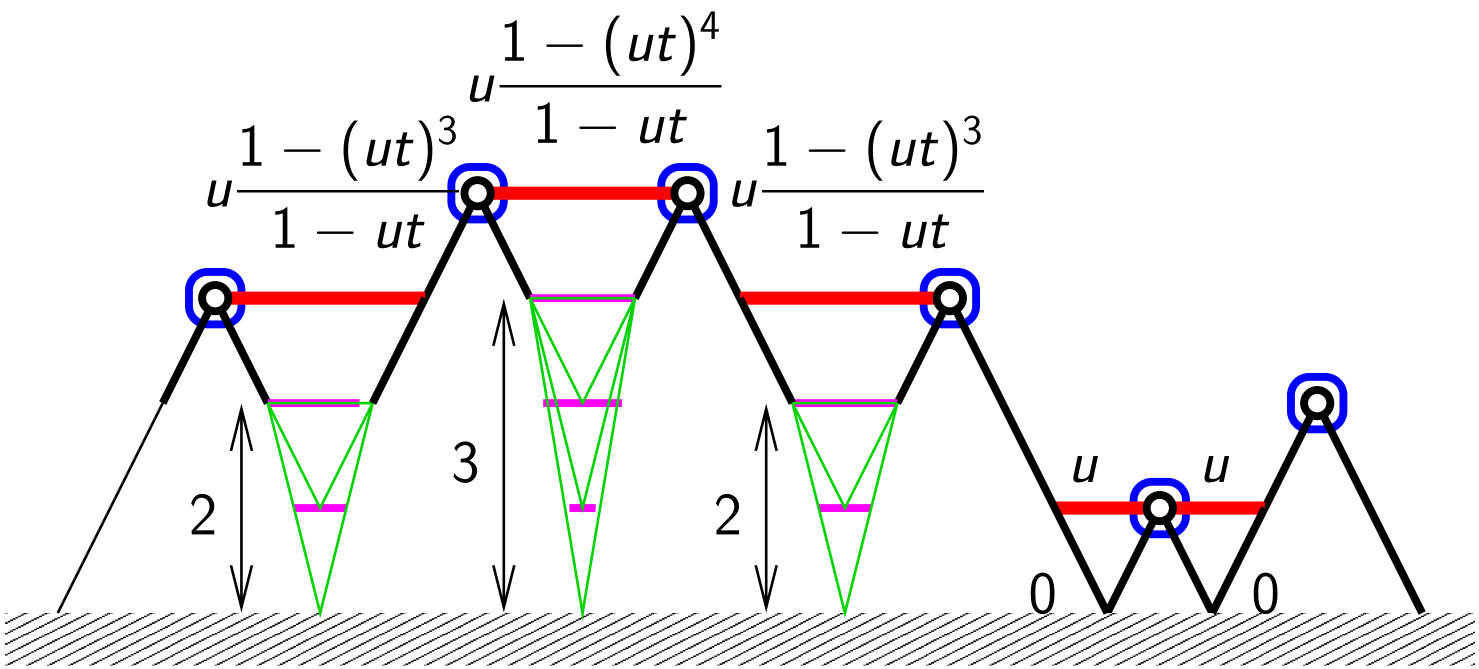
Les *chemins à petits creux* sont les chemins de Dyck évitant les double-creu

Changement de modèle



Les *chemins à petits creux* sont les chemins de Dyck évitant les double-creu

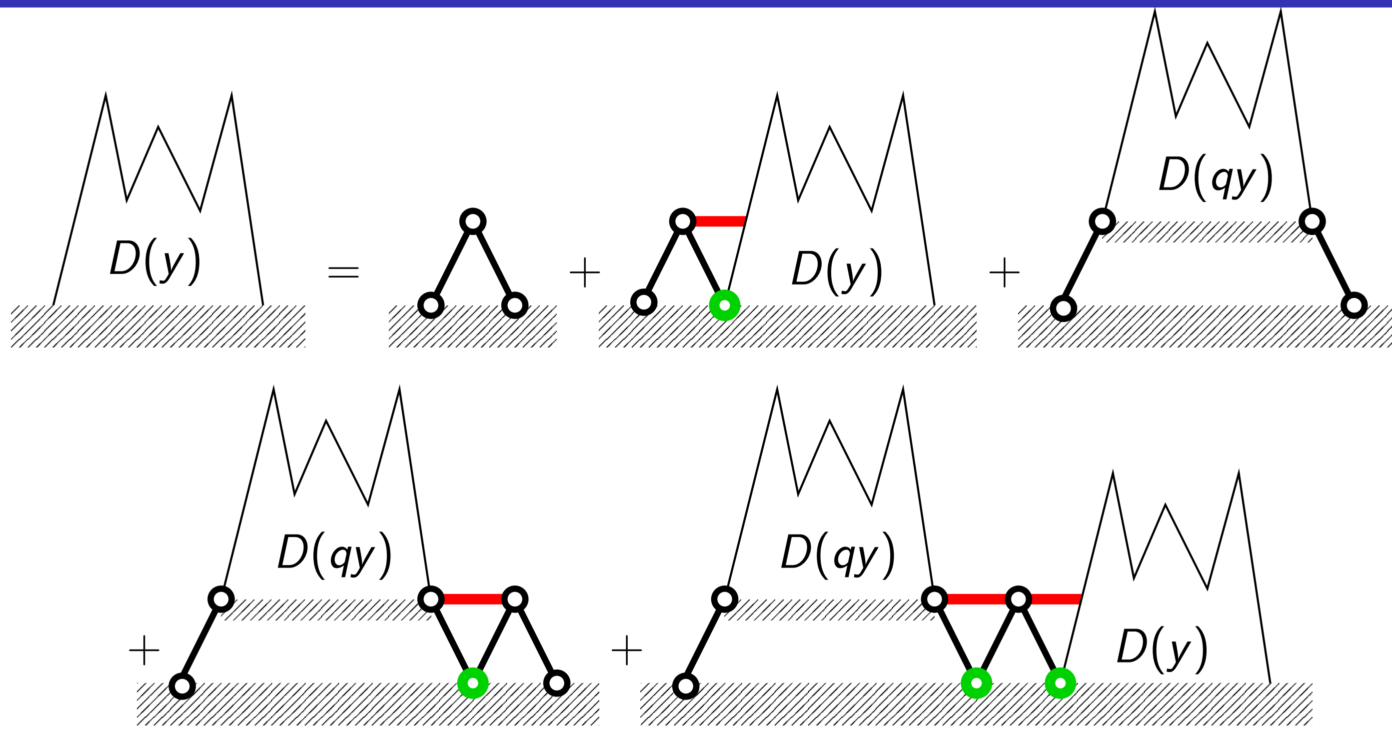
Changement de modèle



Les *chemins à petits creux* sont les chemins de Dyck évitant les double-creu

Un petit creux à la hauteur k est valué $\dfrac{q(1-q^{k+1}y)}{t(1-q)}$.

Une équation q-algébrique



$$\begin{aligned} D(y) &= t + t\frac{q(1-qy)}{t(1-q)}D(y) + tD(qy) \\ &\quad + t^2\frac{q(1-qy)}{t(1-q)}D(qy) + t^2\left(\frac{q(1-qy)}{t(1-q)}\right)^2 D(qy)D(y). \end{aligned}$$

Résolution de l'équation q-algébrique

On veut trouver $D(y=1)$ à partir de

$$D(y) + D(qy) + D(qy)D(y) + 1 = 0.$$

On change de fonction inconnue en posant

$$D(y) = \frac{\alpha H(qy) + \beta(y)H(y)}{\gamma(y)H(y)} \quad ou \quad D(y) = \frac{\gamma(y)H(qy)}{\alpha H(y) + \beta(y)H(qy)}$$

(Le premier changement au moins est inspiré de **[Brak et Prellberg 95]**)

$$\rightarrow H(y) + H(qy) + H(q^2y) = 0.$$

On résout directement ou bien en lisant **[Abramov, Petkovsek et Paule 98]**.

Rq: On peut mettre en équation à la Temperley avec y en plus.

Expression avec la variable y

$$D(y) = \frac{\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{tq^{2n+\binom{n+2}{2}}\sigma^{n+1}(q-t)^n}{(1-q)^n(q)_n(qt\sigma^2)_n} y^n}{\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{qq^{2n+\binom{n-1}{2}}\sigma^n(q-t)^{n-1}}{(1-q)^n} \frac{q(t\sigma q^{n-1})^2-(t\sigma q^{n-1})+1}{(q)_n(qt\sigma^2)_n} y^n}$$

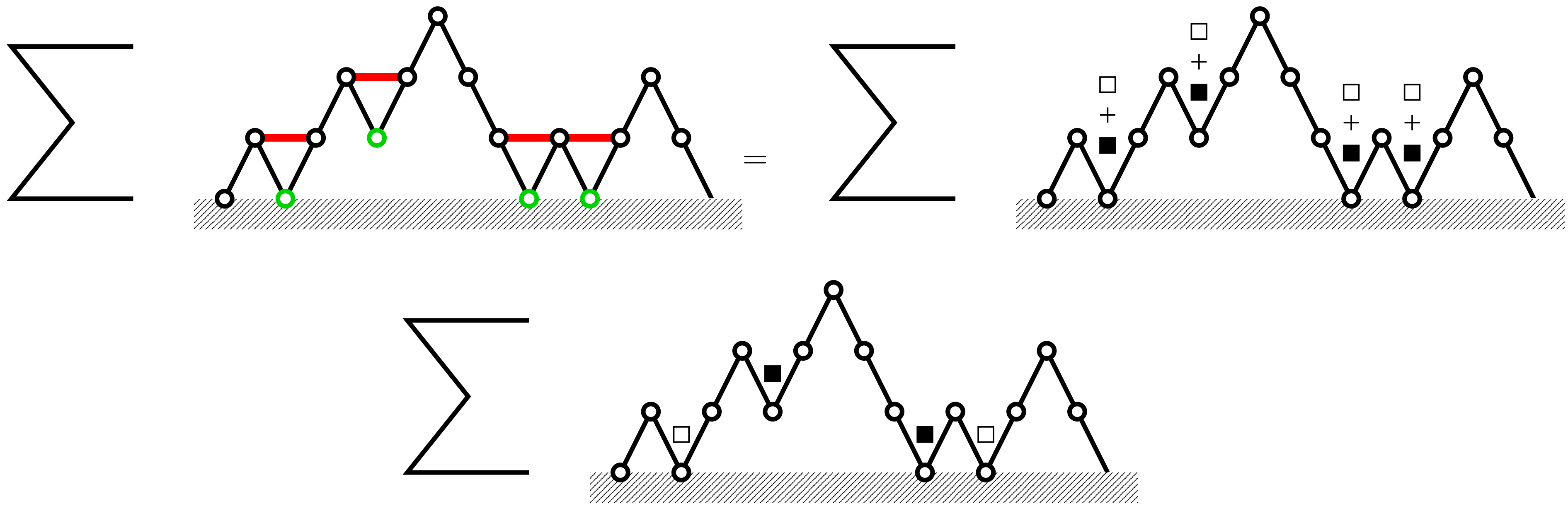
- L'ajout de la variable y ne modifie pas la valeur de $\sigma(t,q)$.

