

Séminaire 4 octobre 2004

Énumération de cartes non enracinées en  
utilisant la décomposition en arbre

Eric FUSY

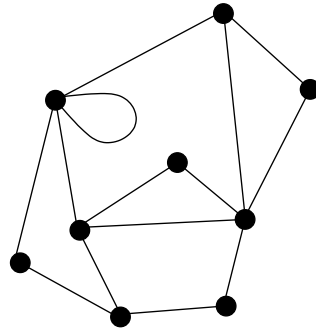
Travail effectué avec l'aide de Gilles Schaeffer

# Plan

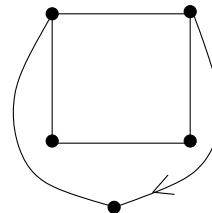
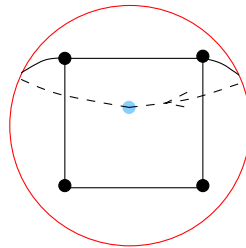
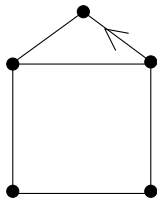
- Présentation des méthodes principales d'énumération d'objets non enracinés :
  - pour les arbres
  - pour les cartes
- Description de la méthode de décomposition en arbre :
  - pour énumérer les cartes 2-connexes non enracinées
  - pour énumérer les cartes 3-connexes non orientées (polyèdres)
  - Perspectives pour l'énumération des graphes 3-connexes
- Calcul formel pour calculer rapidement les coefficients :
  - Étude de l'algébricité des séries génératrices
  - Calcul de la complexité si on utilise les outils du calcul formel

# Définitions générales sur les cartes

**Carte non enracinée sur la sphère** : plongement d'un graphe non étiqueté sur la sphère à déformation continue près

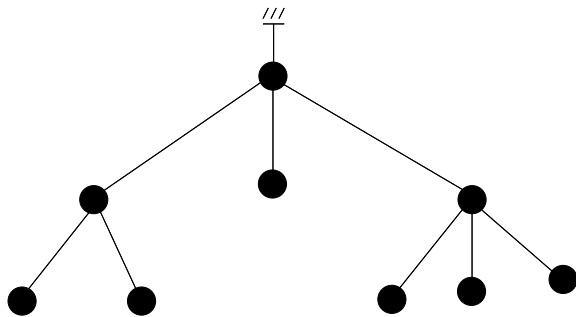


**Carte enracinée sur la sphère** : plongement sur la sphère d'un graphe non étiqueté dont une demi-arête est marquée



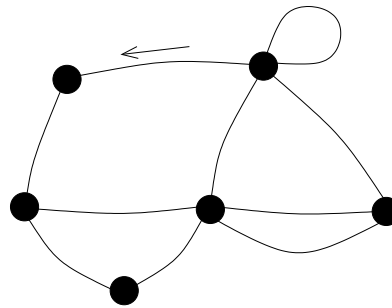
# L'enracinement facilite l'énumération

arbres plans



$$G(x) = x \frac{1}{1-G(x)}$$

cartes planaires

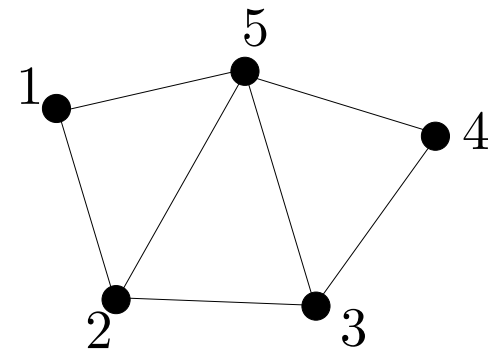


Equations récurrente

Formules simples :

$$\mathcal{M}'_n = \frac{2}{n+2} \frac{3^n (2n)!}{n!(n+1)!}$$

graphes planaires

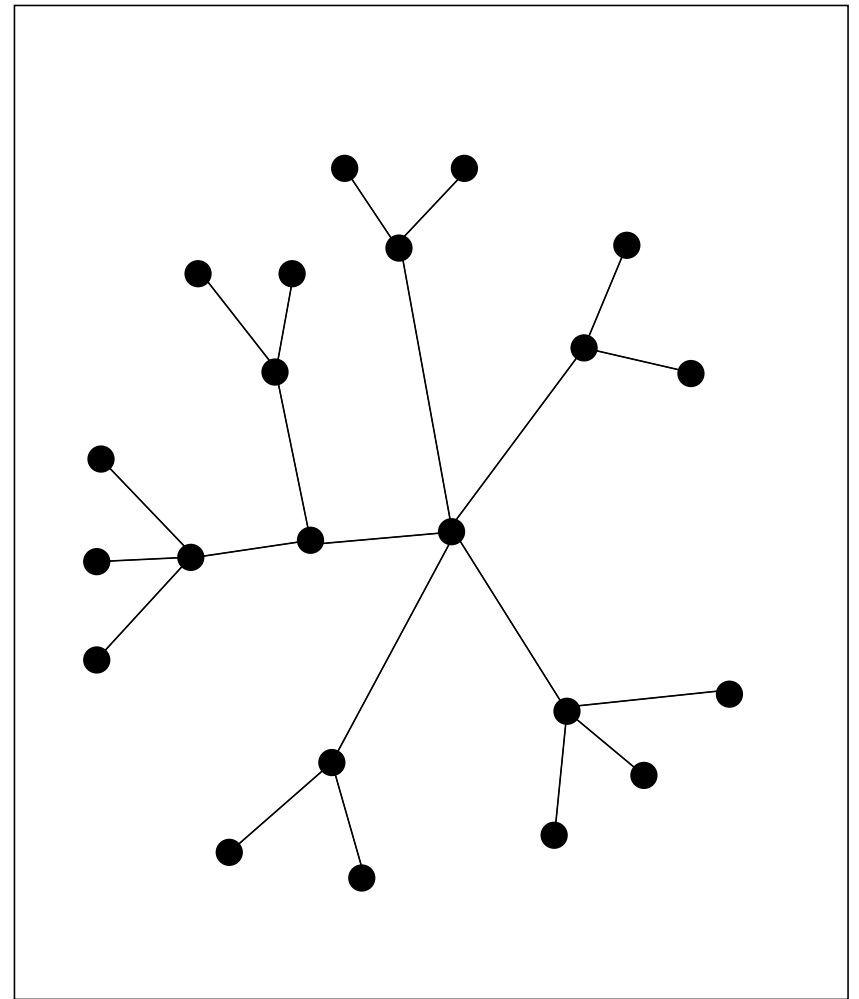
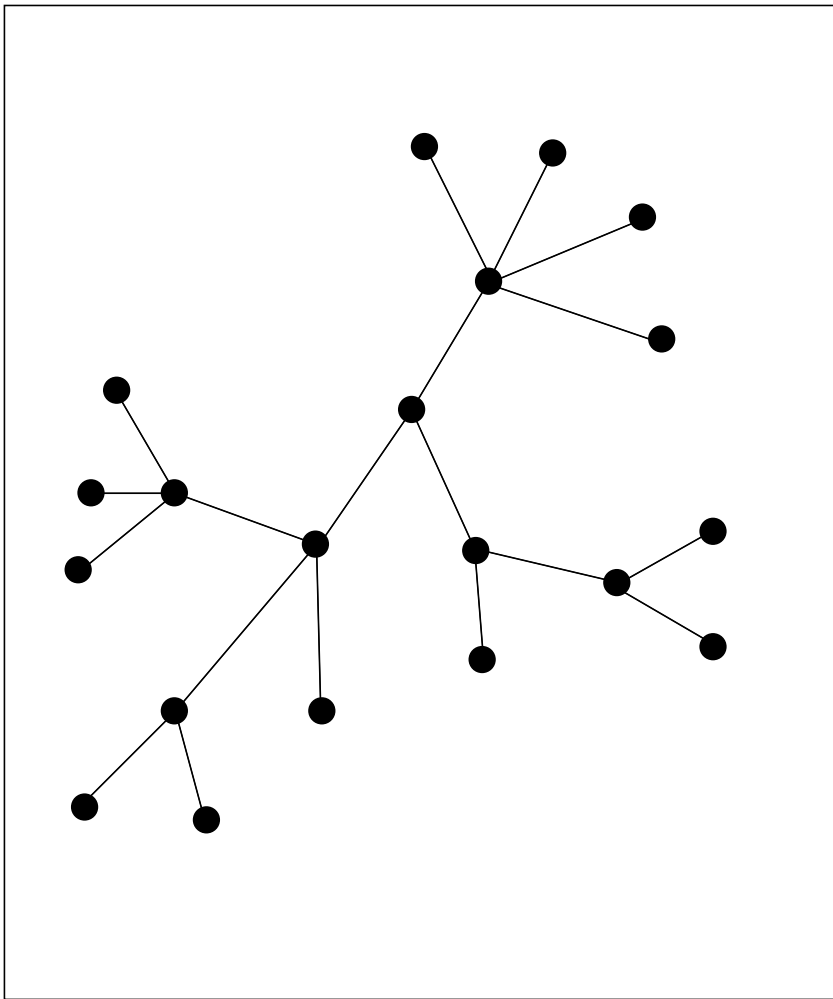


Equations fonctionnelles

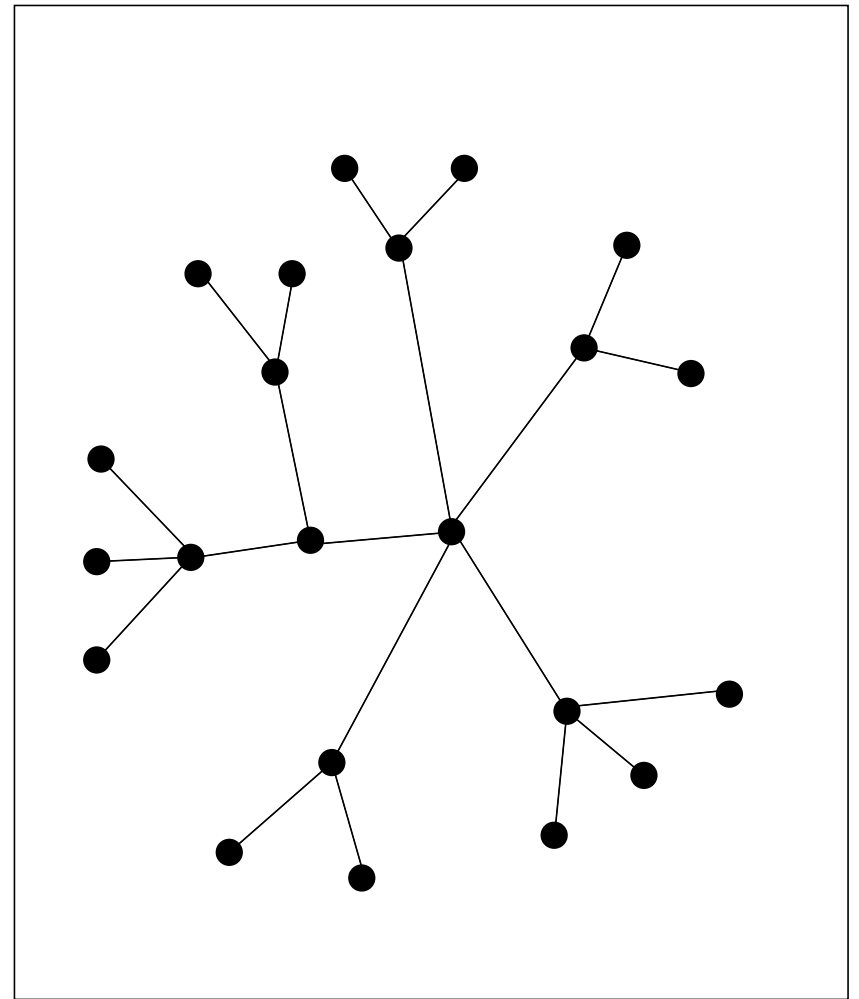
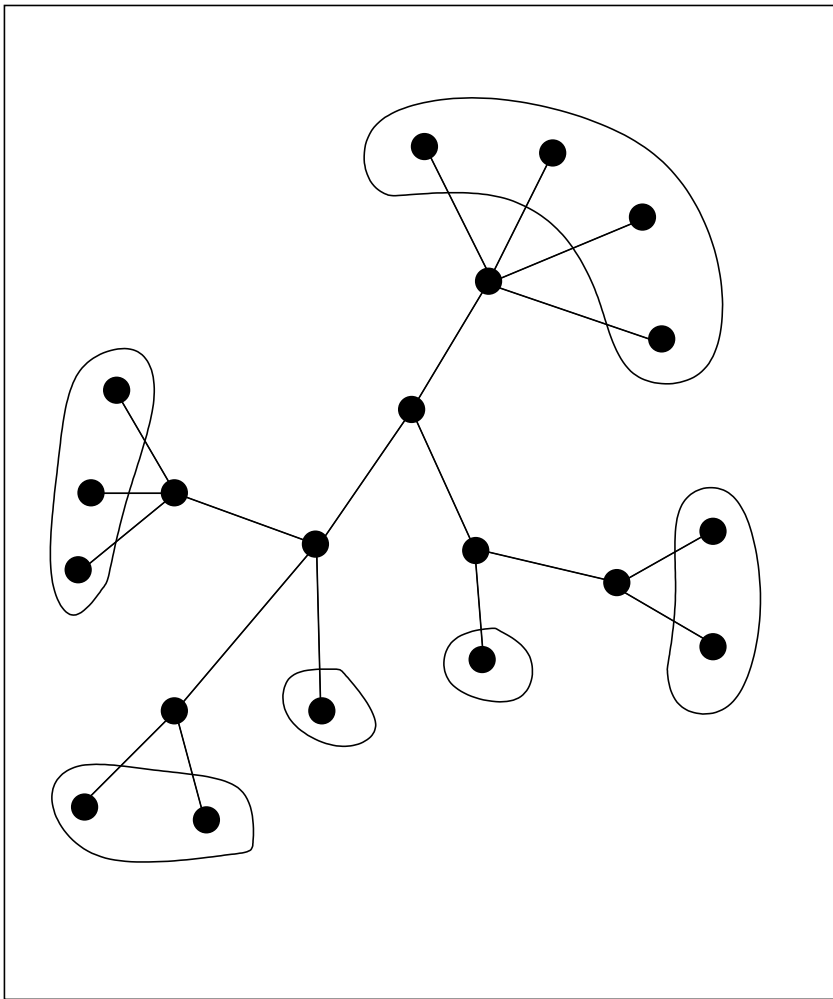
# Méthodes classiques d'énumération d'objets non enracinés

- Pour les arbres, une bijection utilisant la notion de **centre de l'arbre** permet de se ramener à des arbres “pointés”.
- Pour les cartes non enracinées sur la sphère, l'utilisation du lemme de Burnside et la **méthode de quotient** d'une carte par une symétrie de la carte.
- Pour les graphes planaires, pas de méthode générale d'énumération de graphes non étiquetés. Pas d'algorithme polynomial connu.