Interprétations combinatoires

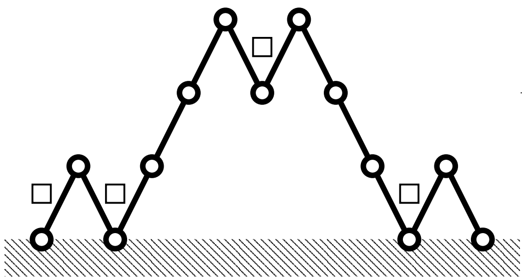
Chemins à petits creux bicolores

Valuation d'un petit creux à hauteur k:

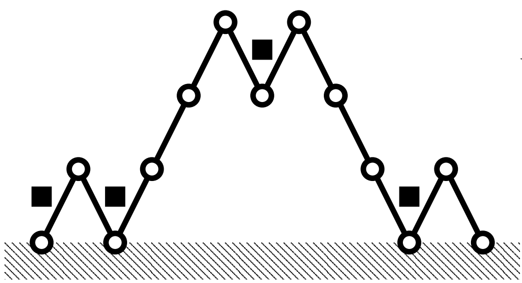
$$\frac{q(1-q^{k+1}y)}{t(1-q)} = \frac{q}{t(1-q)} + \frac{-q^{k+2}y}{t(1-q)} = \square + \blacksquare.$$



Interprétations combinatoires d'éléments de la formule

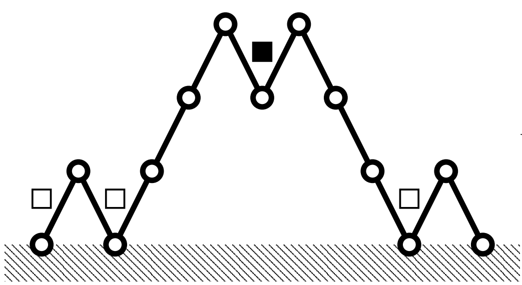


$$\longleftrightarrow \qquad \sigma$$



$$\longleftrightarrow \quad \frac{t \displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(q-t)^{n+1} q^{\binom{n+2}{2}} y^n}{(1-q)^n (q)_n (t/q)_{n+2}}}{q^2 \displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(q-t)^{n+1} q^{\binom{n+1}{2}} y^n}{(1-q)^n (q)_n (t/q)_n}}$$

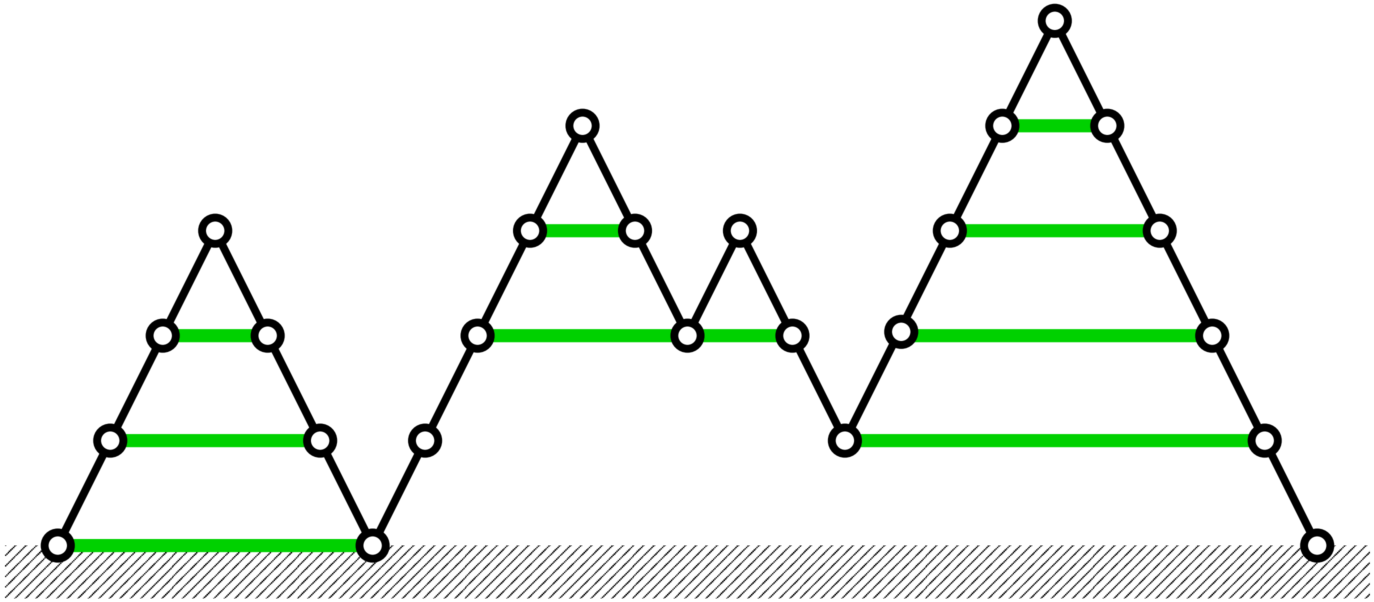
Lien avec **[JvR00]**



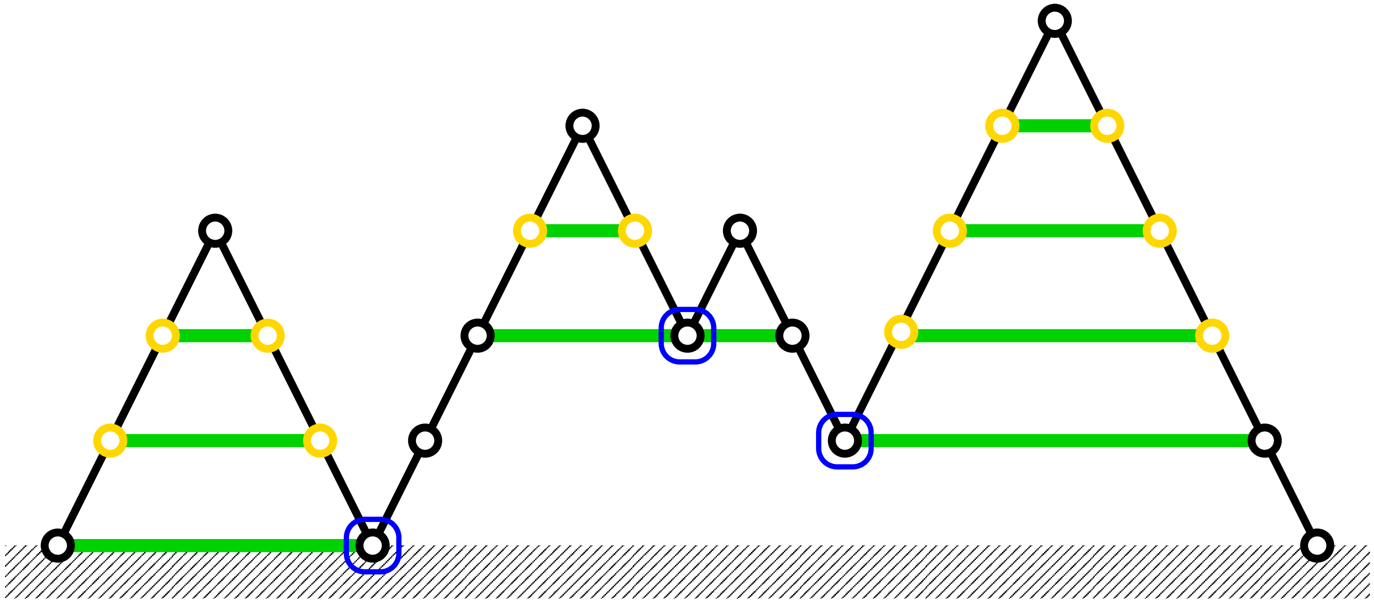
$$\longleftrightarrow \quad t^2\sigma \frac{\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{q^{6n} t^n \sigma^n y^n}{(q-1)^{3n} (q)_n (qt\sigma^2)_n}}{\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{q^{5n} t^n \sigma^n y^n}{(q-1)^{3n} (q)_n (qt\sigma^2)_n}}$$

+ conditions simplificatrices

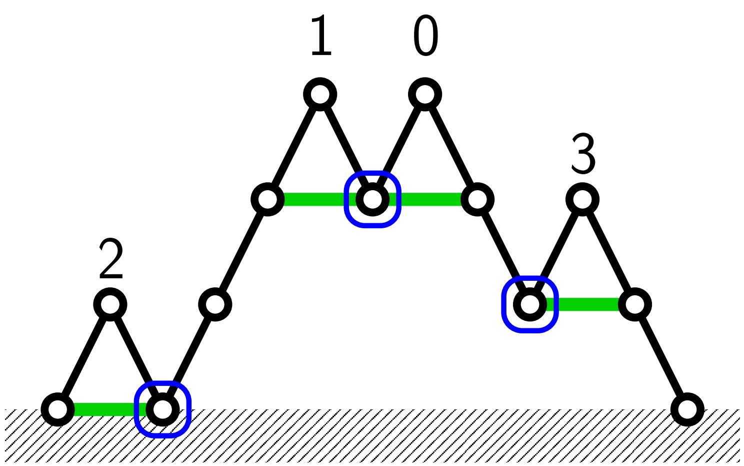
Une autre interpretation de σ



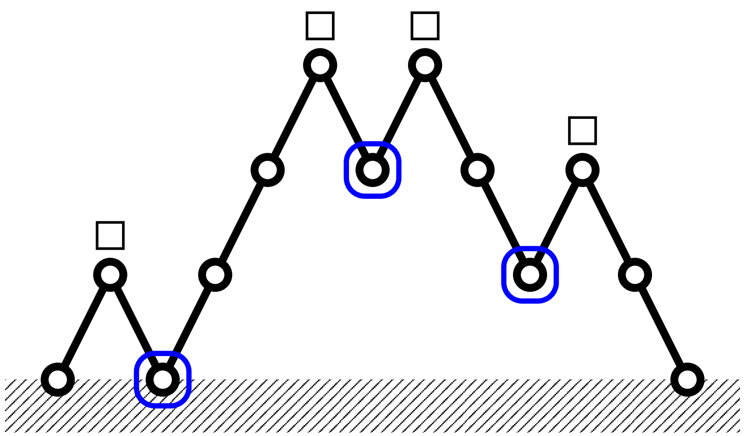
Une autre interpretation de σ



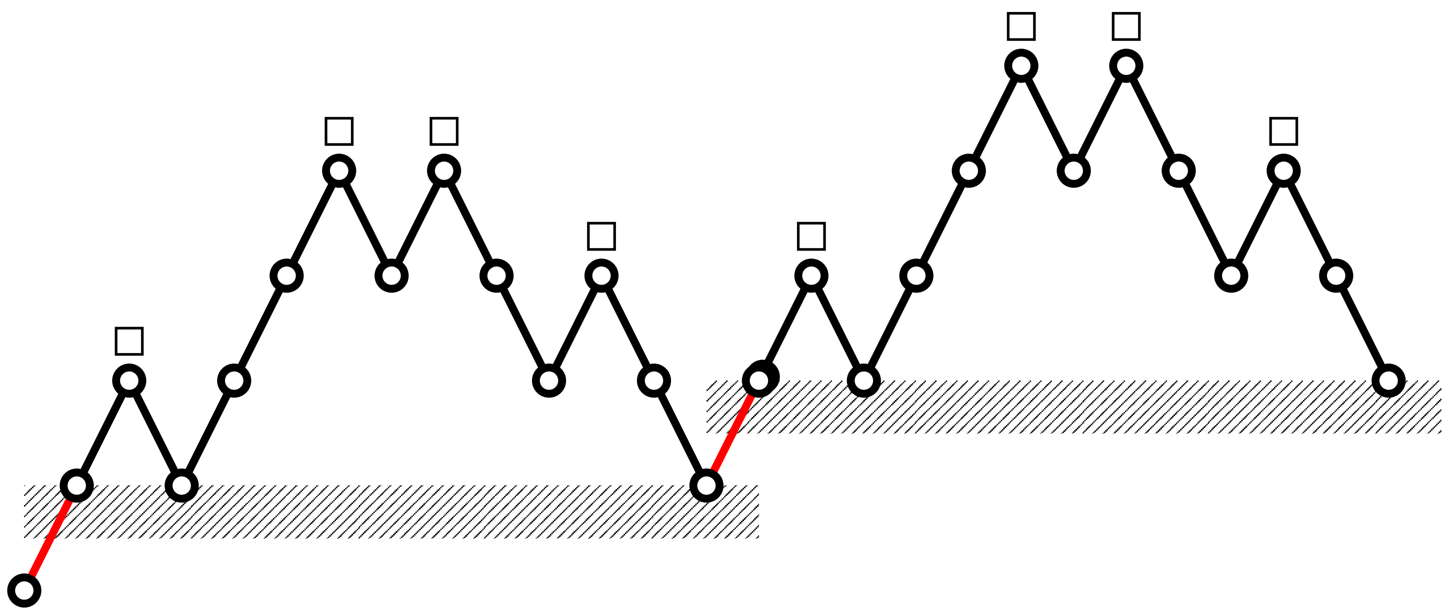
Une autre interpretation de σ



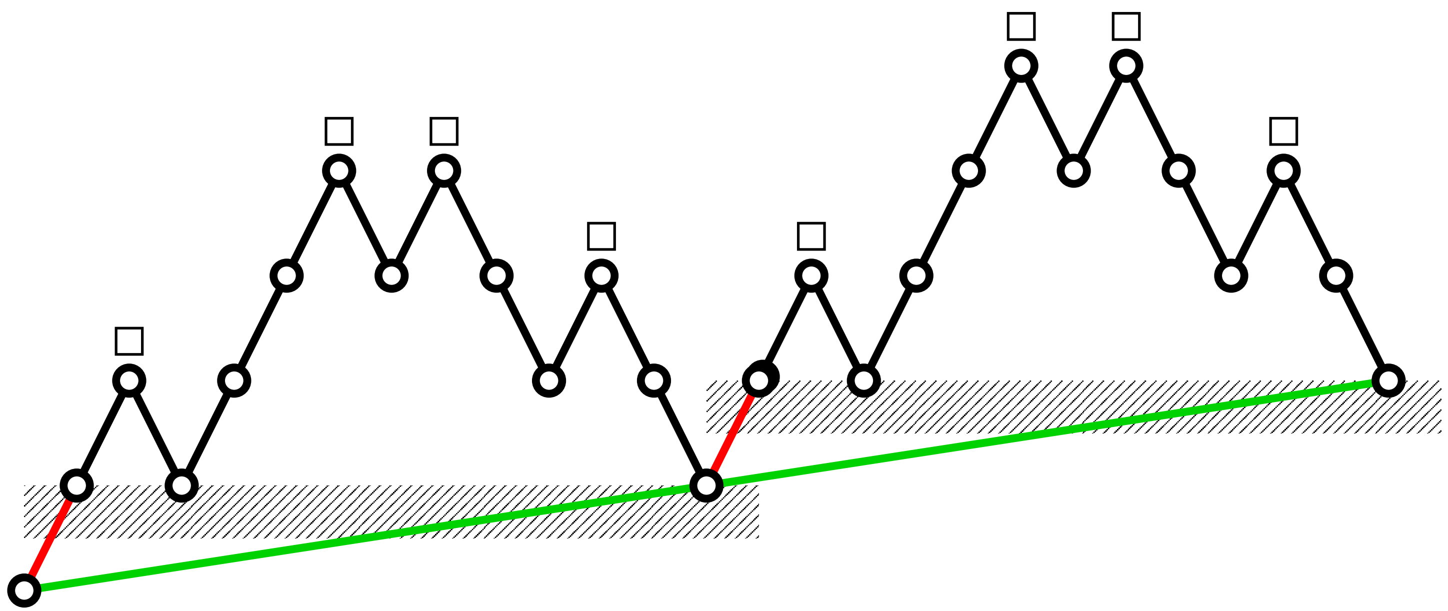
Une autre interpretation de σ



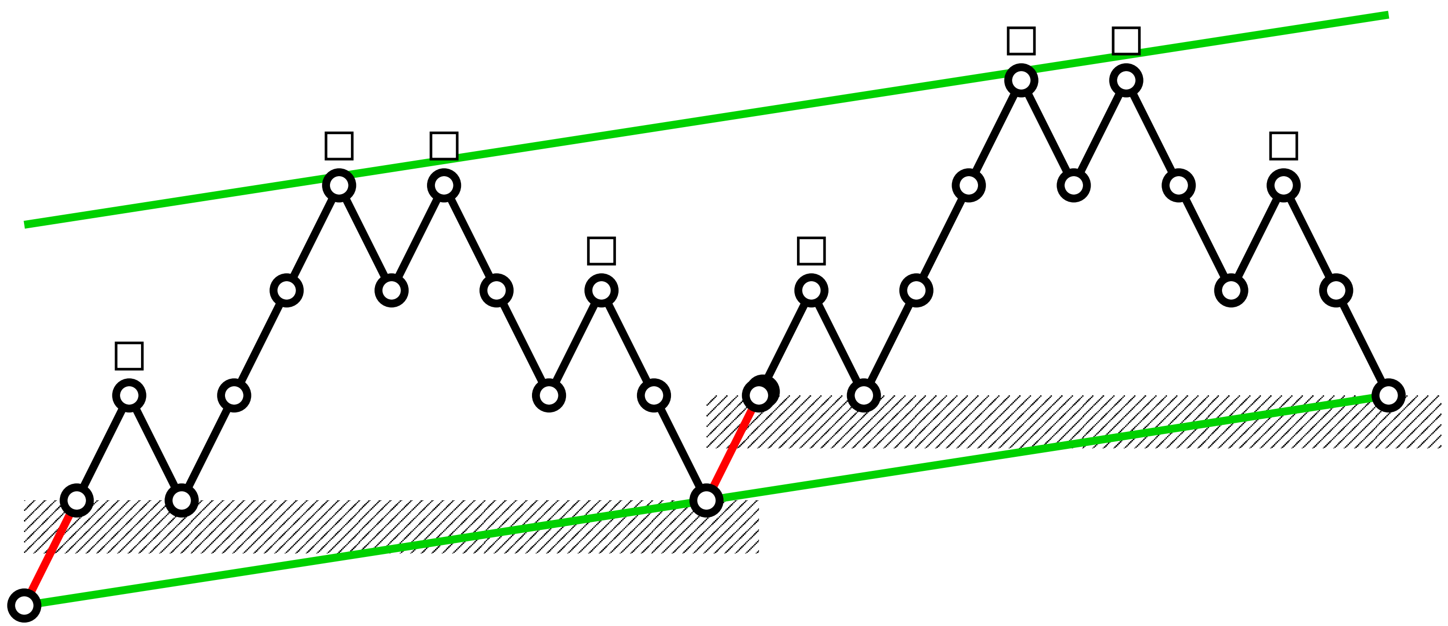