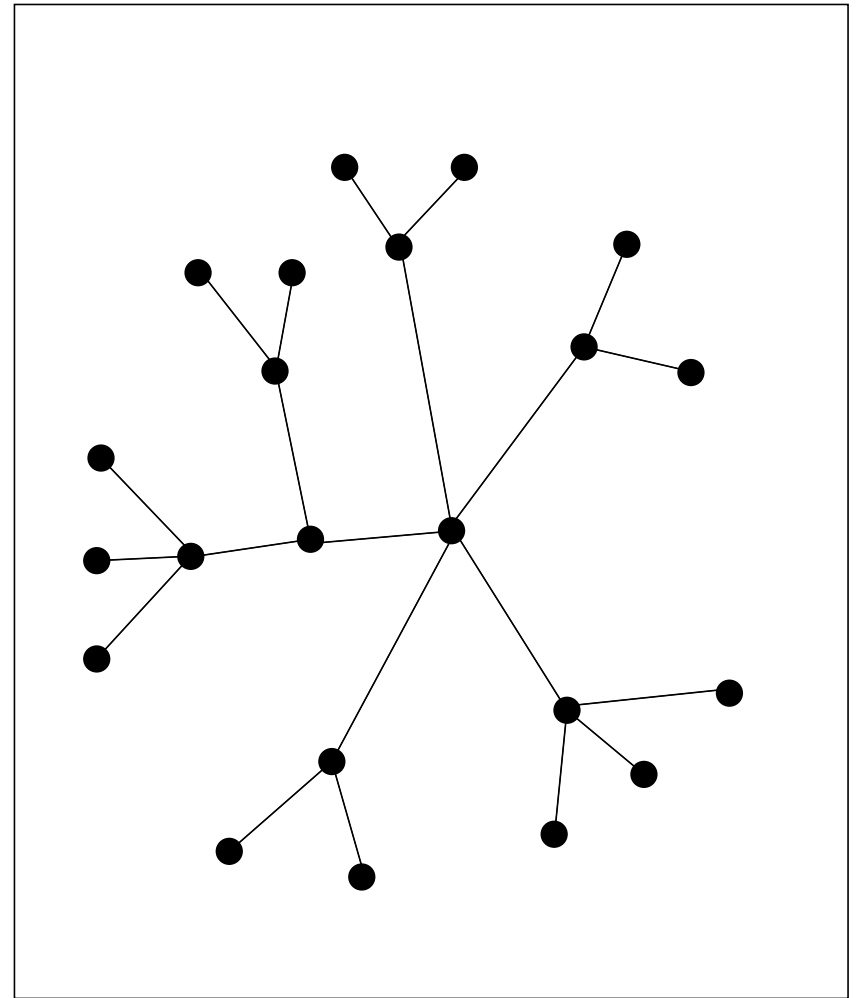
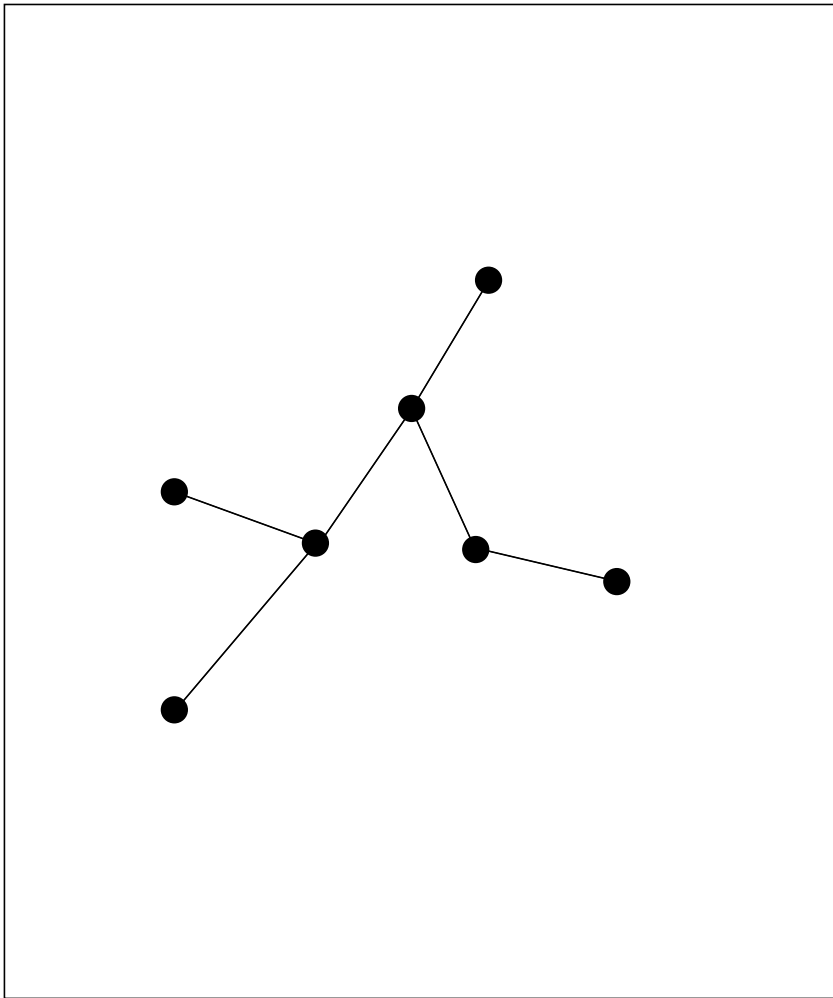
# Centre d'un arbre



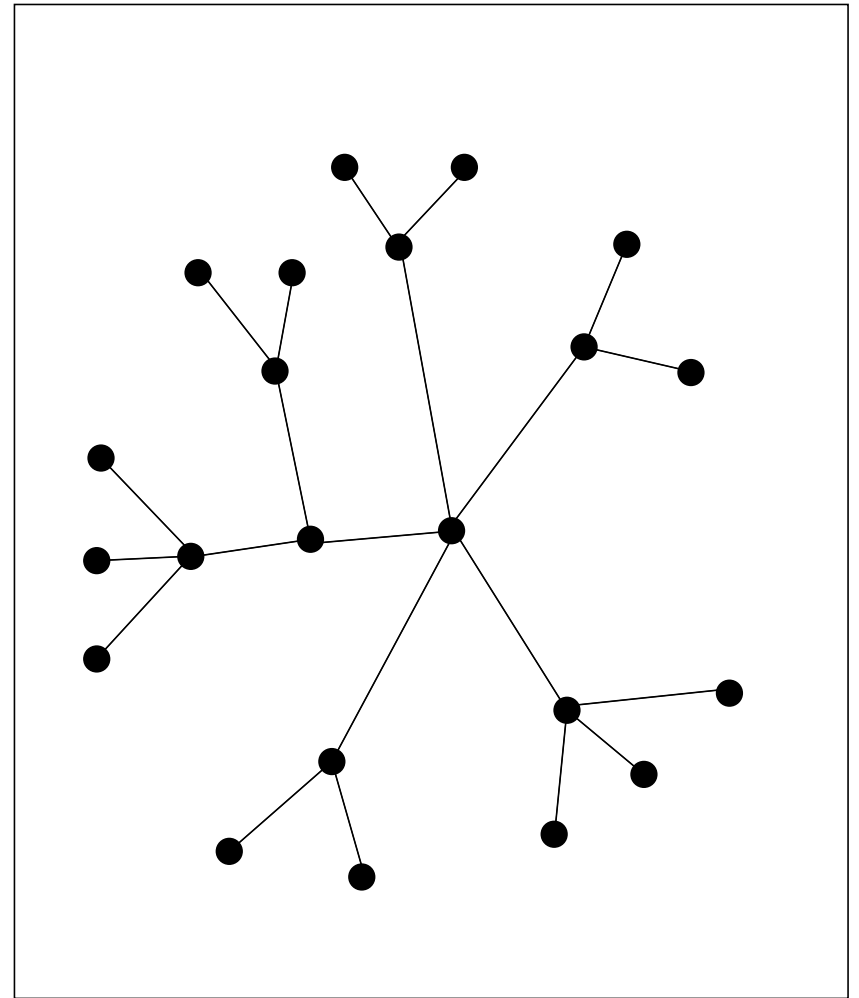
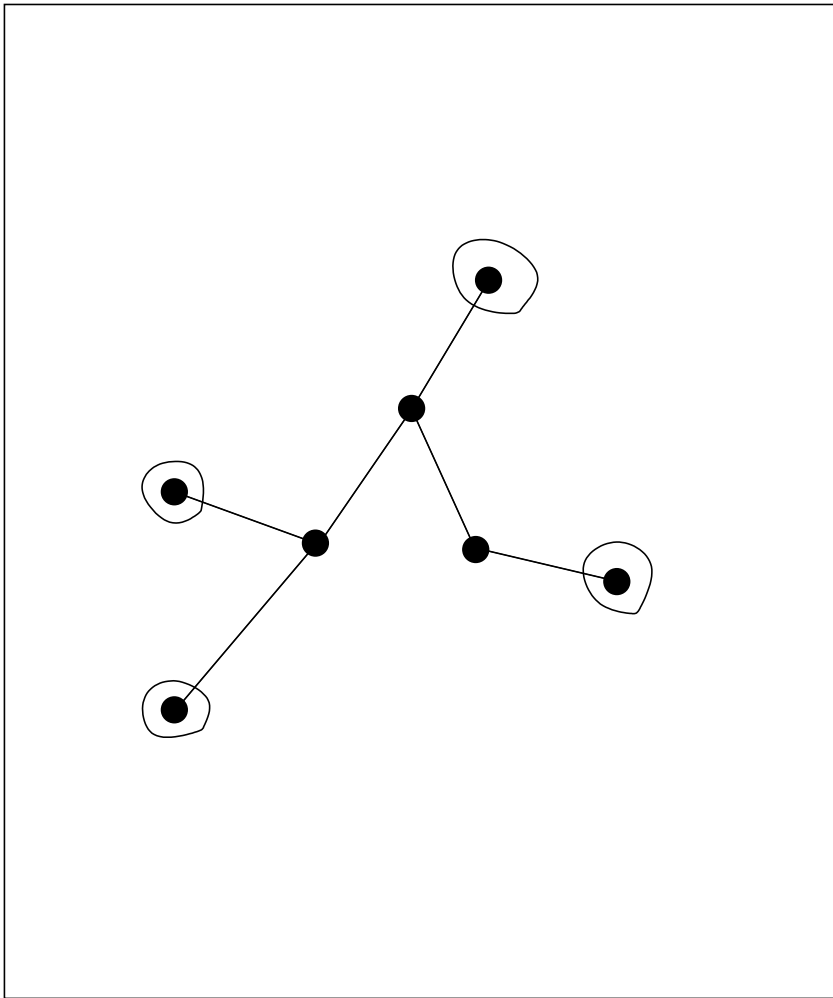
# Centre d'un arbre



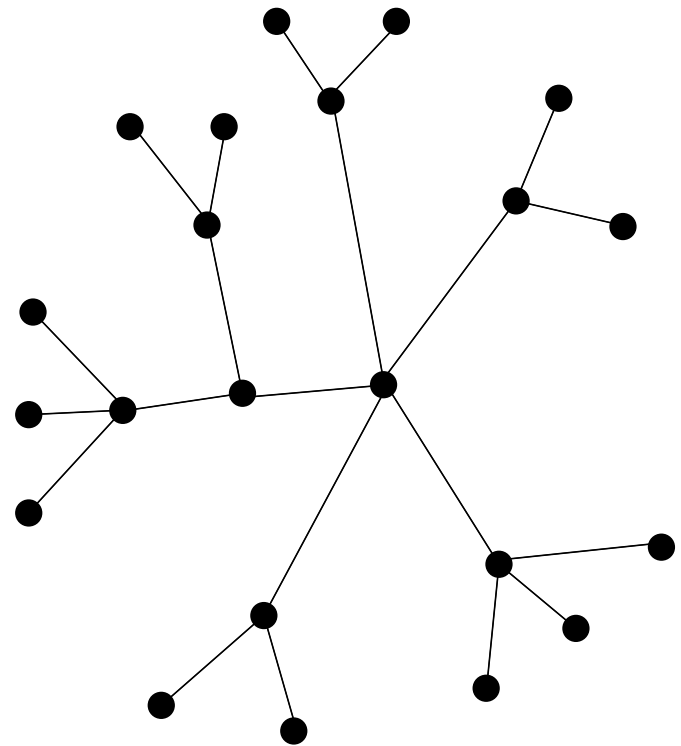
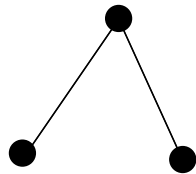
# Centre d'un arbre



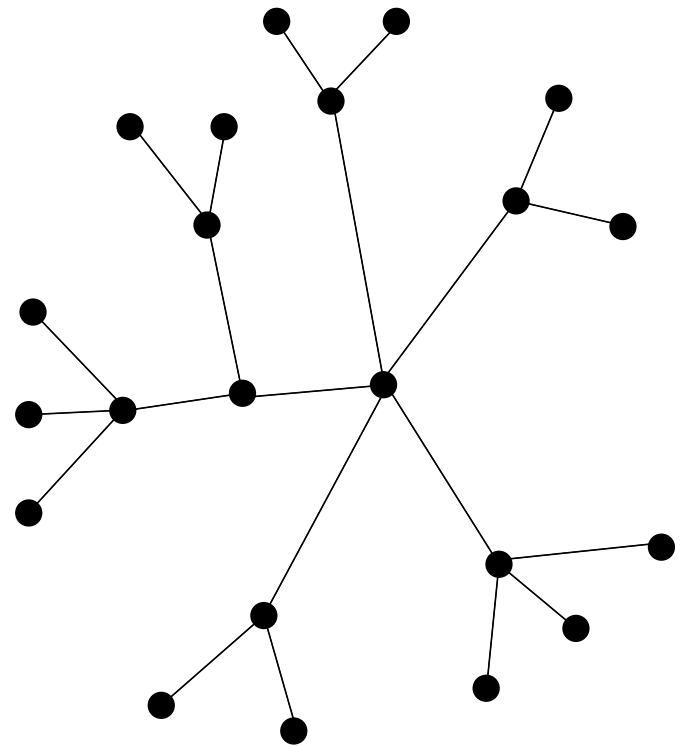
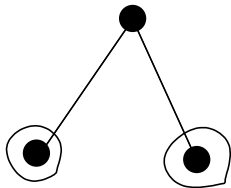
# Centre d'un arbre