Une autre interpretation de σ



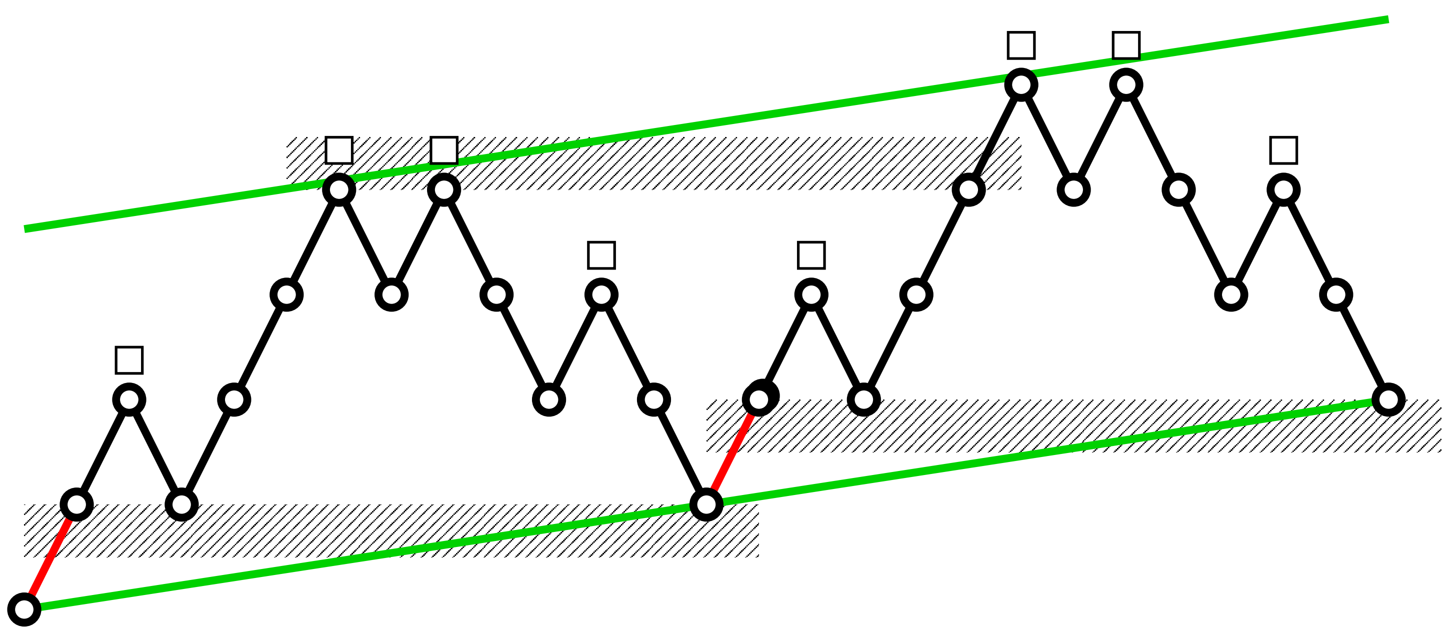
Une autre interpretation de σ



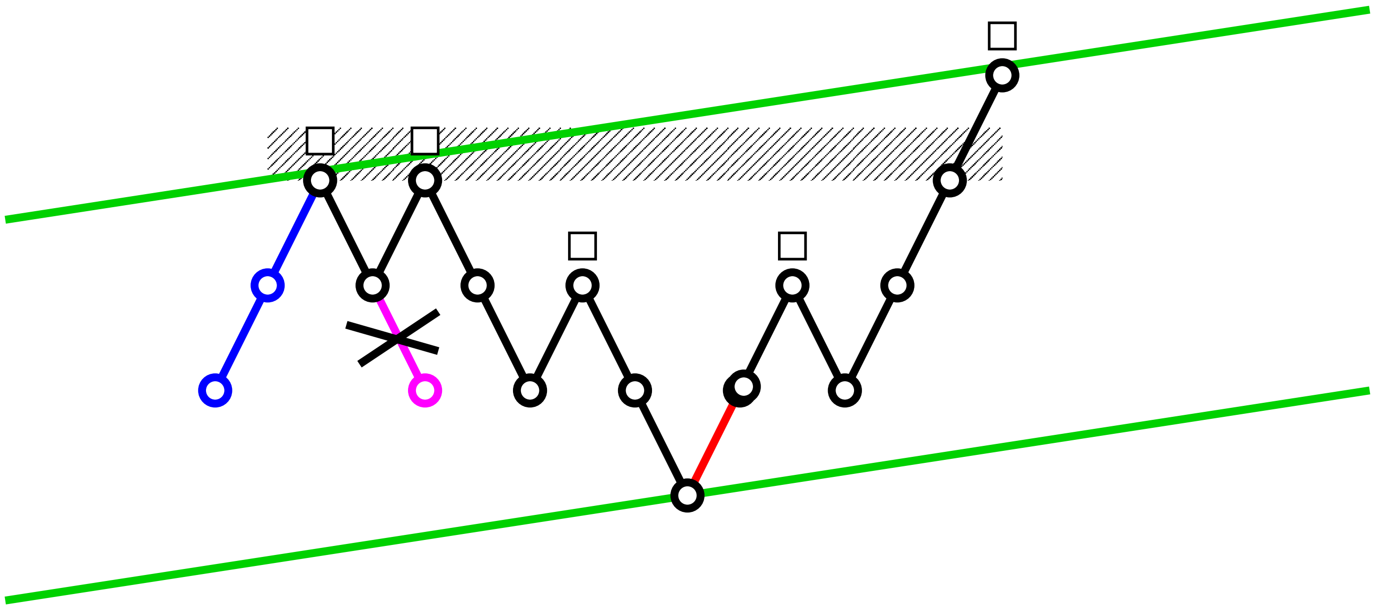
Une autre interpretation de σ



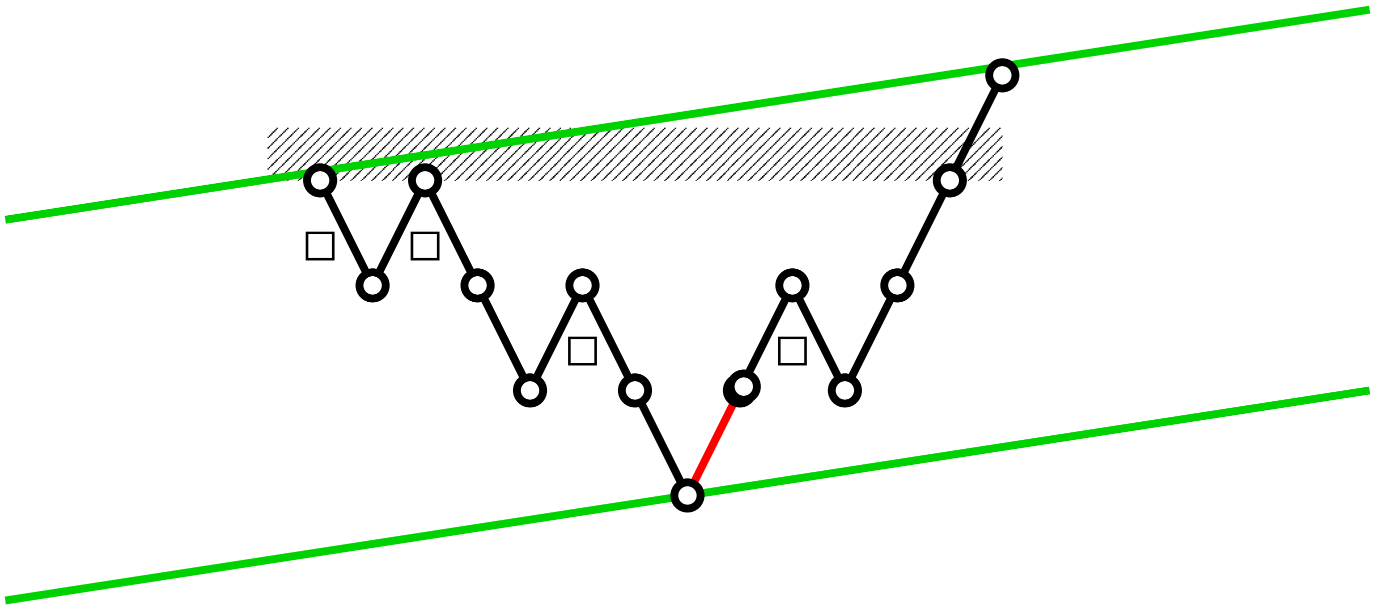
Une autre interpretation de σ



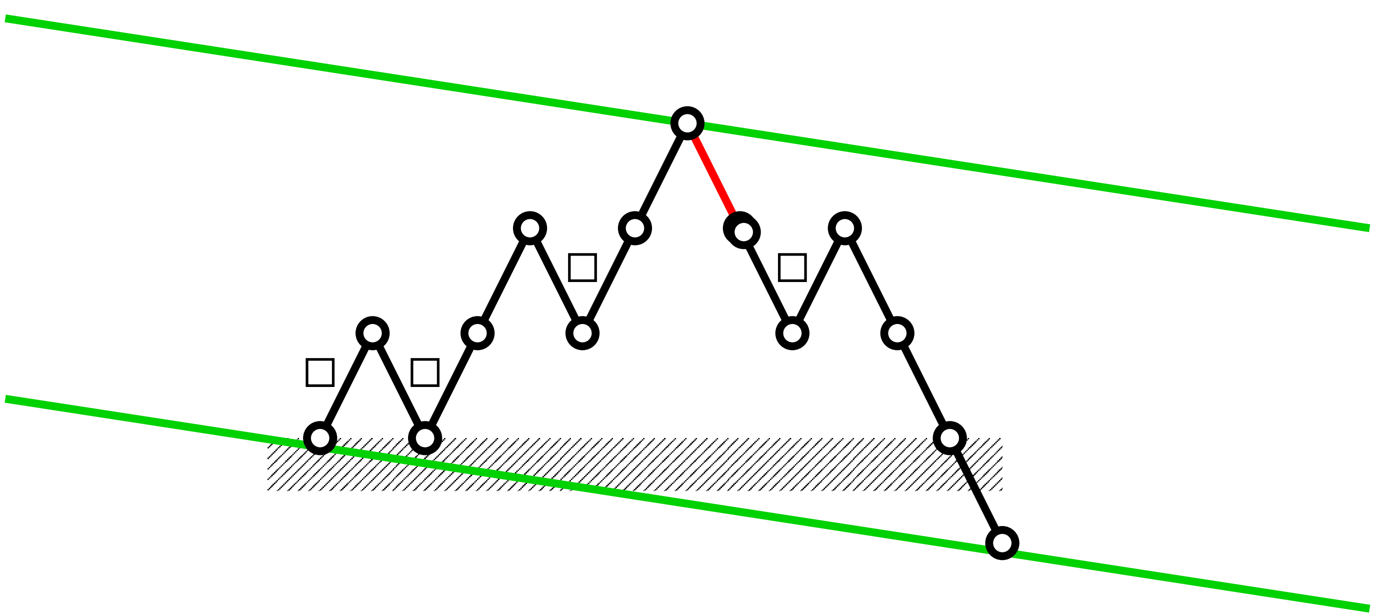
Une autre interpretation de σ



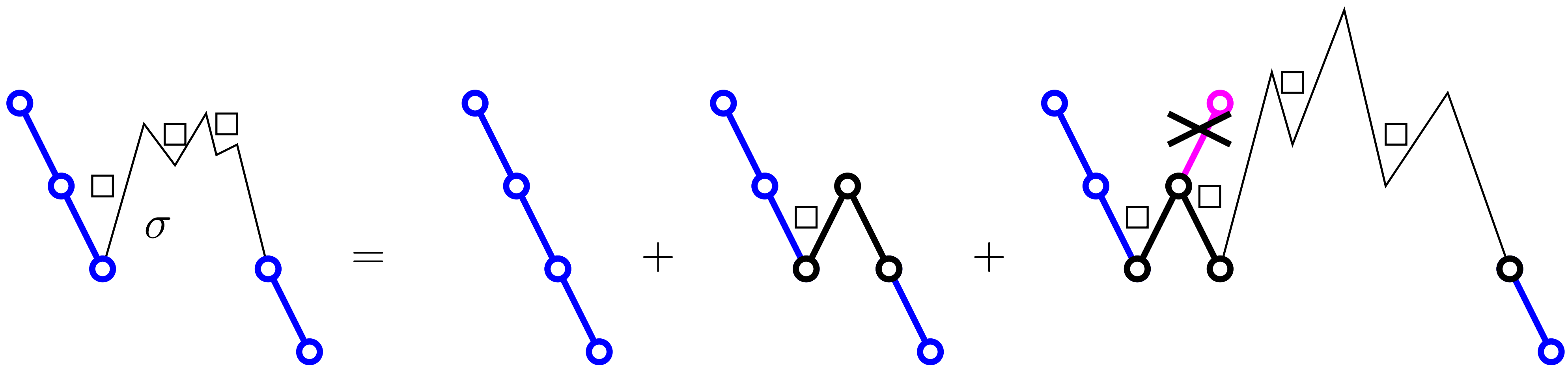
Une autre interpretation de σ



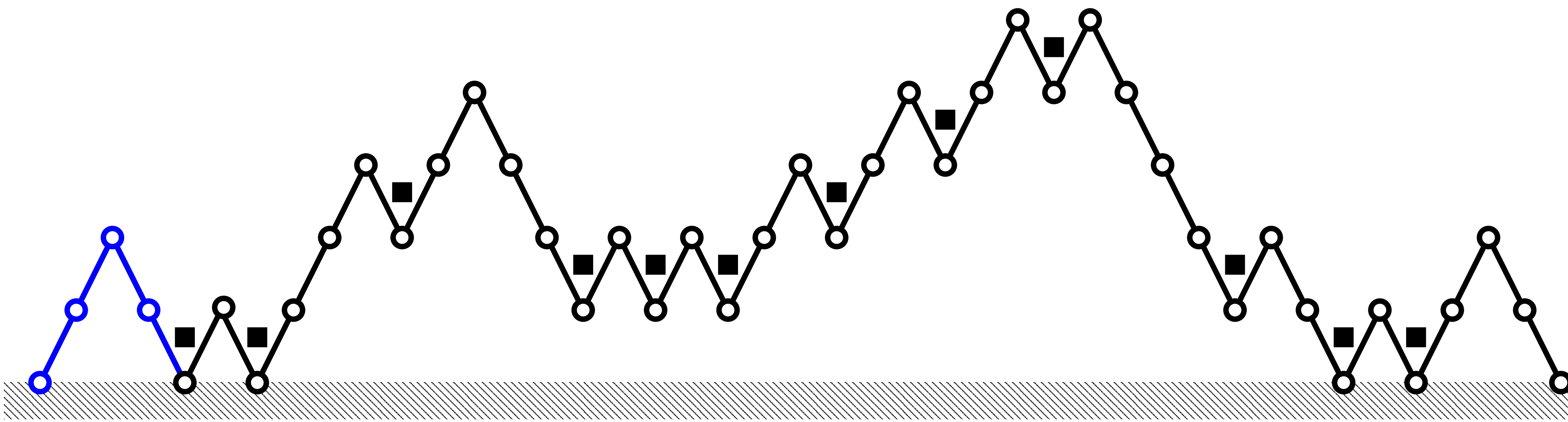
Une autre interpretation de σ



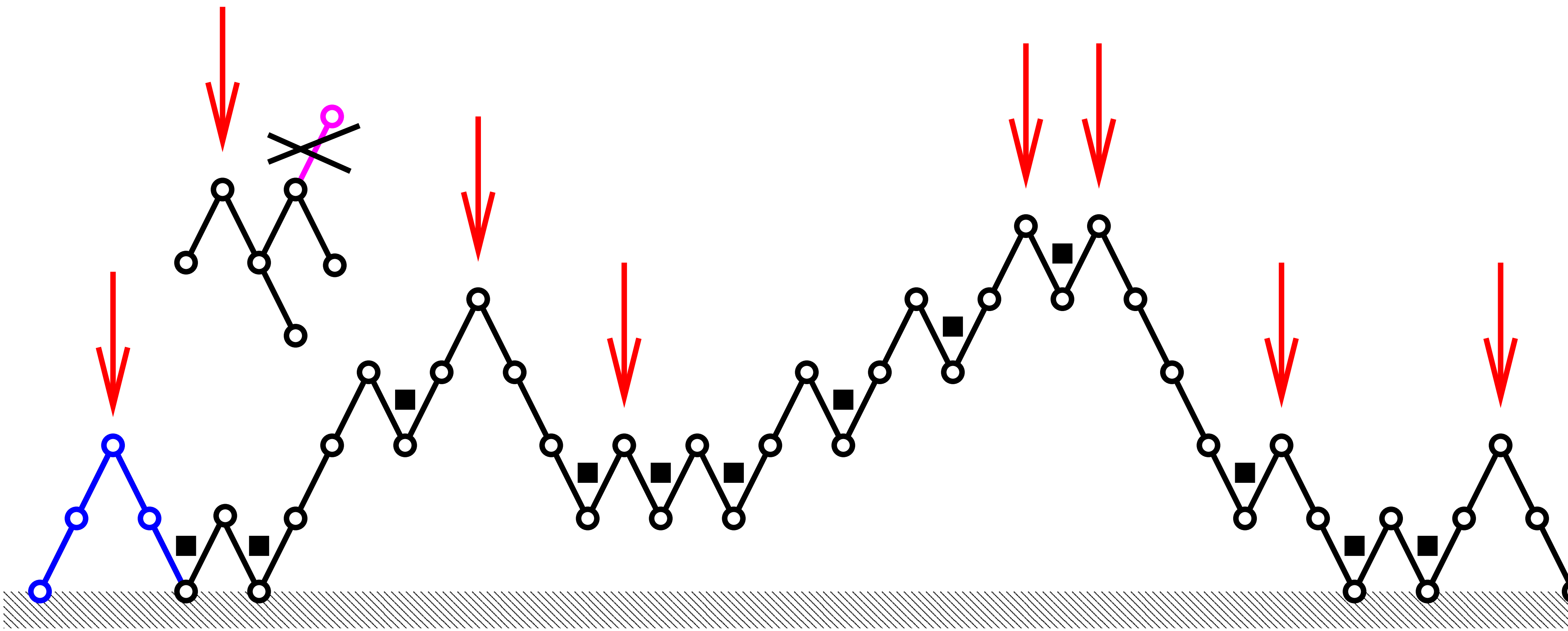
Une autre interpretation de σ: les chemins à petits creux blancs après une double descente



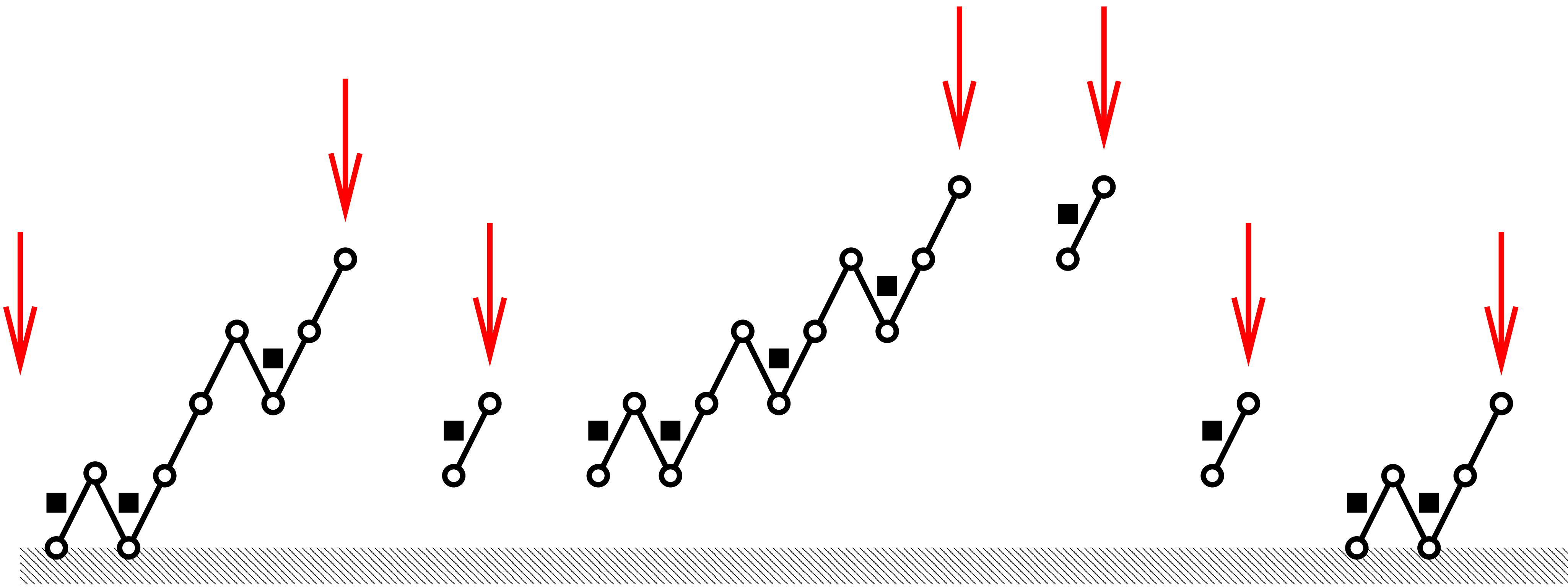
Les chemins à petits creux noirs :



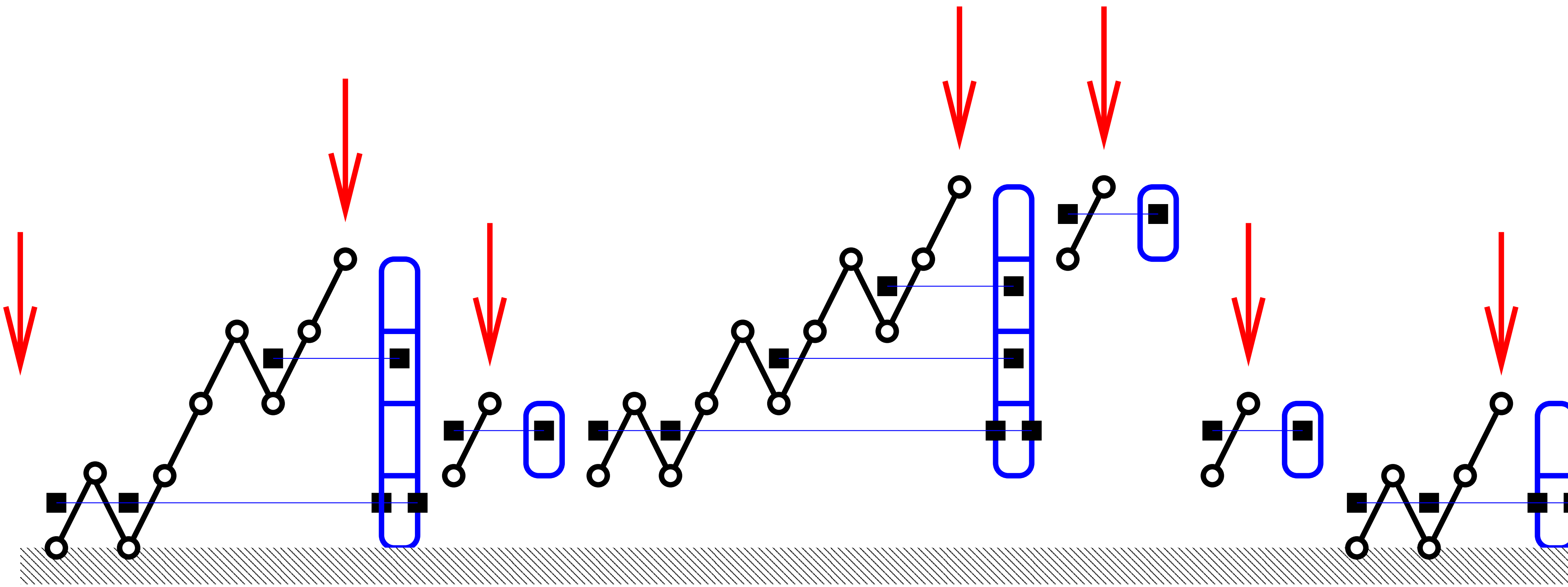
Les chemins à petits creux noirs :