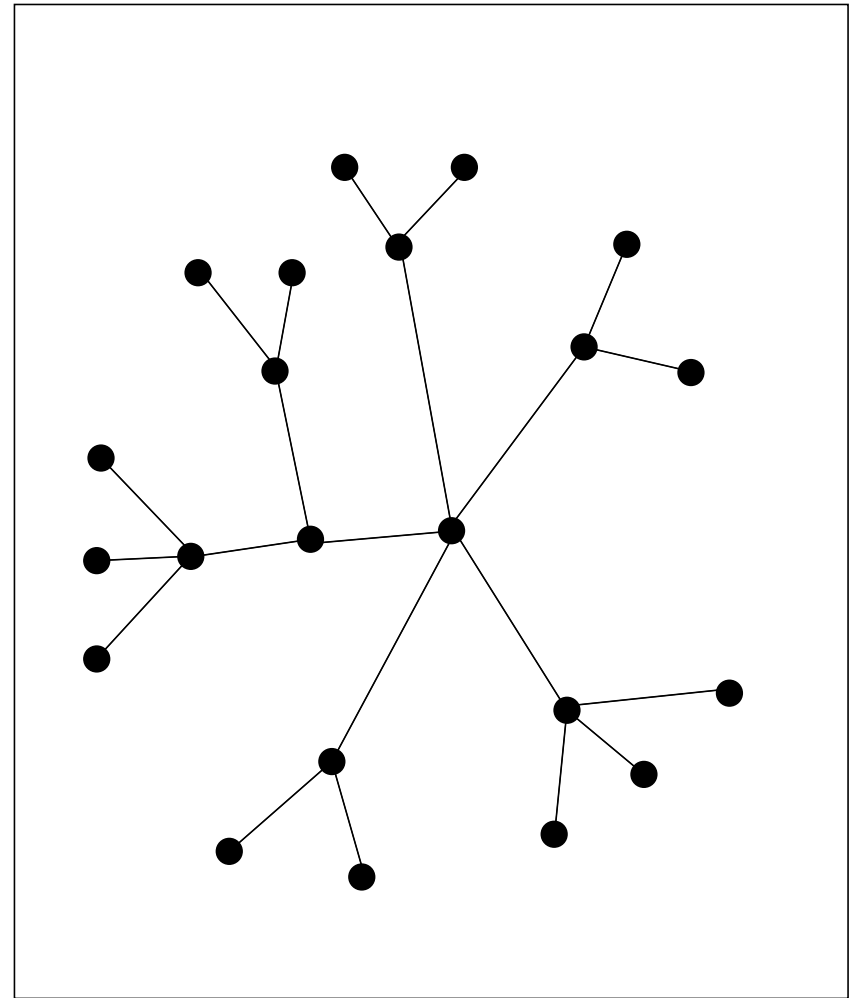
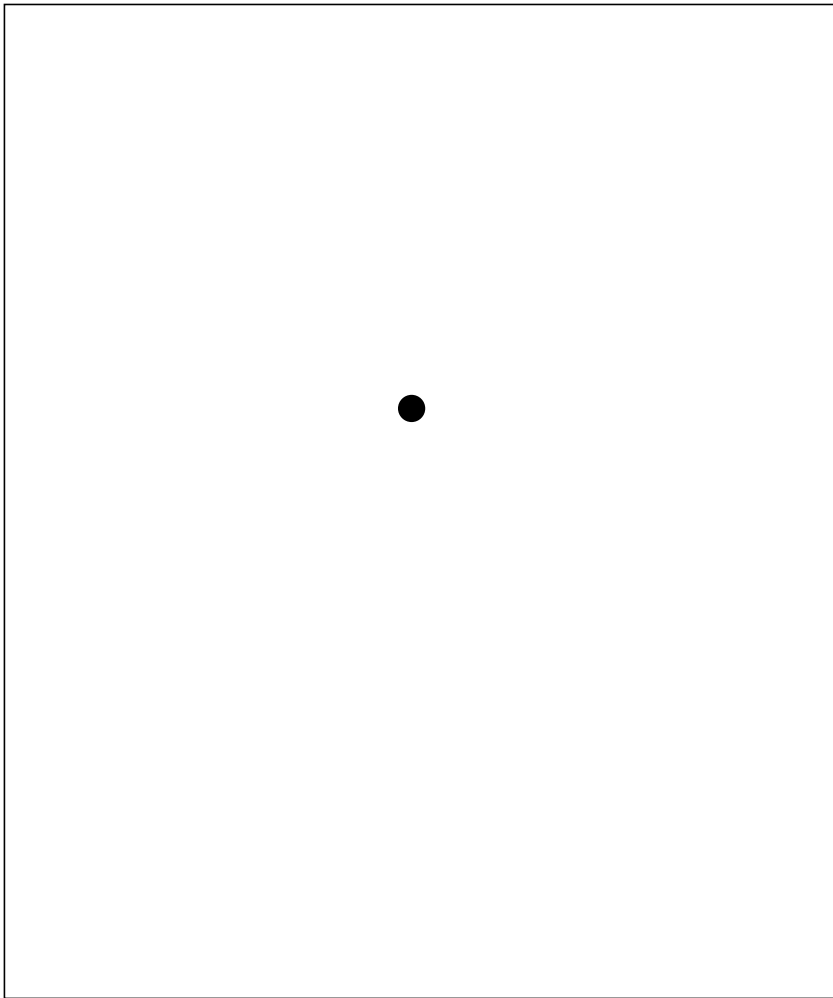
# Centre d'un arbre



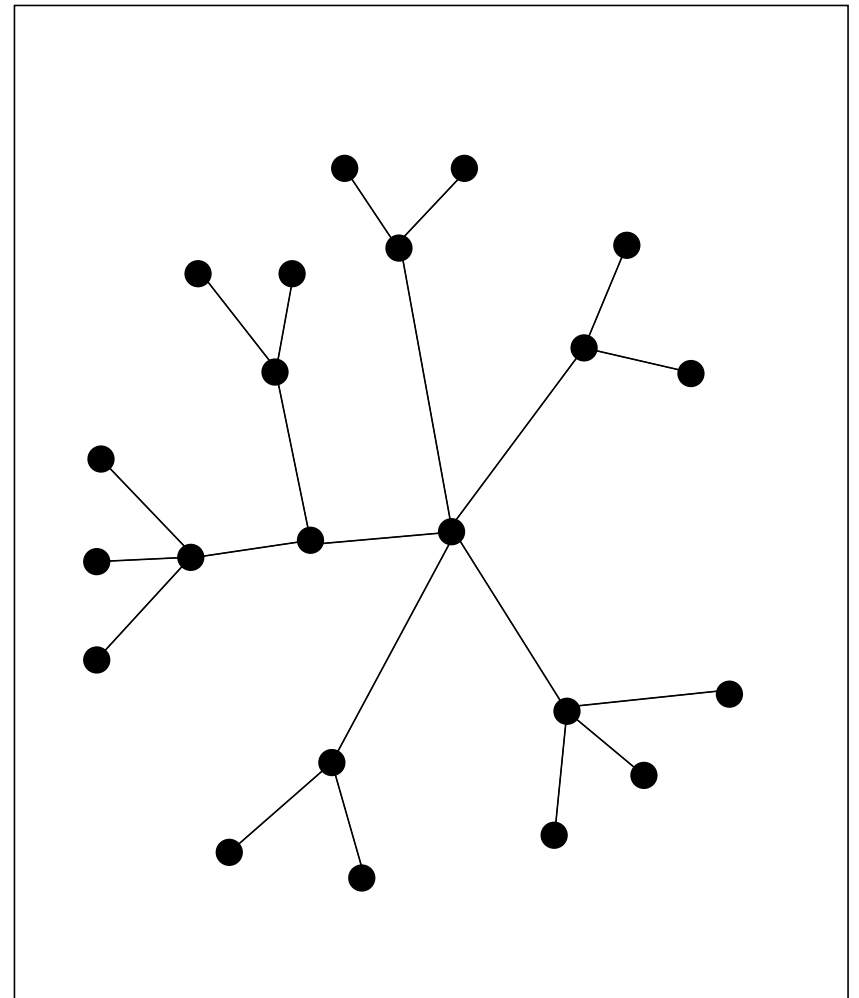
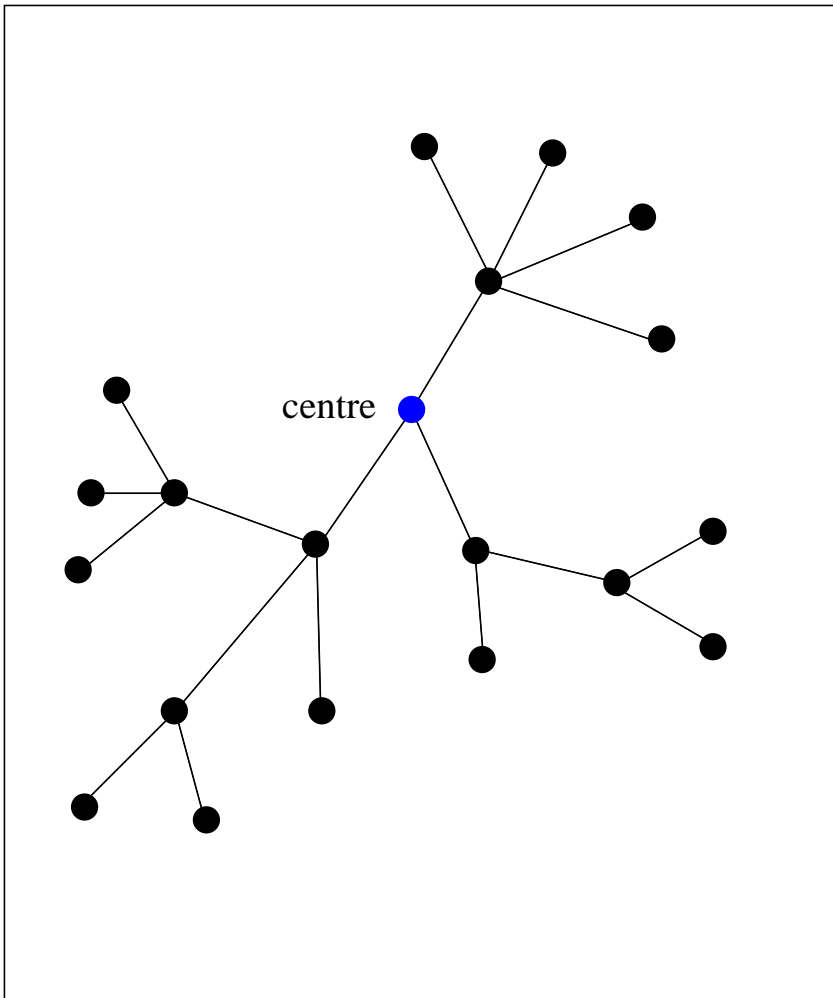
# Centre d'un arbre



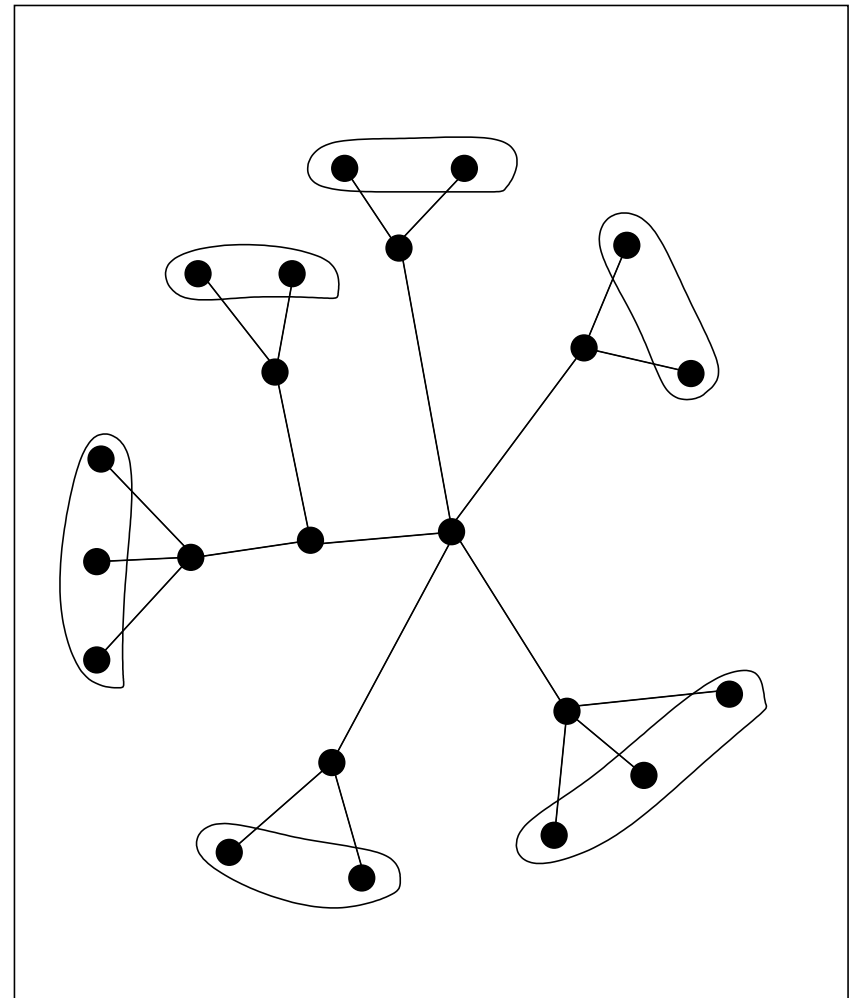
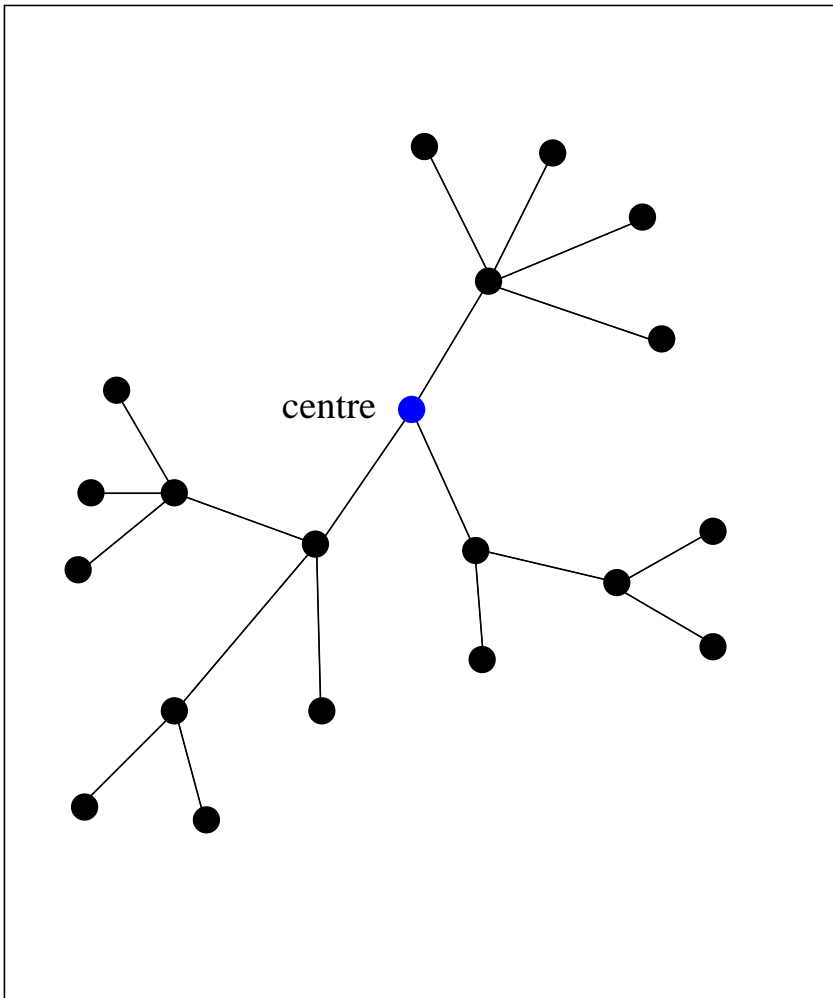
# Centre d'un arbre



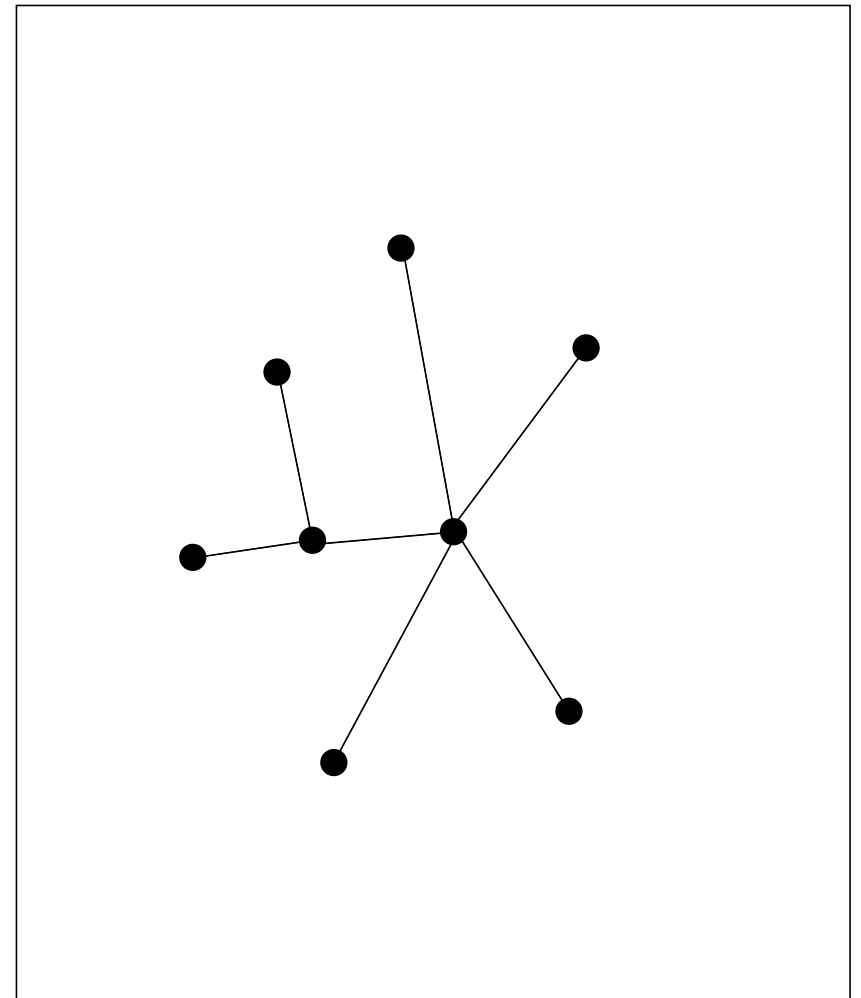
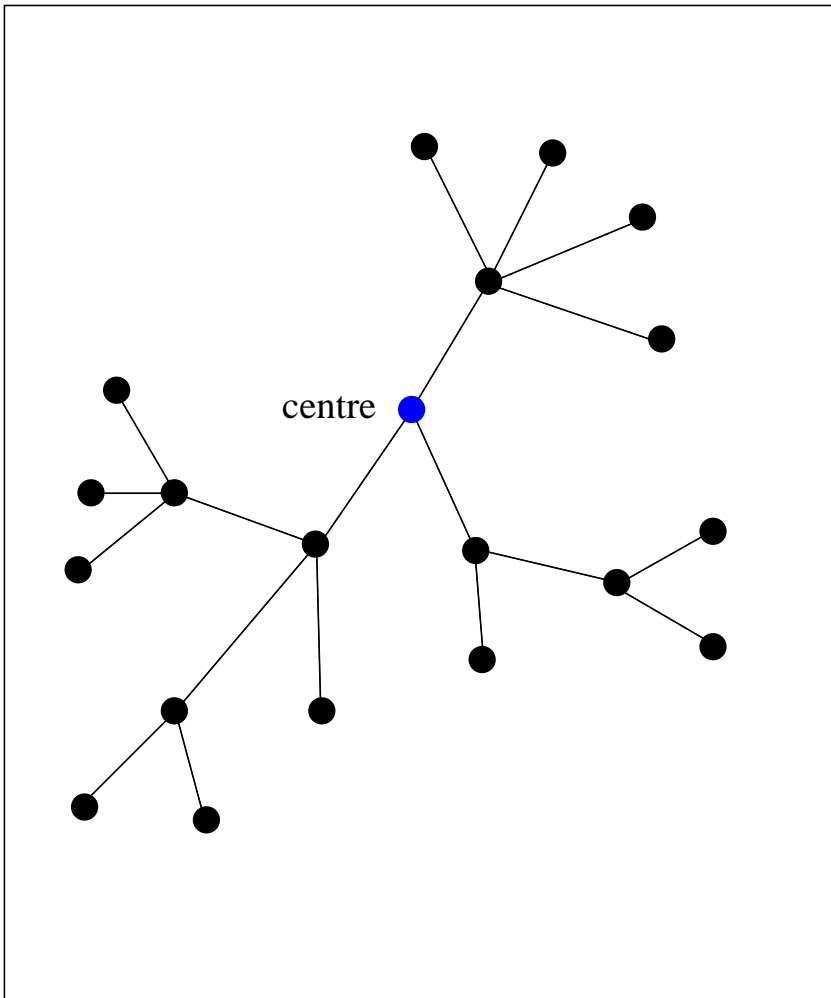
# Centre d'un arbre



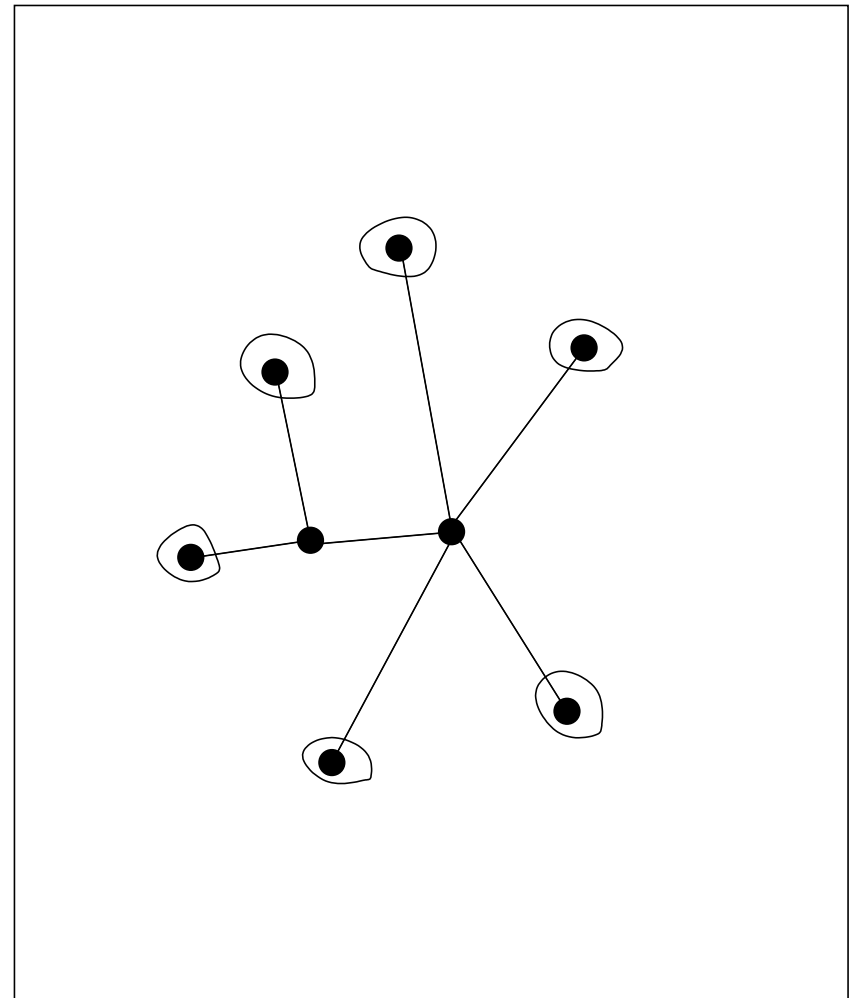
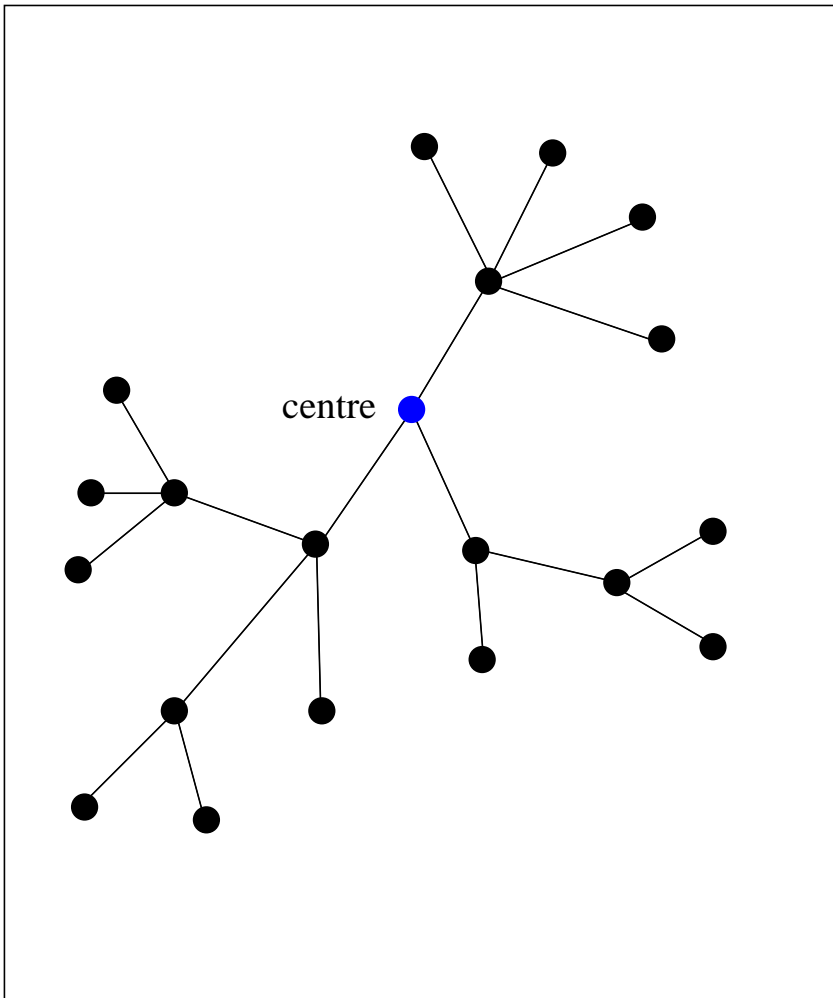
# Centre d'un arbre