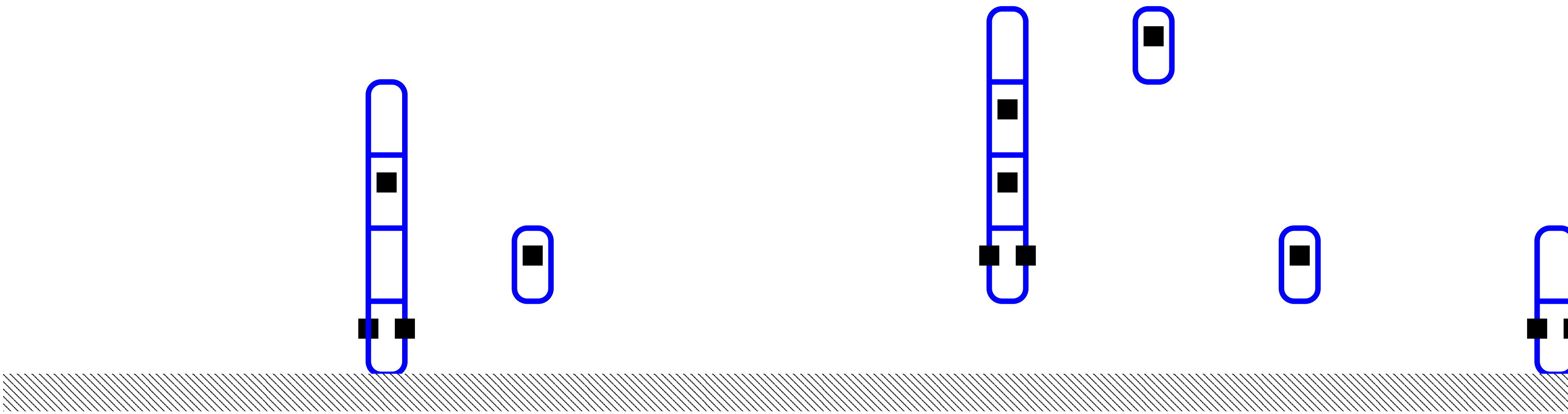
Les chemins à petits creux noirs :



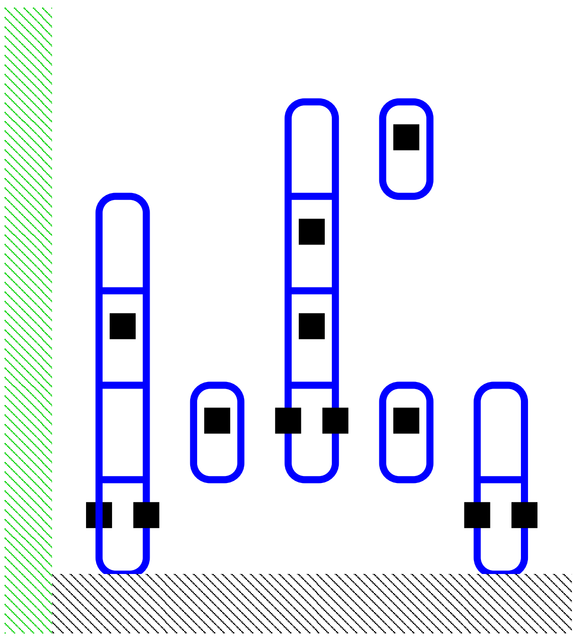
Les chemins à petits creux noirs :



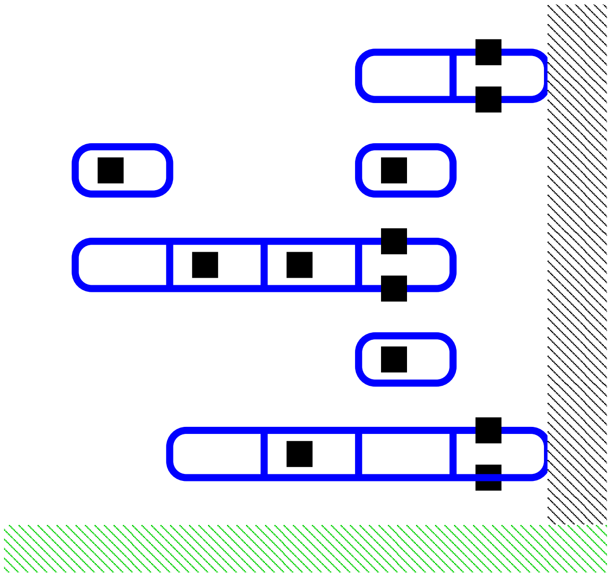
Les chemins à petits creux noirs :



Les chemins à petits creux noirs :

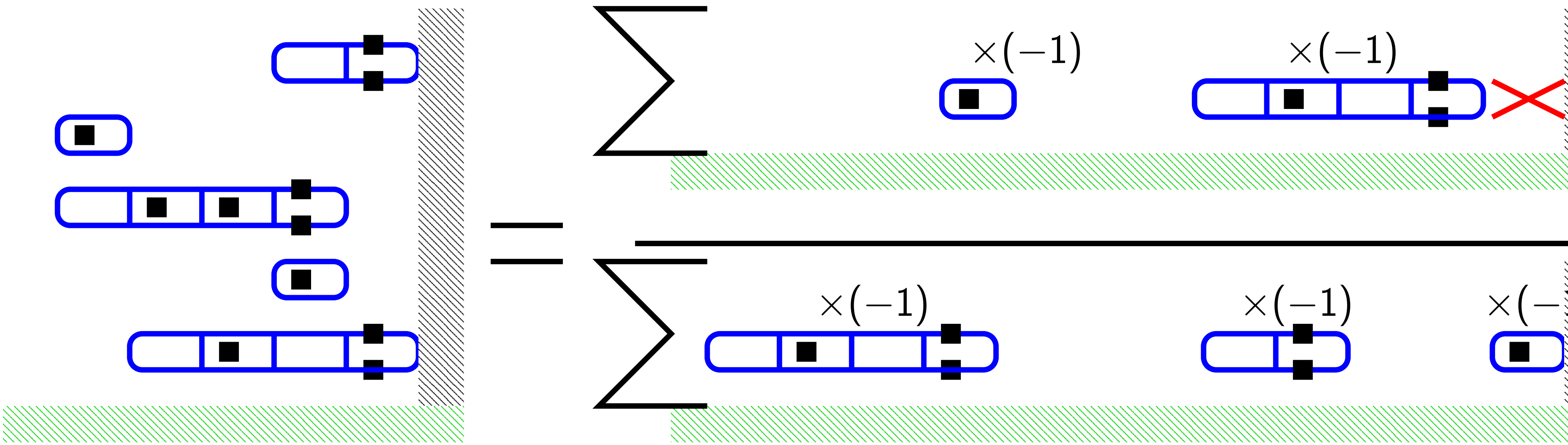


Les chemins à petits creux noirs :



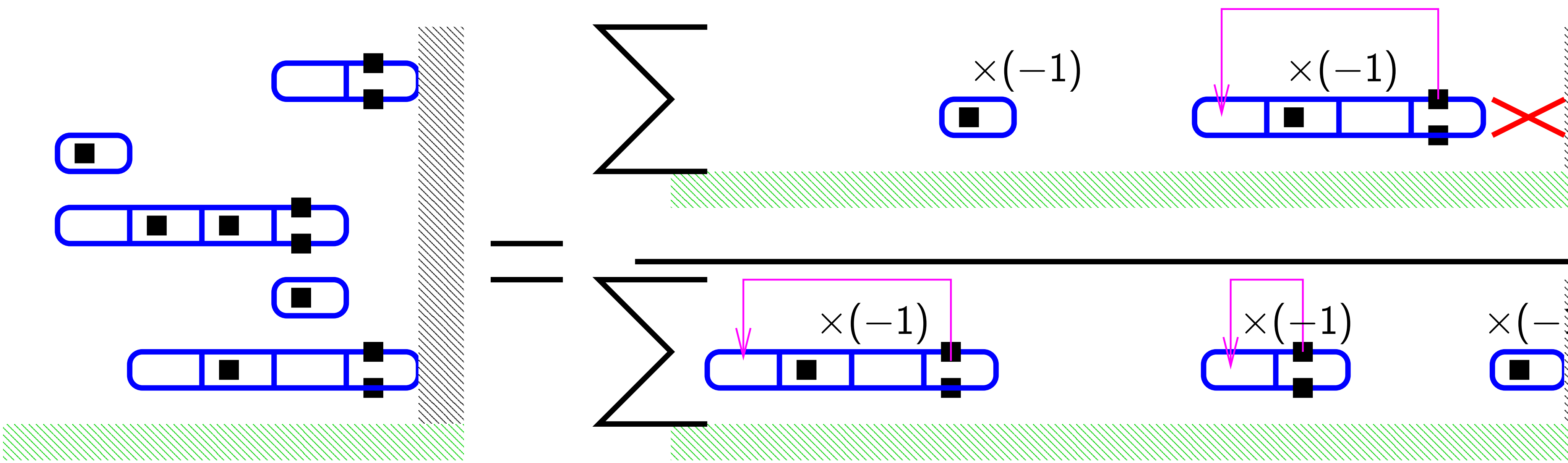
Les chemins à petits creux noirs :

Enumération par le lemme d'inversion pour les empilements de Viennot.