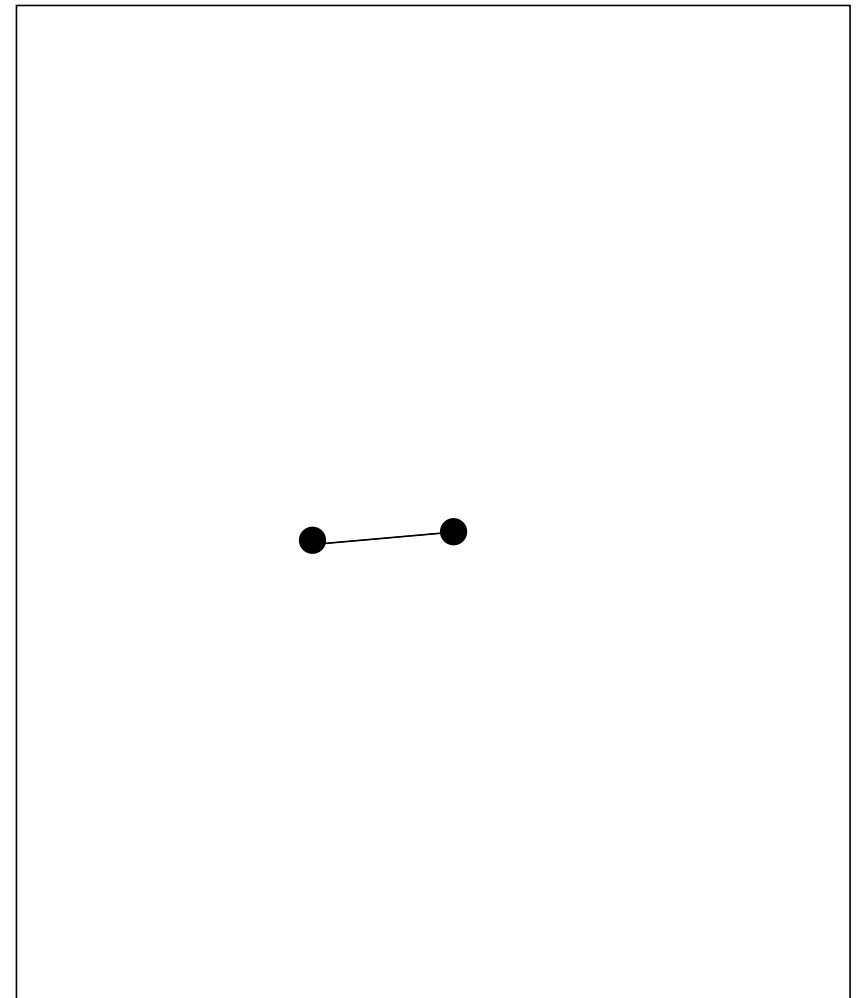
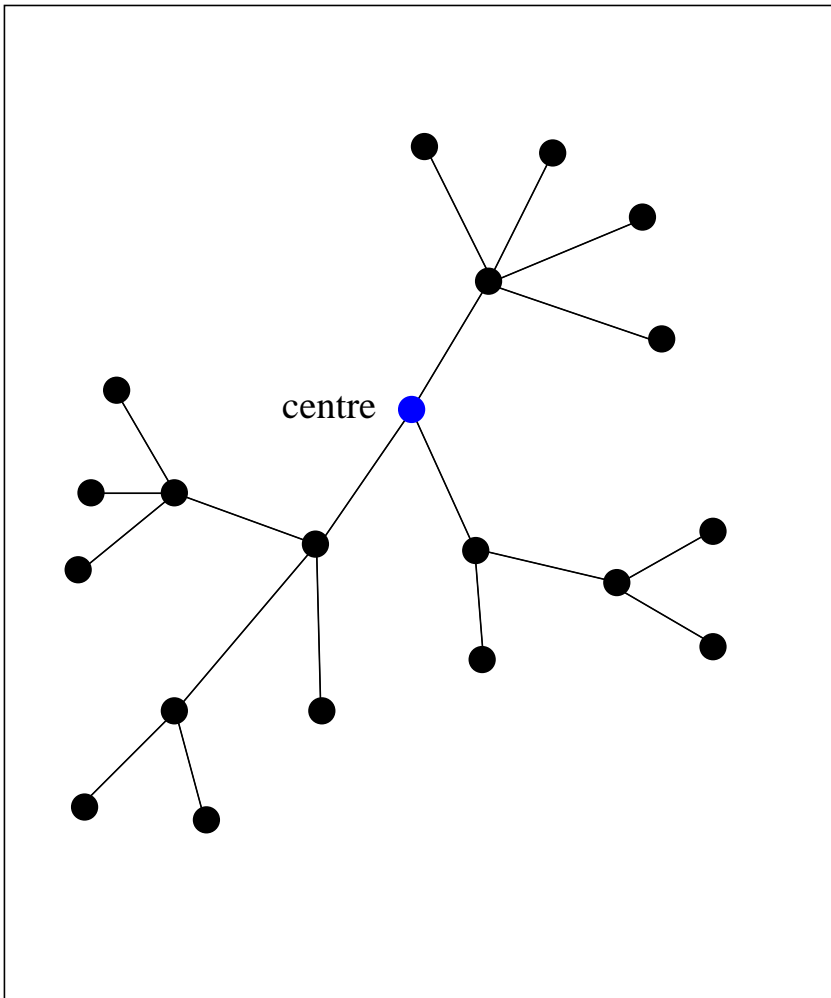
# Centre d'un arbre



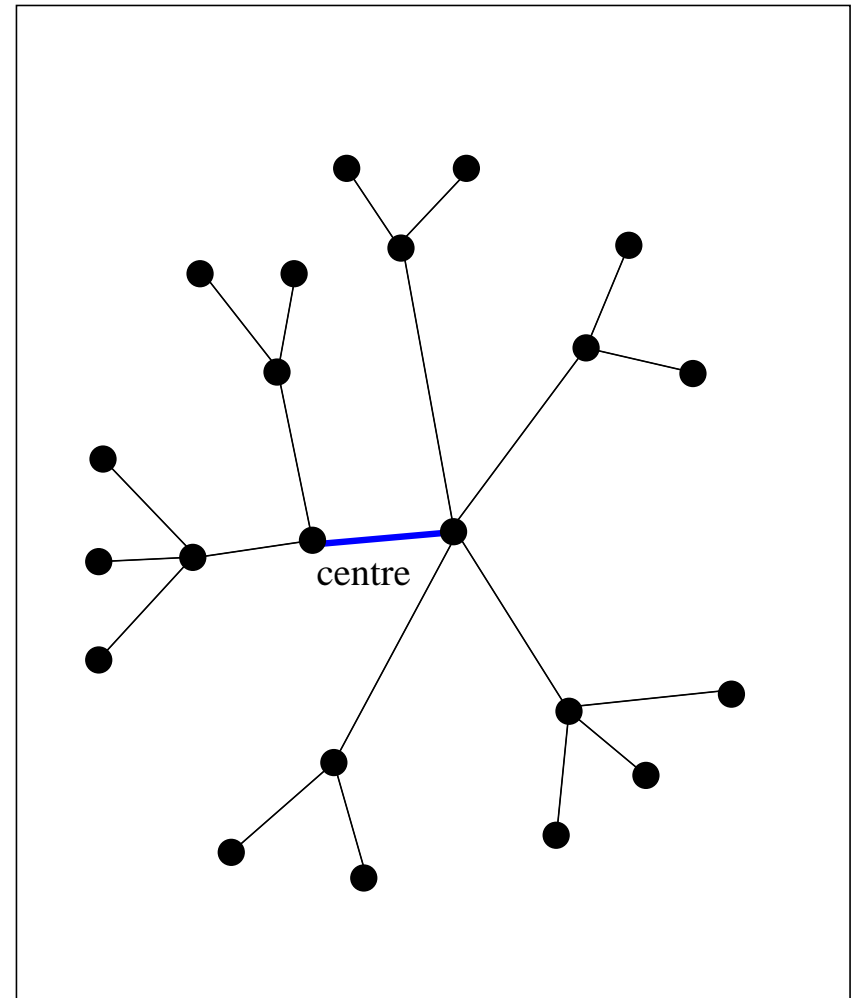
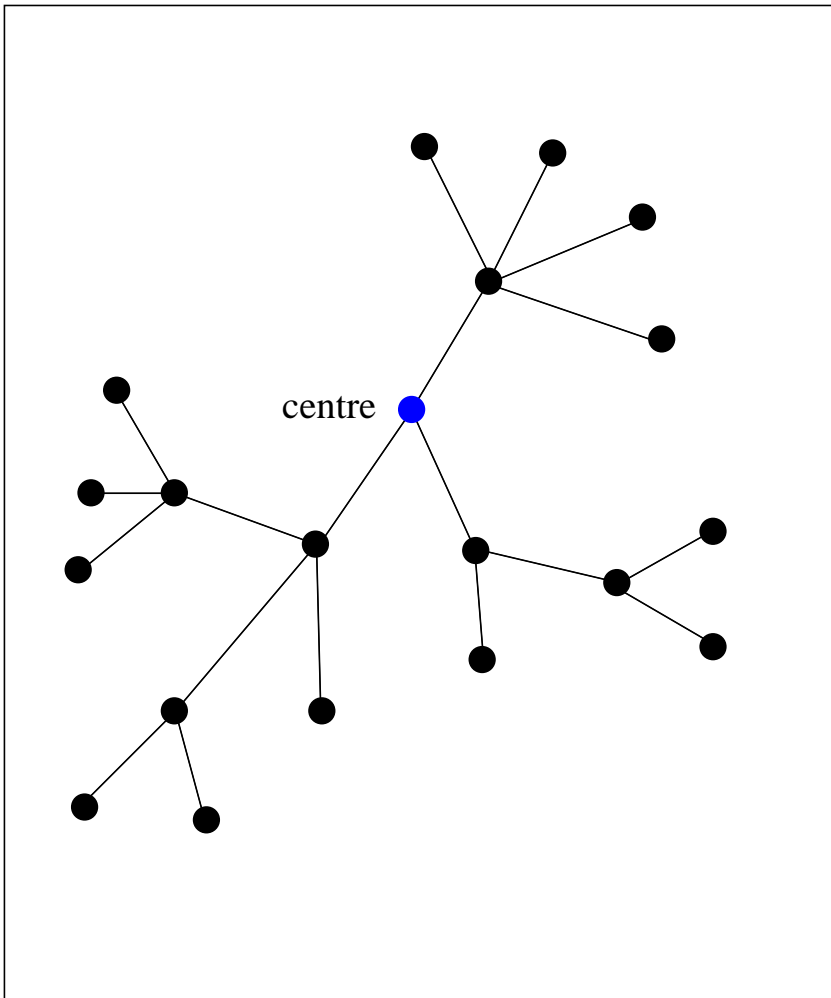
# Centre d'un arbre



# Centre d'un arbre

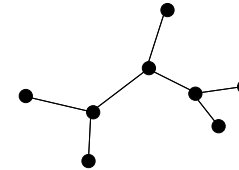


# Centre d'un arbre

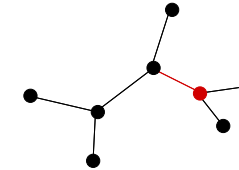


# Théorème de symétrie sur les arbres

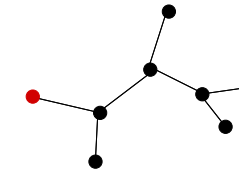
$\mathcal{A}$  arbres non enracinés



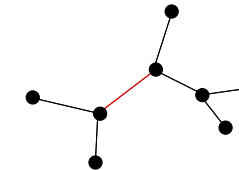
$\mathcal{A}^{\bullet-}$  arbres avec une arête marquée et une extrémité de l'arête marquée



$\mathcal{A}^\bullet$  arbres avec un sommet marqué

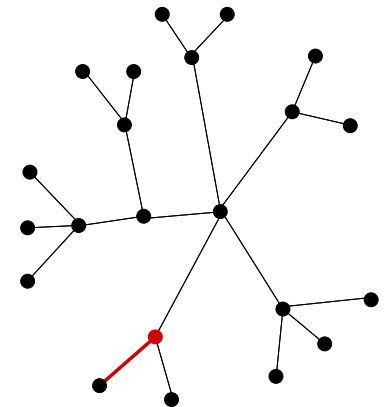
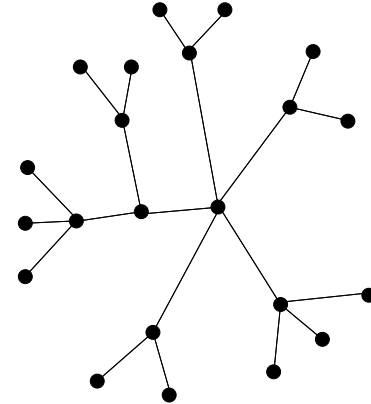
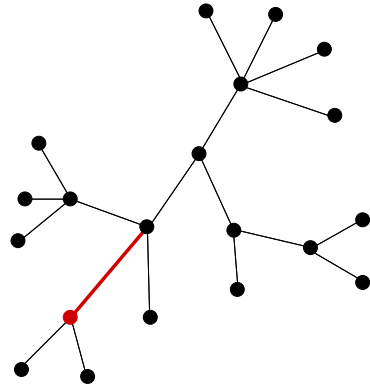
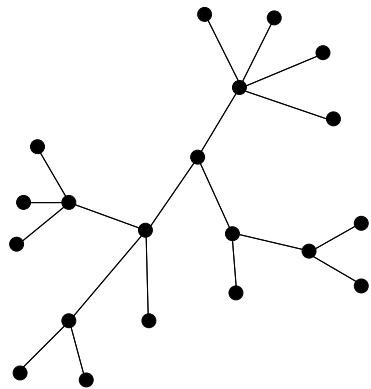
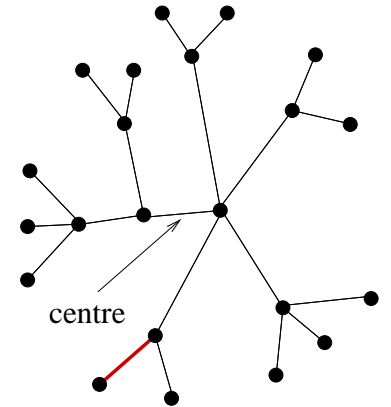
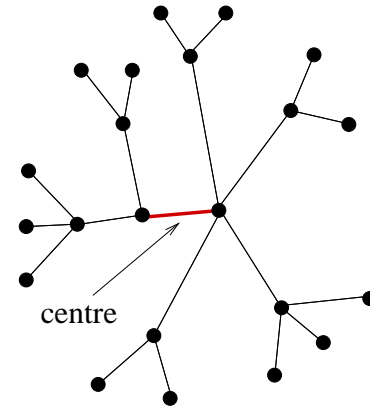
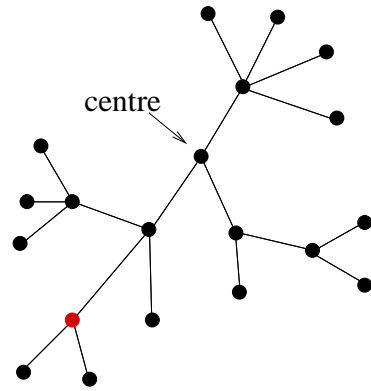
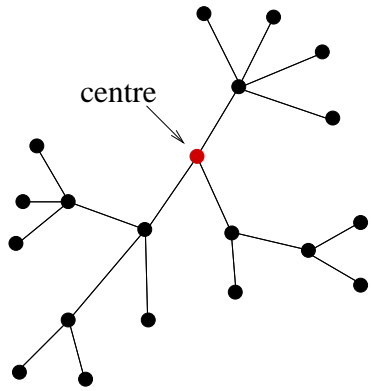


$\mathcal{A}^-$  arbres avec une arête marquée



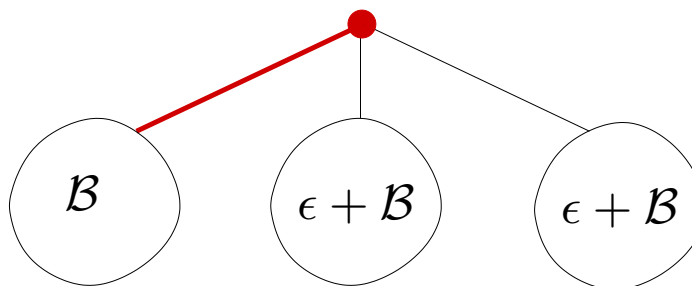
Théorème :  $\mathcal{A}^\bullet \cup \mathcal{A}^-$  est en bijection avec  $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^{\bullet-}$

# Démonstration de la bijection



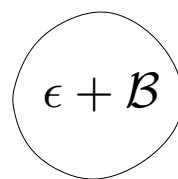
# Application aux arbres binaires

$$A^{\bullet-}(x) = xB(x)(1 + B(x))^2$$



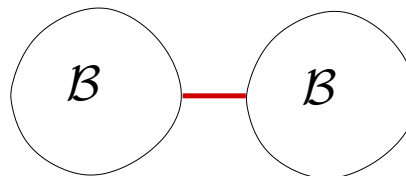
$\mathcal{B}$  : arbres binaires enracinés

$$A^{\bullet}(x) = x \left( \frac{1}{3}(1 + B(x))^3 + \frac{2}{3}(1 + B(x^3)) \right)$$



$$B(x) = x(1 + B(x))^2$$

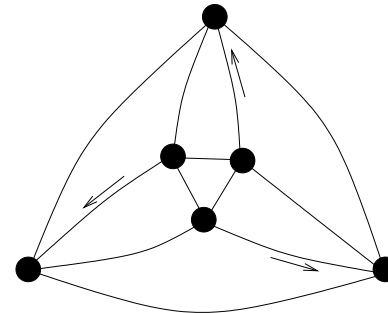
$$A^{-}(x) = \frac{1}{2}B(x)^2 + \frac{1}{2}B(x^2)$$



$$\Rightarrow A(x) = x \left( \frac{1}{3}(1 + B(x))^3 + \frac{2}{3}(1 + B(x^3)) \right) + \left( \frac{1}{2}B(x)^2 + \frac{1}{2}B(x^2) \right) - xB(x)(1 + B(x))^2$$

# Formule d'énumération de cartes non enracinées comptées par nombre d'arêtes

**Définition :** Une carte  $k$ -enracinée est une carte ayant  $k$  racines **indistinctibles**.



carte 3-enracinée

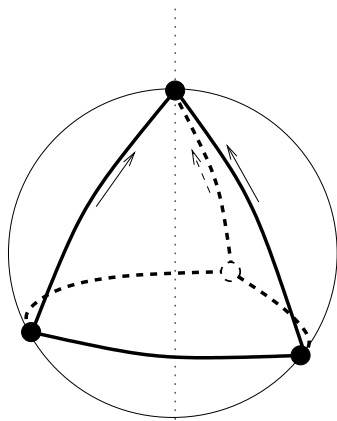
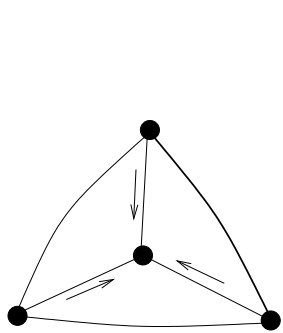
**Formule (Liskovets) :**

- Soit  $\mathcal{C}$  une famille de cartes sur la sphère (par exemple les cartes eulériennes).
- On note  $c_n$  le nombre de cartes non enracinées de  $\mathcal{C}$  à  $n$  arêtes,
- $c'_n$  le nombre de cartes enracinées de  $\mathcal{C}$  à  $n$  arêtes,
- $c_n^{(k)}$  le nombre de cartes  $k$ -enracinées de  $\mathcal{C}$  à  $n$  arêtes.

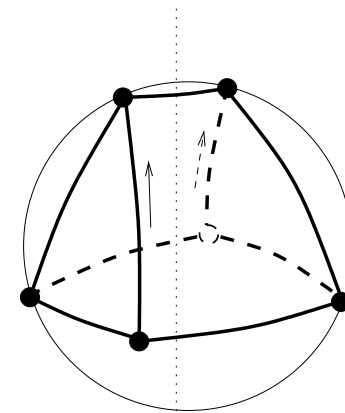
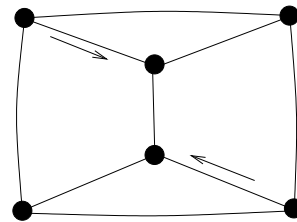
$$c_n = \frac{1}{2n} \left( c'_n + \sum_{k \geq 2} \phi(k) c_n^{(k)} \right)$$

# Structure des cartes $k$ -enracinées

- Une carte  $k$ -enracinée peut être dessinée sur la sphère tel qu'il y a une rotation de la sphère d'angle  $2\pi/k$  laissant la figure invariante.
- Les deux intersections de l'axe de rotation avec la sphère peuvent être un sommet ou le centre d'une face, et aussi le milieu d'une arête (seulement si  $k = 2$ ).



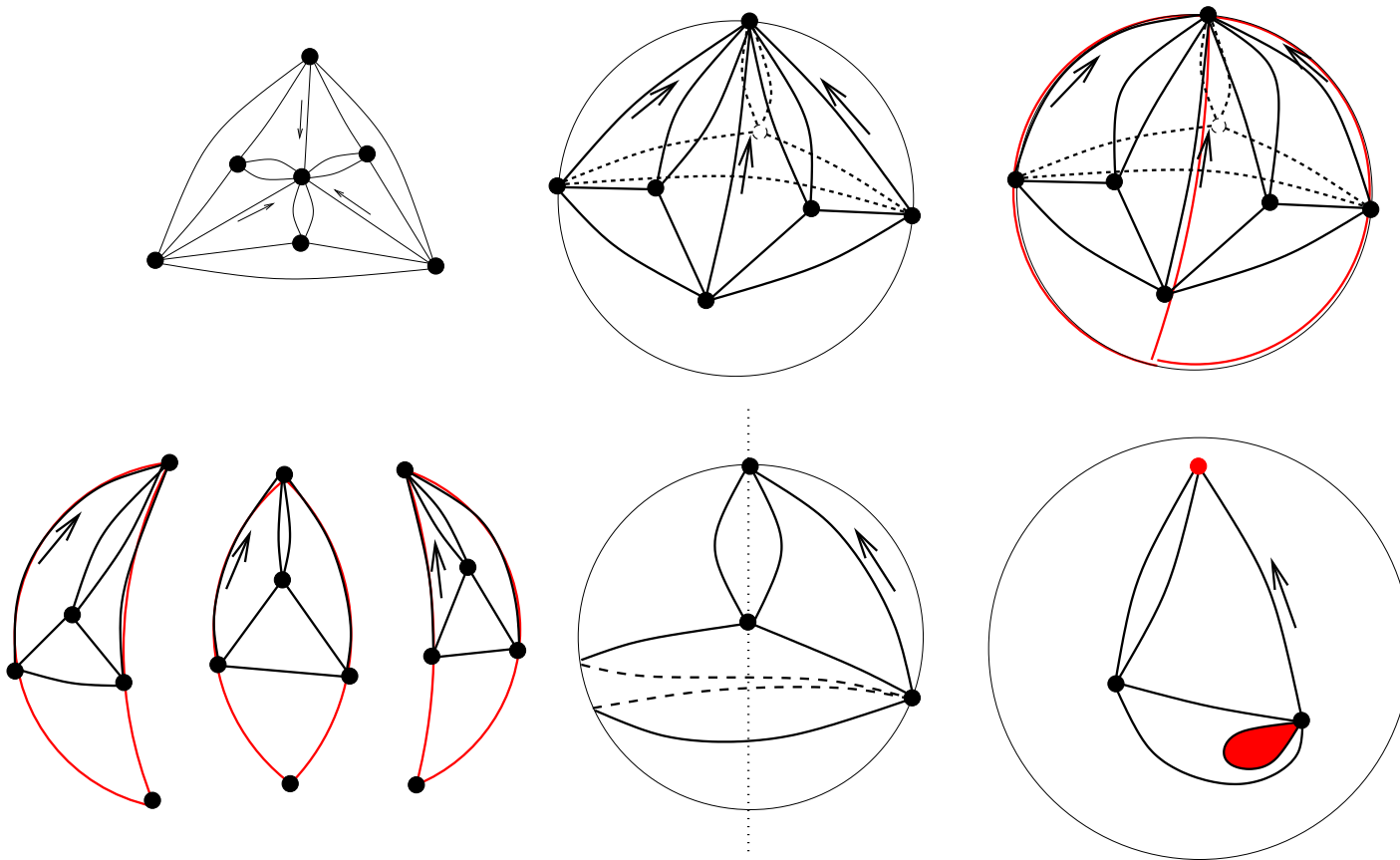
type : sommet-face



type : arête-face

# Quotient d'une carte $k$ -enracinées

Le quotient d'une carte  $k$ -enracinée de type sommet-face est une carte enracinée avec un sommet et une face marqués



## Formules d'énumération de cartes $k$ -enracinées

- Relation d'Euler : Une carte à  $n$  arêtes a  $n + 2$  cellules qui sont sommets ou faces
- carte enracinée à  $n$  arêtes + choix d'un couple dans  $sommets \cup faces \rightarrow$  carte  $k$ -enracinée à  $kn$  arêtes avec pôles dans  $sommets \cup faces$ .
- On note  $c_n^{(k)p-p}$  le nombre de cartes  $k$ -enracinées à  $kn$  arêtes dont les deux pôles sont un sommet ou le milieu d'une face.
- On note  $c_n$  le nombre de cartes enracinées à  $n$  arêtes (connu).
- On a la formule

$$c_n^{(k)p-p} = c_n \frac{1}{2} (n + 2)(n + 1) = \frac{3^n (2n)!}{n!^2}$$

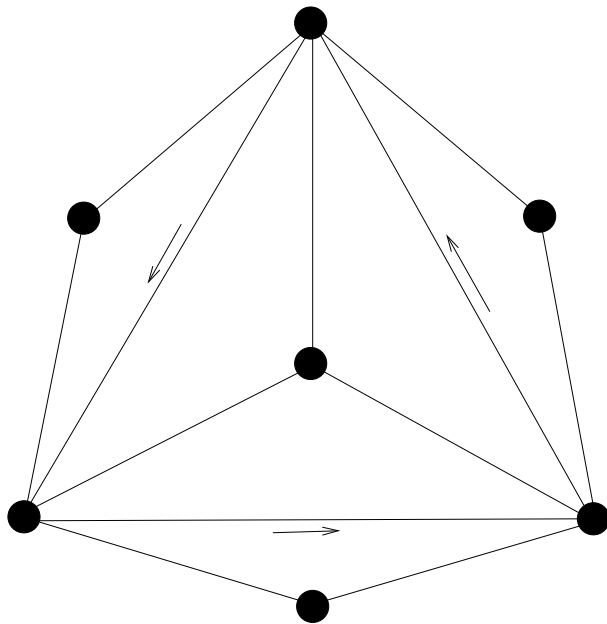
- Formules exactes aussi pour les 2-enracinées avec un pôle au milieu d'un arête.

## Cartes 2-connexes et 3-connexes

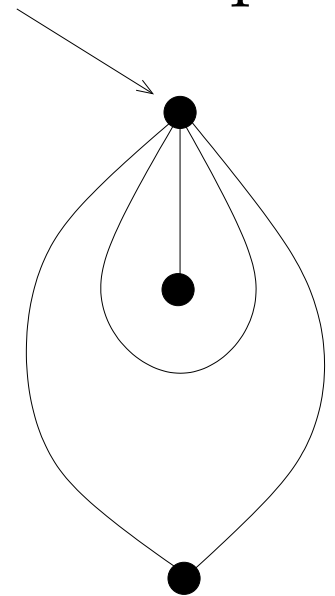
- **Carte 2-connexe** : carte sans boucle telle qu'il faut lui enlever au moins deux sommets pour la déconnecter
- **Carte 3-connexe** : carte sans boucle sans arête multiple telle qu'il faut lui enlever au moins trois sommets pour la déconnecter
- Problème : énumérer les cartes 2-connexes et 3-connexes non enracinées sur la sphère, en espérant pouvoir énumérer les graphes 3-connexes.

## Limites de la méthode du quotient

- Fonctionne bien pour les cartes sans contraintes.
- Le quotient d'une carte 2-connexe n'est pas forcément 2-connexe.

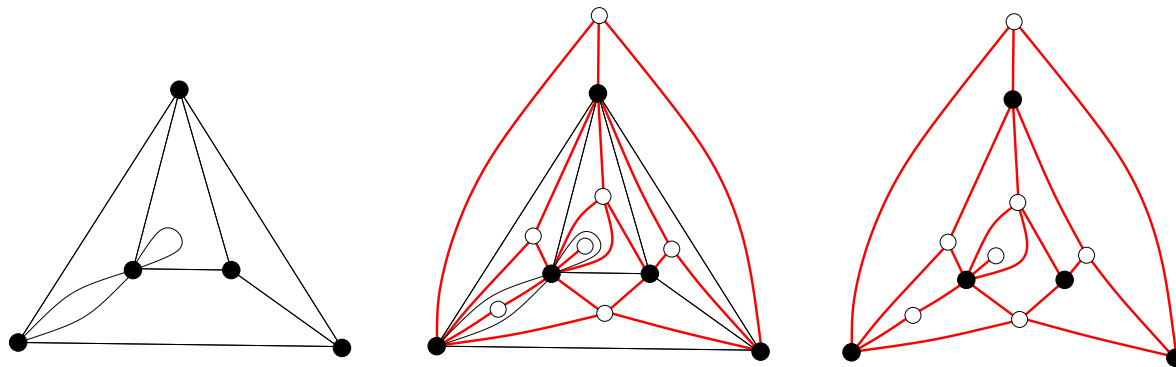


sommet séparateur



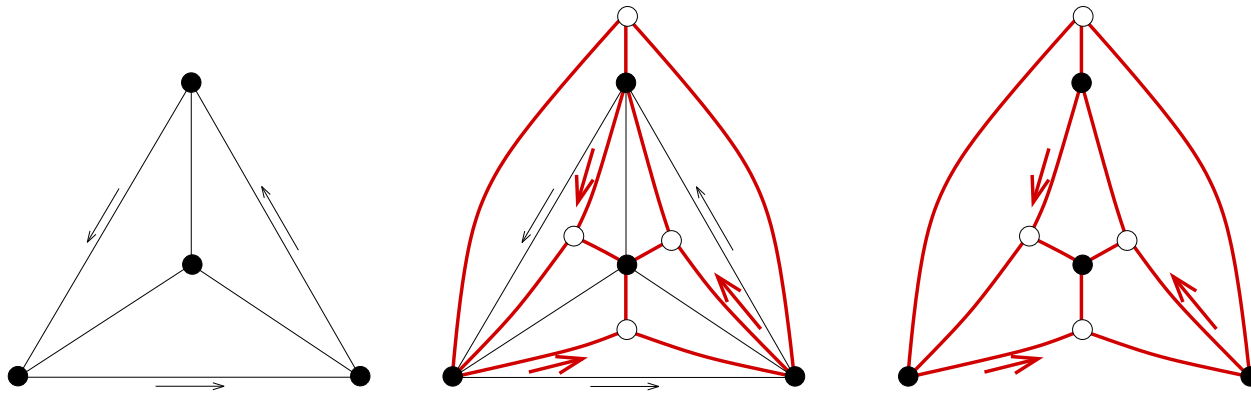
## Bijection entre cartes à $n$ arêtes et quadrangulations bicoloriées à $n$ faces

On met un sommet (blanc) dans chaque face de la carte. On relie par une arête un sommet de la carte et un sommet au milieu d'une face si le sommet est incident à la face. A la fin, on enlève les arêtes de la carte de départ.