Les chemins à petits creux noirs :

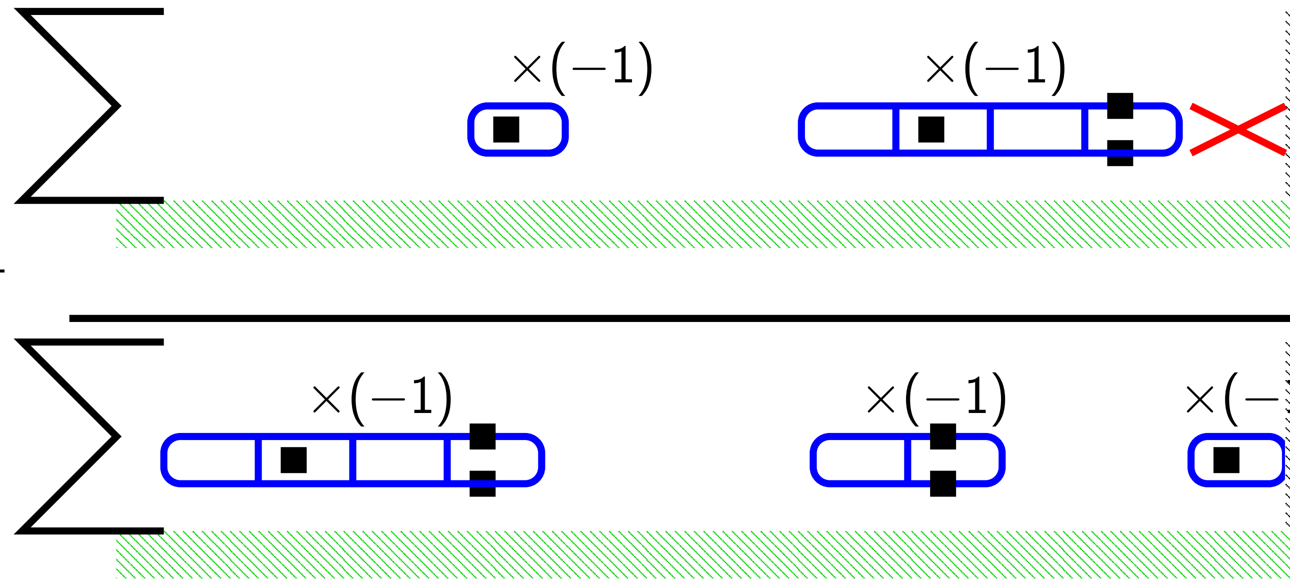
Enumération par le lemme d'inversion pour les empilements de Viennot.



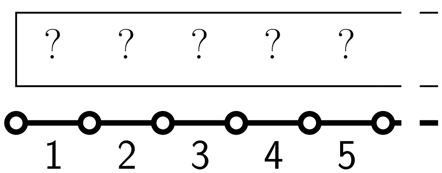
Les chemins à petits creux noirs :

Enumération par le lemme d'inversion pour les empilements de Viennot.

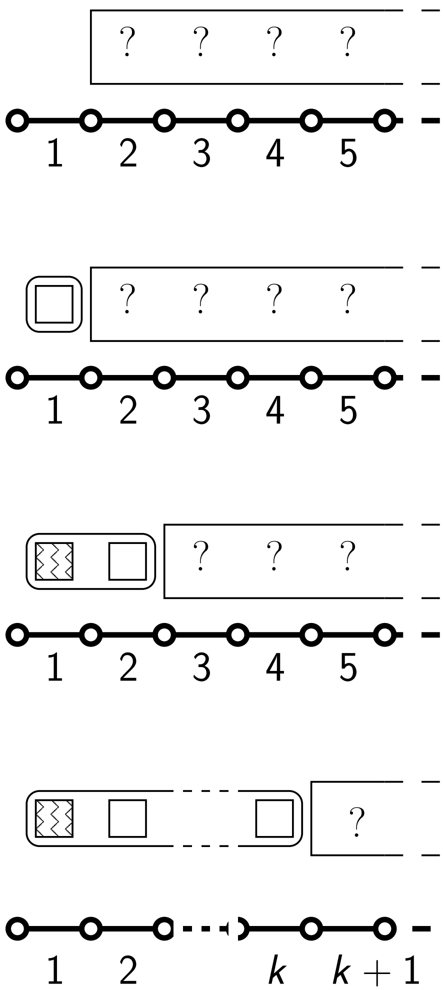
$$\frac{t\sum_{n\geq 0}\frac{(q-t)^{n+1}q^{\binom{n+2}{2}}y^n}{(1-q)^n(q)_n(t/q)_{n+2}}}{q^2\sum_{n\geq 0}\frac{(q-t)^{n+1}q^{\binom{n+1}{2}}y^n}{(1-q)^n(q)_n(t/q)_n}}$$



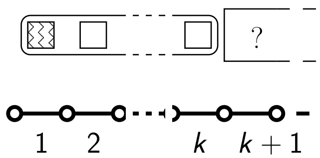
Énumération des empilements triviaux



$$T(y) = T(qy) + xqyT(qy) + xq^2y^2tT(q^2y) + (t+tq^2y)/q^2\Big(T(qy) - (1+xq^2y)T(q^2y)\Big)$$

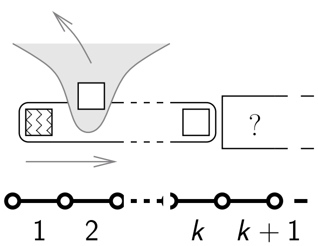


Cas des empilements à long segments initiaux

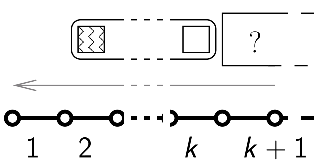


$=$ $(t+tq^2y)/q^2\Big(T(qy)-T(q^2y)-xq^2yT(q^2y)\Big) = T_{\geq 3}(y)$

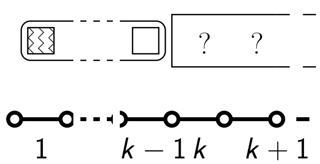
$/(t+tq^2y)$



$q^2y^2 \to q^4y^2 = *q^2$

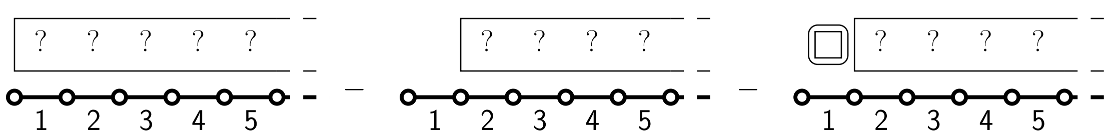


$y \to y/q$

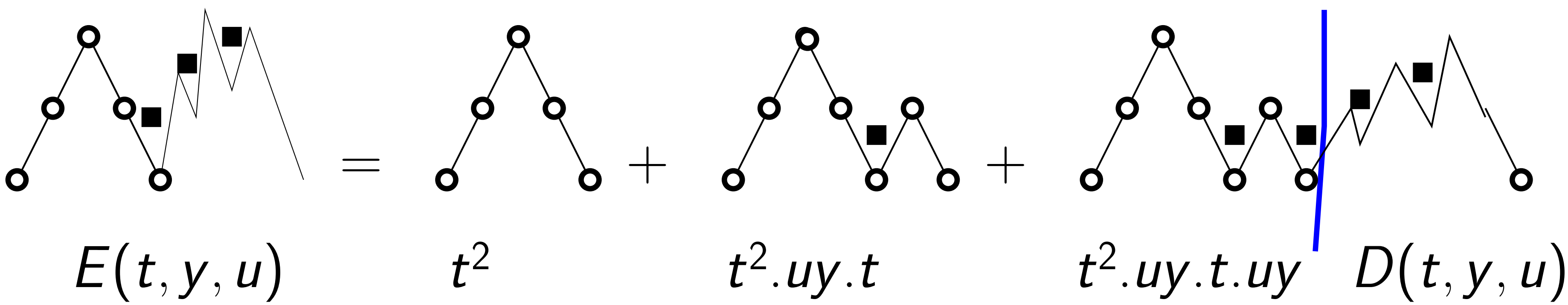


$T(y)-T(qy)-(-qy)T(qy) = T_{\geq 2}(y)$

$=$



Remarque sur le changement de variable

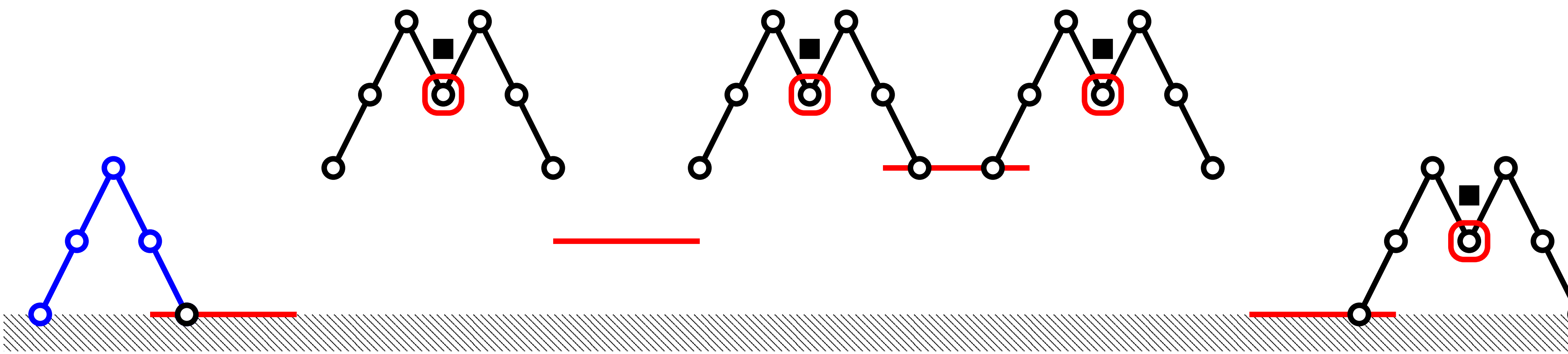


$$t^2 \frac{H(qy)}{H(y)} = E(y) = t^2 + t^2 qy + tq^2 y^2 D(y)$$

$$D(y) = \frac{1}{tq^2y^2} \left(t^2 \frac{H(qy)}{H(y)} - t^2 - t^2 qy \right)$$

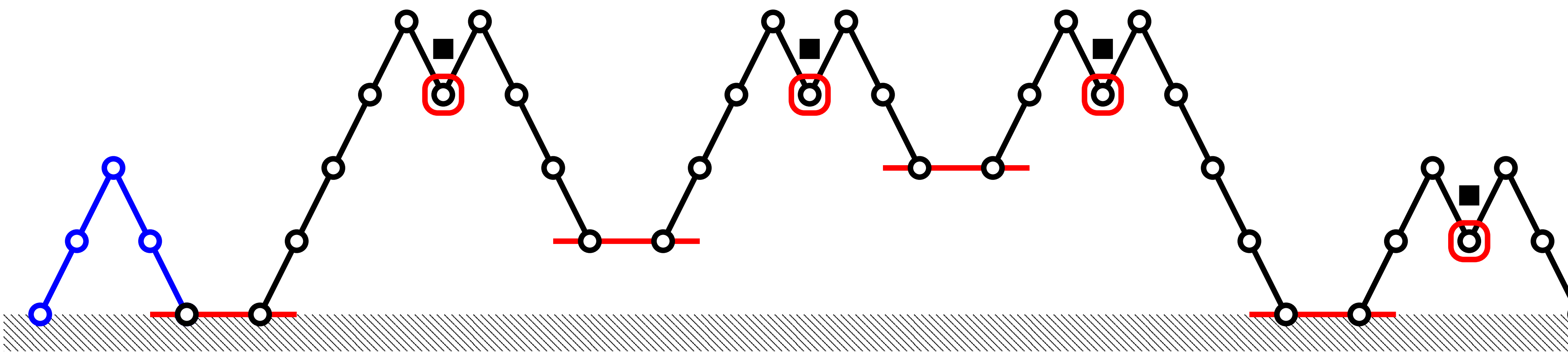
Et le terme $(q)_n(qt\sigma^2)_n$?