# Propriétés de la bijection

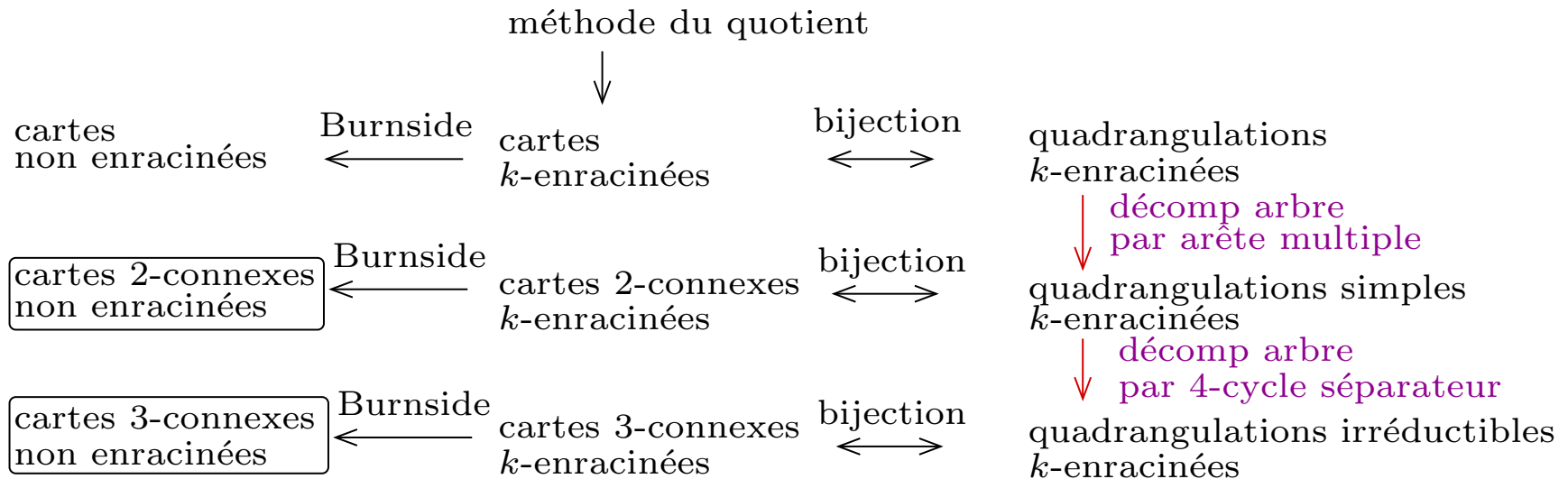
- Cette application met en bijection les cartes 2-connexes non enracinées à  $n$  arêtes et les quadrangulations bicoloriées sans arête multiples, dites simples.
- Cette application met en bijection les cartes 3-connexes non enracinées et les quadrangulations bicoloriées sans 4-cycle séparateur dites irréductibles (tout 4-cycle délimite une face).
- En général, cette application met en bijection les cartes  $k$ -enracinées et les quadrangulations  $k$ -enracinées dont les  $k$  racines sont incidentes à des sommets noirs



## On se ramène aux quadrangulations

- Pour énumérer les cartes 2-connexes non enracinées à  $n$  arêtes, il suffit de savoir énumérer les quadrangulations  $k$ -enracinées sans arête multiple à  $n$  faces.
- Pour énumérer les cartes 3-connexes non enracinées à  $n$  arêtes, il suffit de savoir énumérer les quadrangulations  $k$ -enracinées irréductibles à  $n$ .

# Schéma de la méthode

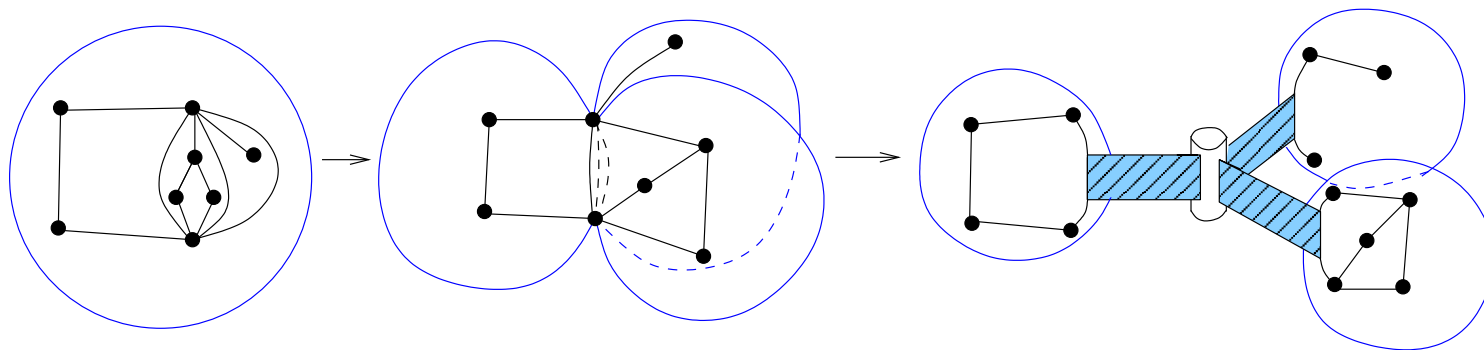


# Décomposition en arbre d'une quadrangulation quelconque

- Décomposition par arêtes multiples d'une quadrangulation quelconque en un arbre avec des nœuds qui sont des quadrangulations simples et des nœuds qui représentent des arêtes multiples
- On se sert de cette décomposition en arbre pour obtenir les SG des quadrangulations simples  $k$ -enracinées à partir des SG des quadrangulations quelconques  $k$ -enracinées (que l'on connaît)

# Exemple de décomposition en arbre d'une quadrangulation au niveau d'une arête triple

Déformation de la quadrangulation, au niveau de chaque arête multiple, pour en faire un arbre

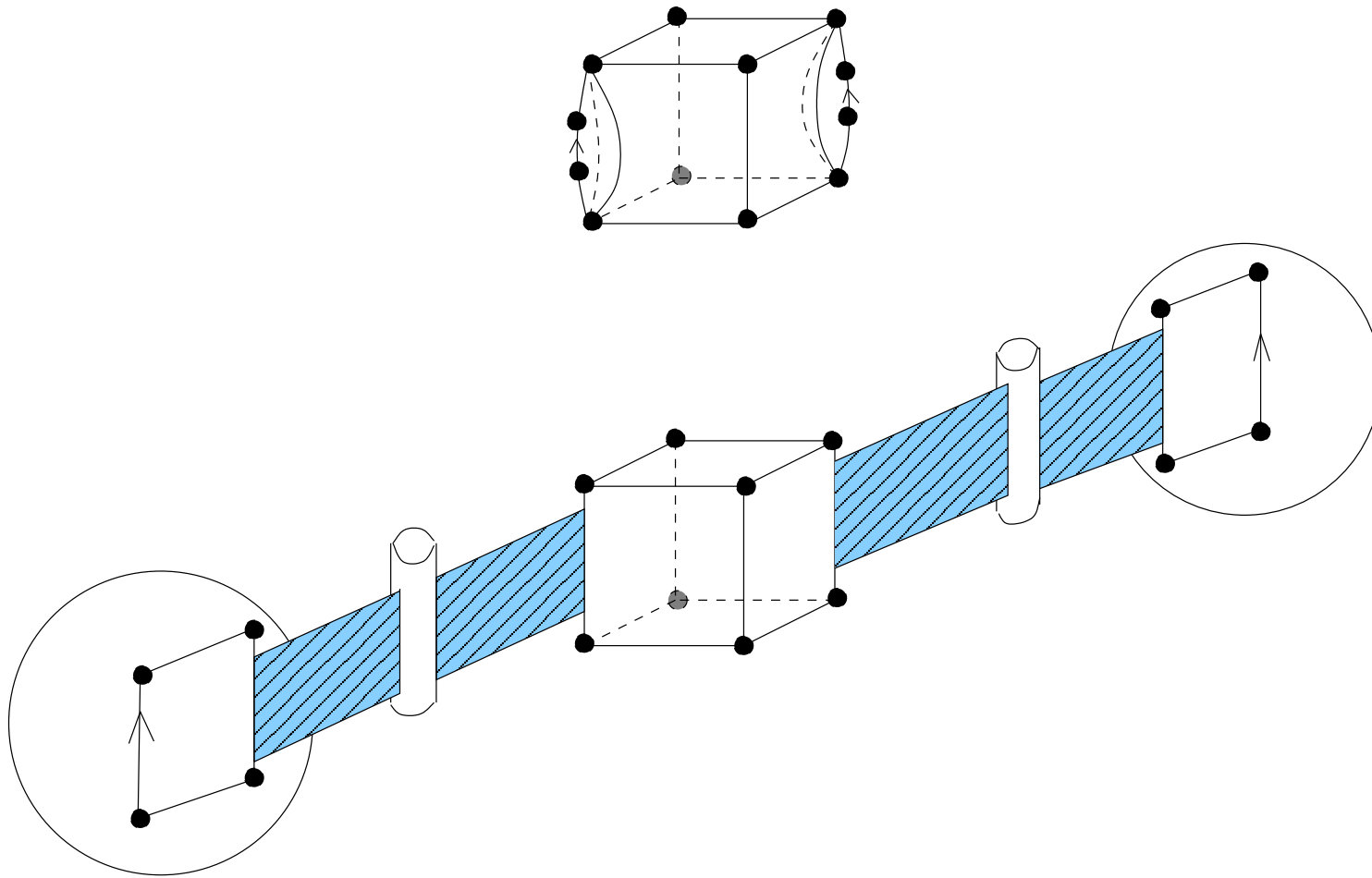


# Passage des quadrangulations quelconques $k$ -enracinées aux quadrangulations simples $k$ -enracinées

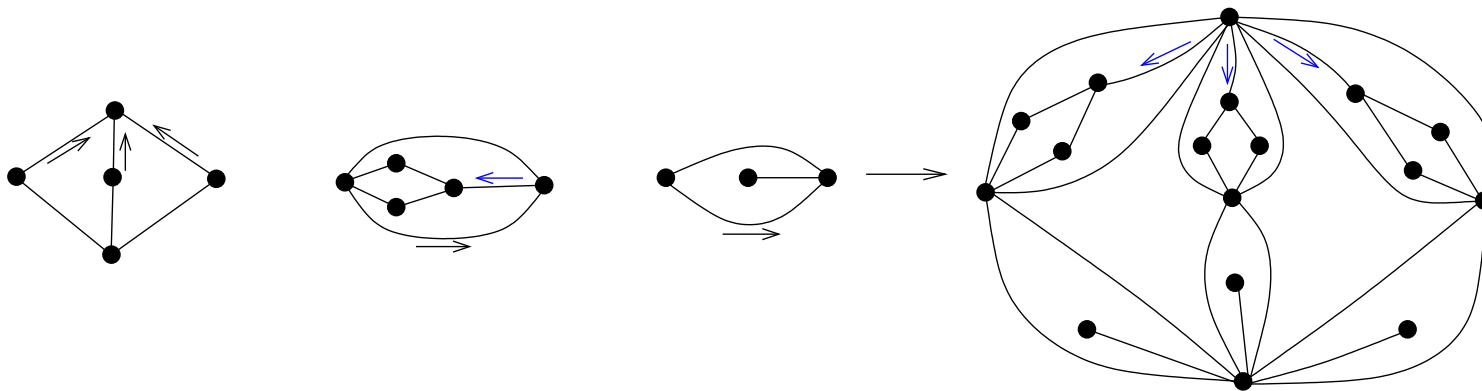
La symétrie de la  $k$ -racine (rotation d'ordre  $k$ ) induit une symétrie sur l'arbre qui laisse le centre de l'arbre invariant. Deux cas se présentent :

- Le centre de l'arbre est un nœud de type quadrangulation simple
- Le centre de l'arbre est un nœud de type arête multiple

Exemple de répercussion de la symétrie sur un nœud de l'arbre de type quadrangulation simple



# Construction d'une quadrangulation $k$ -enracinée dont la symétrie se répercute sur un nœud de type quadrangulation simple

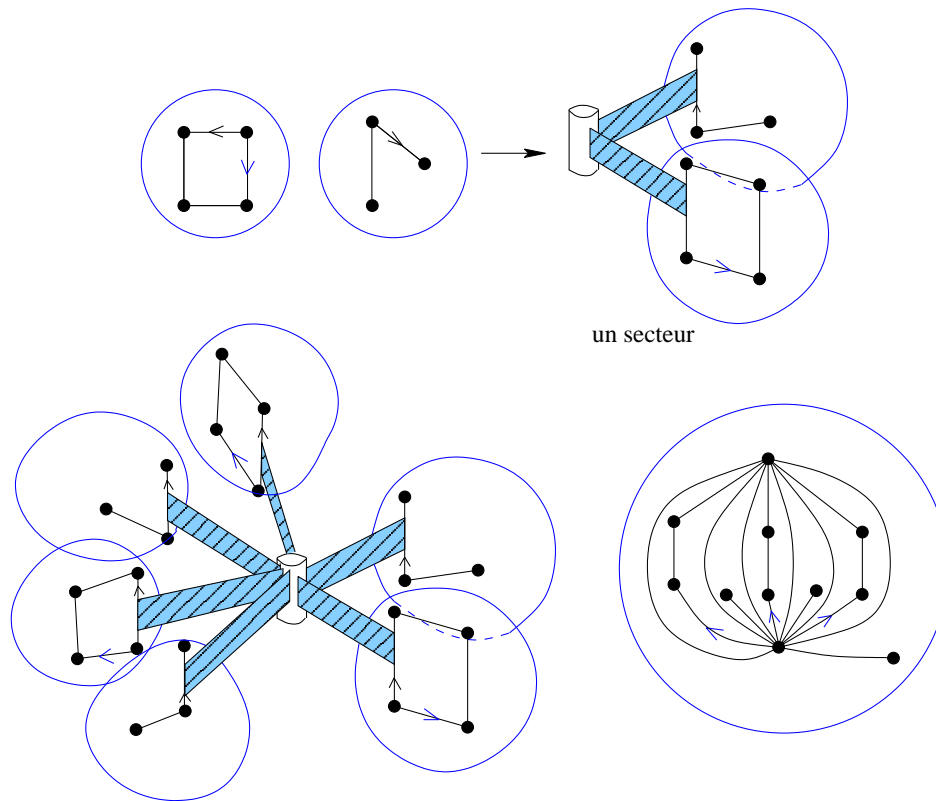


Equation obtenue :

$$\frac{(z(1 + F(z)))'}{F(z) + 1} g_{vv}^{(k)} (z(1 + F(z)))$$

où  $F(z)$  est la SG (connue) des quadrangulations enracinées.