On considère les chemins bicolores où les creux noirs sont *isolés*.
On regroupe les chemins selon la suite des hauteurs des creux noirs et des hauteurs minimales entre deux creux noirs.
Les représentants sont les chemins les plus courts.



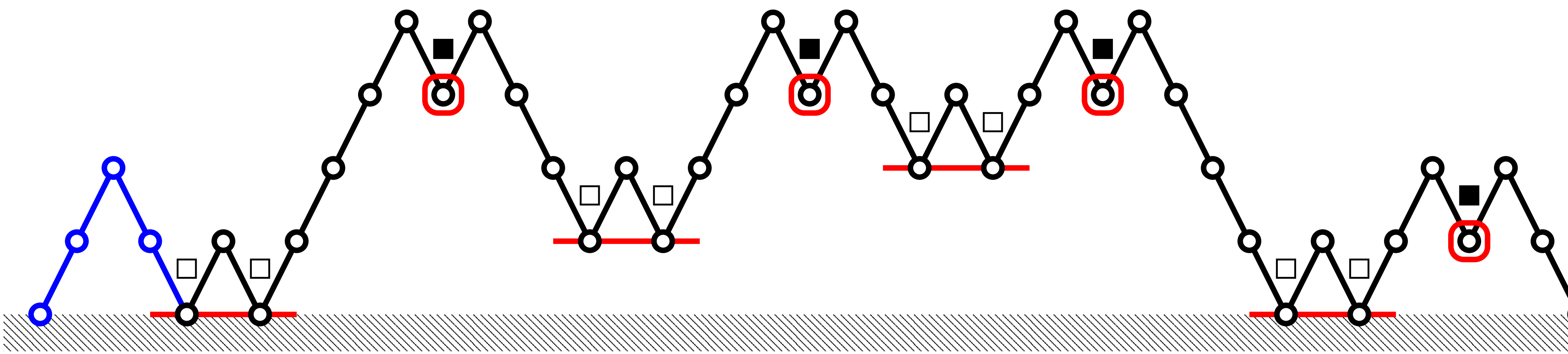
Et le terme $(q)_n(qt\sigma^2)_n$?

On considère les chemins bicolores où les creux noirs sont *isolés*.
On regroupe les chemins selon la suite des hauteurs des creux noirs et des hauteurs minimales entre deux creux noirs.
Les représentants sont les chemins les plus courts.



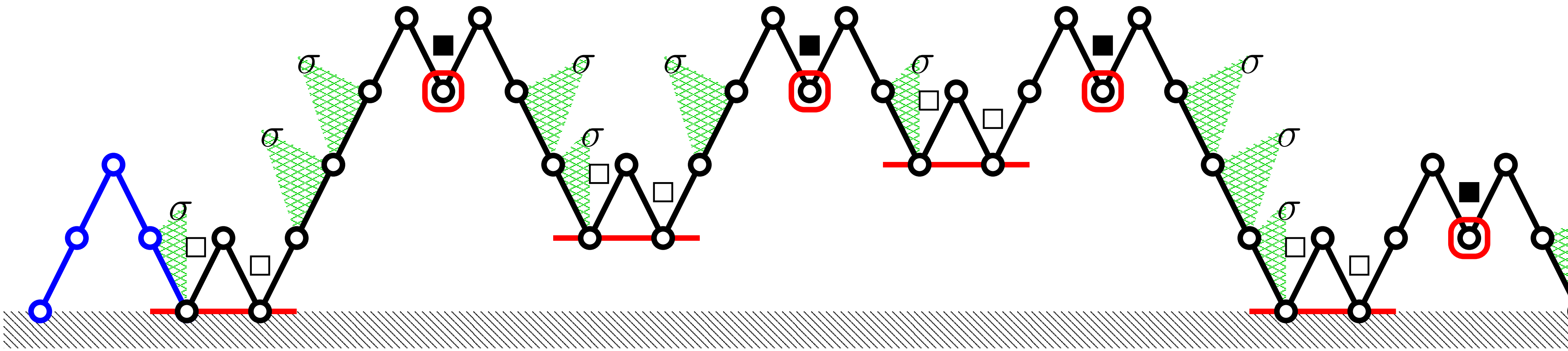
Et le terme $(q)_n(qt\sigma^2)_n$?

On considère les chemins bicolores où les creux noirs sont *isolés*.
On regroupe les chemins selon la suite des hauteurs des creux noirs et des hauteurs minimales entre deux creux noirs.
Les représentants sont les chemins les plus courts.



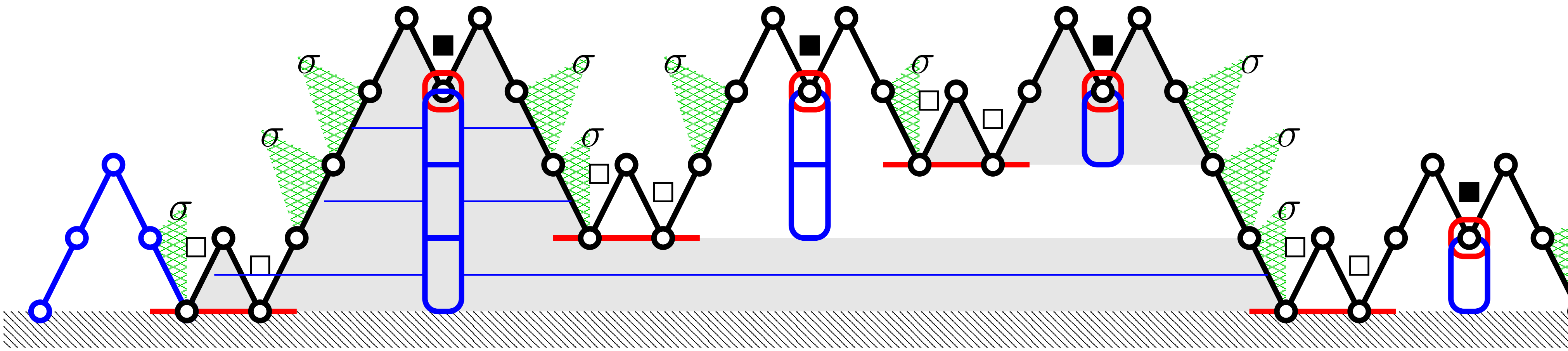
Et le terme $(q)_n(qt\sigma^2)_n$?

On considère les chemins bicolores où les creux noirs sont *isolés*.
On regroupe les chemins selon la suite des hauteurs des creux noirs et des hauteurs minimales entre deux creux noirs.
Les représentants sont les chemins les plus courts.



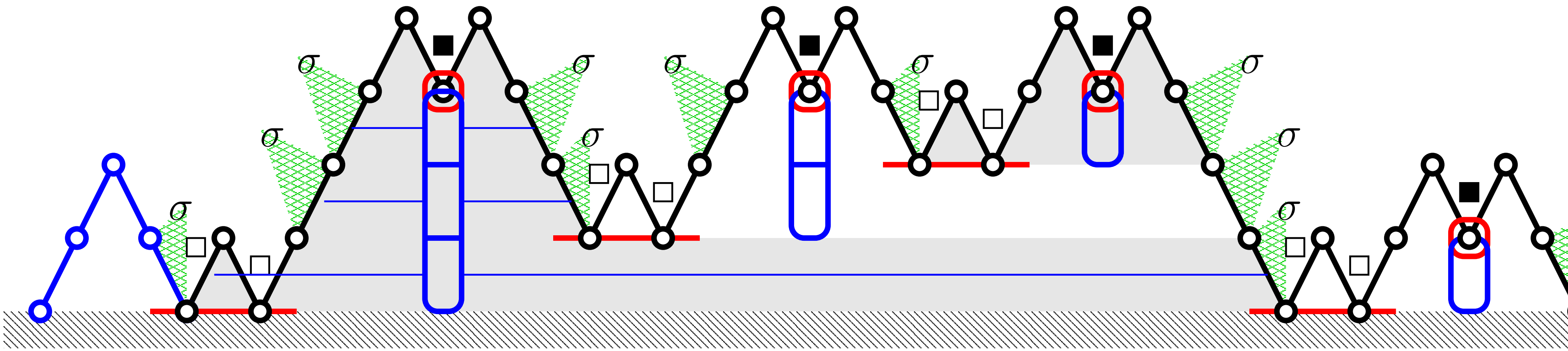
Et le terme $(q)_n(qt\sigma^2)_n$?

On considère les chemins bicolores où les creux noirs sont *isolés*.
On regroupe les chemins selon la suite des hauteurs des creux noirs et des hauteurs minimales entre deux creux noirs.
Les représentants sont les chemins les plus courts.



Et le terme $(q)_n(qt\sigma^2)_n$?

$$t^2\sigma\frac{\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{q^{6n}t^n\sigma^n y^n}{(q-1)^{3n}(q)_n(qt\sigma^2)_n}}{\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{q^{5n}t^n\sigma^n y^n}{(q-1)^{3n}(q)_n(qt\sigma^2)_n}}$$



Perspectives

- Finir la preuve utilisant les empilements.
- Déterminer le diagramme de phase de ce modèle de chemin.
- Évaluer la généralité des techniques de résolution des q-équations utilisées sur cet exemple.