# Exemple de répercussion sur une arête multiple



Equation obtenue :

$$z f'(z) \frac{1}{1 - f(z)}$$

## On obtient les quadrangulations simples $k$ -enracinées

Equation obtenue :

$$F_{vv}^{(k)}(z) = z f'(z) \frac{1}{1 - f(z)} + \frac{(z(1 + F(z)))'}{F(z) + 1} g_{vv}^{(k)}(z(1 + F(z)))$$

On connaît toutes les SG de l'équation sauf  $g_{vv}^{(k)}(z(1 + F(z)))$ . On déduit de l'équation  $g_{vv}^{(k)}(z(1 + F(z)))$  puis  $g_{vv}^{(k)}(y)$  en faisant le changement de variable  $y = z(1 + F(z))$

# Récapitulatif

Cartes non enracinées 2-connexes



Burnside

Cartes  $k$ -enracinées 2-connexes



Tutte

Quadrangulations simples  $k$ -enracinées



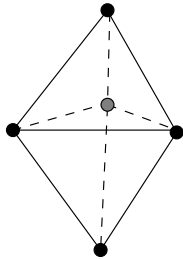
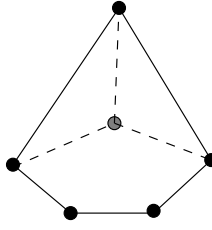
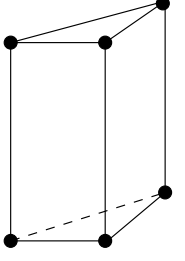
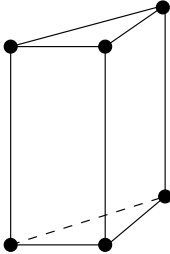
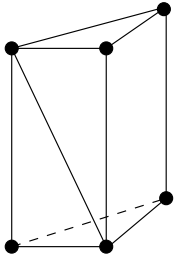
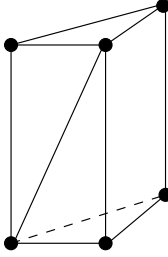
Arbre de décomposition

Equation entre SG des quadrangulations simples  
 $k$ -enracinées et SG des quadrangulations quelconques  
 $k$ -enracinées donnée par Liskovets

On obtient les cartes 2-connexes non enracinées  
(déjà obtenues par Liskovets)

| n | $c_n$ |    |         |
|---|-------|----|---------|
| 1 | 2     | 9  | 596     |
| 3 | 2     | 10 | 2605    |
| 4 | 3     | 11 | 12098   |
| 5 | 6     | 12 | 59166   |
| 6 | 16    | 13 | 297684  |
| 7 | 42    | 14 | 1538590 |
| 8 | 151   |    |         |

Méthode analogue : on obtient les cartes 3-connexes non enracinées (appelées aussi polytopes) comtées par nombre d'arêtes (cf Walsh)

| $n$ | $d_n$ |   |
|-----|-------|---|
| 6   | 1     |    |
| 7   | 0     |   |
| 8   | 1     |    |
| 9   | 2     |    |
| 10  | 3     |  |
| 11  | 4     |  |
| 12  | 15    |  |

## Complexité du calcul des coefficients

La relation  $2nc_n = c'_n + \sum_{k=1}^n \phi(k)c_n^{(k)}$  se traduit au niveau des séries génératrices par :

$$\sum_n 2nc_n y^n = g(y) + zg_{fv}(y^2) + z^2 g_{ff}(y^2) + \sum_{k=1}^n \phi(k)g_{vv}^{(k)}(y^k)$$

Si on note  $\mathcal{C}_N(f)$  le temps de calcul des  $N$  premiers coefficients d'une fonction  $f(z)$ , on a

$$\mathcal{C}_N \left( \sum_n 2nc_n \right) = \mathcal{C}_N(g) + \mathcal{C}_{N/2}(g_{fv}) + \mathcal{C}_{N/2}(g_{ff}) + \sum_{k=1}^n \mathcal{C}_{N/k} \left( g_{vv}^{(k)} \right)$$

# Comment obtenir le développement des SG de quadrangulations simples $k$ -enracinées

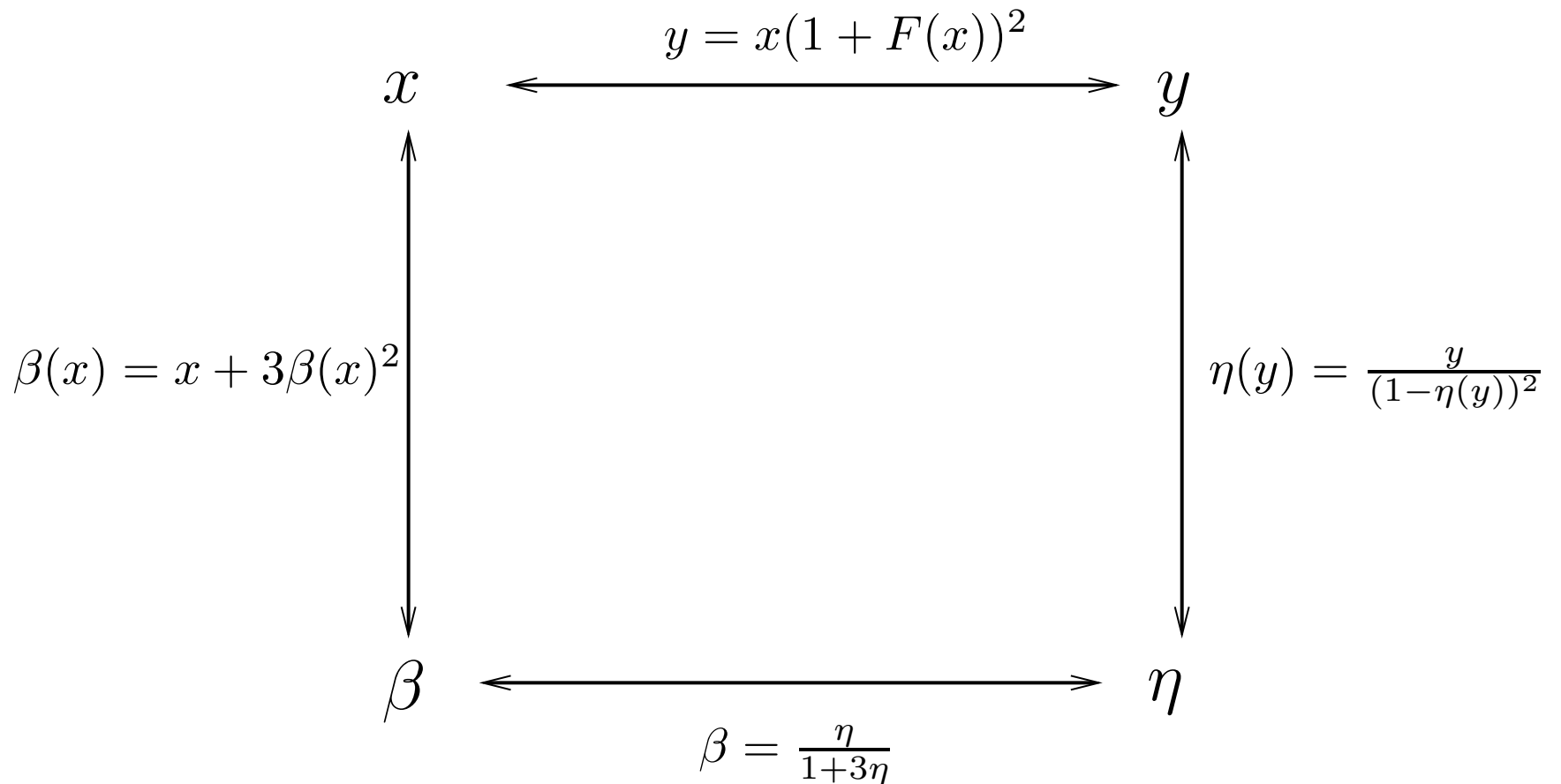
- On part de l'équation (selon le nombre de faces) :

$$F_{vv}^{(k)}(x) = x f'(x) \frac{1}{1 - f(x)} + g_{vv}^{(k)} (x(1 + F(x)))^2$$

- On connaît toutes les SG de l'équation sauf  $g_{vv}^{(k)} (x(1 + F(x)))^2$ .
- On en déduit le développement  
 $g_{vv}^{(k)} (x(1 + F(x)))^2 = 2x + 18x^2 + 180x^3 + \dots$
- On inverse le changement de variable  
 $y = x(1 + F(x))^2 = x + 4x^2 + 22x^3 + \dots$   
 $x(y) = y - 4y^2 - 10y^3 + \dots$
- On substitue  $x$  par  $x(y)$  dans le développement  
 $2x + 18x^2 + 180x^3 + \dots$
- On obtient  $g_{vv}^{(k)}(y) = 2y + 10y^2 + 56y^3 + \dots$

# Méthode efficace

Faire le changement de variable entre  $x$  et  $y$  via des petites séries algébriques  $\beta(x)$  et  $\eta(y)$  associées respectivement à  $x$  et  $y$ , tel que la dépendance entre  $\beta$  et  $\eta$  est facile (rationnelle).



## Utiliser l'algébricité des SG

- On introduit la SG algébrique (arbres bourgeonnants)

$$\beta(x) = x + 3\beta(x)^2$$

- La SG des quadrangulations enracinées est expression rationnelle de  $\beta(x)$  :  $F(x) = \frac{\beta(x)(2-9\beta(x))}{(1-3\beta(x))^2}$ .
- Toutes les SG de quadrangulations  $k$ -enracinées sont expressions rationnelles de  $\beta(x)$

## Utiliser l'algébricité des SG

- On part de l'équation

$$F_{vv}^{(k)}(x) = x f'(x) \frac{1}{1 - f(x)} + g_{vv}^{(k)}(x(1 + F(x))^2)$$

- Toutes les SG connues sont expressions rationnelles de  $\beta(x)$
- On trouve une expression rationnelle en  $\beta(x)$  pour  $g_{vv}^{(k)}(x(1 + F(x))^2) : g_{vv}^{(k)}(x(1 + F(x))^2) = \frac{2\beta(x)}{1-6\beta(x)}$
- Le changement de variable est  $y = x(1 + F)^2$ ,  $y = \frac{\beta(1-4\beta)^2}{(1-3\beta)^3}$
- On pose  $\eta = \frac{\beta}{1-3\beta}$ . On a  $y = \eta(1 - \eta)^2$ .  $\eta$  serie algébrique en  $y$  (série d'arbres) :  $\eta(y) = \frac{y}{(1-\eta(y))^2}$ . On a  $\beta = \frac{\eta}{1+3\eta}$ .
- On substitue  $\beta$  par  $\frac{\eta}{1+3\eta}$  dans  $\frac{2\beta}{1-6\beta}$
- On obtient  $g_{vv}^{(k)}(y) = \frac{2\eta(y)}{1-3\eta(y)}$ .

## Utiliser l'algébricité des SG

On en déduit un algorithme rapide pour calculer les  $N$  premiers coefficients de la série  $g_{vv}(y)$ .

- Prendre le résultant de 
$$\begin{cases} -\eta(1 - \eta)^2 + y = 0 \\ -g_{vv}(1 - 3\eta) + 2\eta = 0 \end{cases}$$
- On obtient 
$$4g_{vv}^3 + 8 * g_{vv}^2 - 8y - 36y * g_{vv} - 54y * g_{vv}^2 + 4g_{vv} - 27y * g_{vv}^3 = 0$$
- Appliquer ALGEQTODIFFEQ pour obtenir une equa dif vérifiée par  $g_{vv}$  :  $g_{vv}(0) = 0$ ,  $-4 - 6 * g_{vv}(y) + (2 - 54y) \frac{d}{dy} g_{vv}(y) + (-27y^2 + 4y) \frac{d^2}{dy^2} g_{vv}(y) = 0$
- prendre le coefficient  $[y^n]$  dans l'équation pour avoir une équation récursive sur les coefficients avec DIFFEQTOREC :  $(-6 - 27m - 27m^2)u(m) + (6m + 2 + 4m^2)u(m + 1) = 0$ ,  $u(0) = 0$ ,  $u(1) = 2$ .

## Résultats de complexité

- On reprend l'équation :

$$\mathcal{C}_N \left( \sum_n 2nc_n \right) = \mathcal{C}_N(g) + \mathcal{C}_{N/2}(g_{fv}) + \mathcal{C}_{N/2}(g_{ff}) + \sum_{k=1}^n \mathcal{C}_{N/k} \left( g_{vv}^{(k)} \right)$$

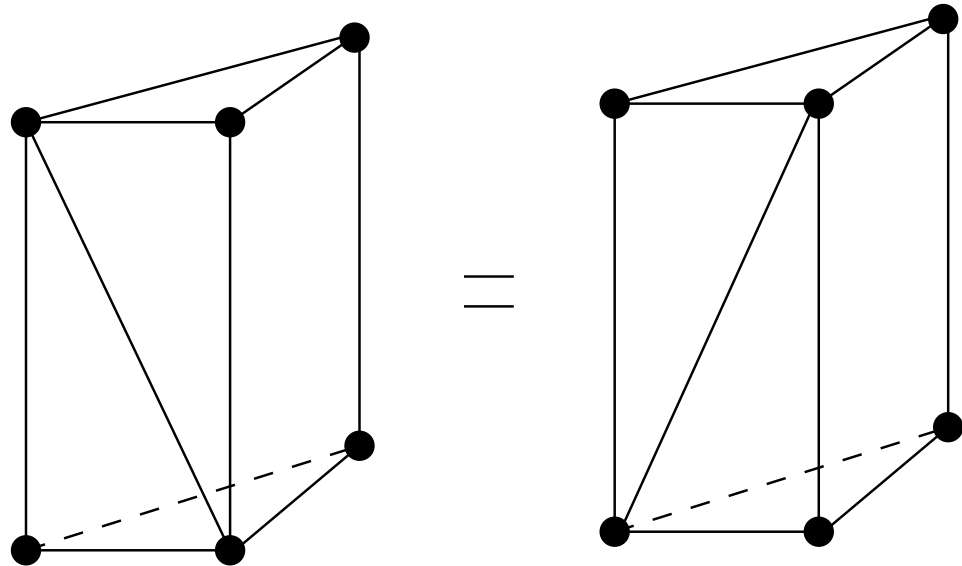
- On a  $\mathcal{C}_N = \mathcal{O}(N)$  pour les SG de quadrangulations simples  $k$ -enracinées.
- $\mathcal{C}_N \left( \sum_n 2nc_n \right) = \mathcal{O}(N) + \mathcal{O}(N/2) + \sum_{k=1}^N \mathcal{O}(N/k)$
- Donc on a besoin de  $\mathcal{O}(N \log(N))$  opérations

## Résultats de complexité

- Pour l'énumération des 2-connexes et 3-connexes selon le nombre d'arêtes : table des  $N$  premiers coefficients demande  $\mathcal{O}(N \log(N))$  opérations.
- Pour l'énumération des 2-connexes et 3-connexes selon le nombre de sommets et faces : table des premiers coefficients d'indices  $(i, j)$  avec  $i + j \leq N$  demande  $\mathcal{O}(N^2)$  opérations.

## Cas à réflexion près

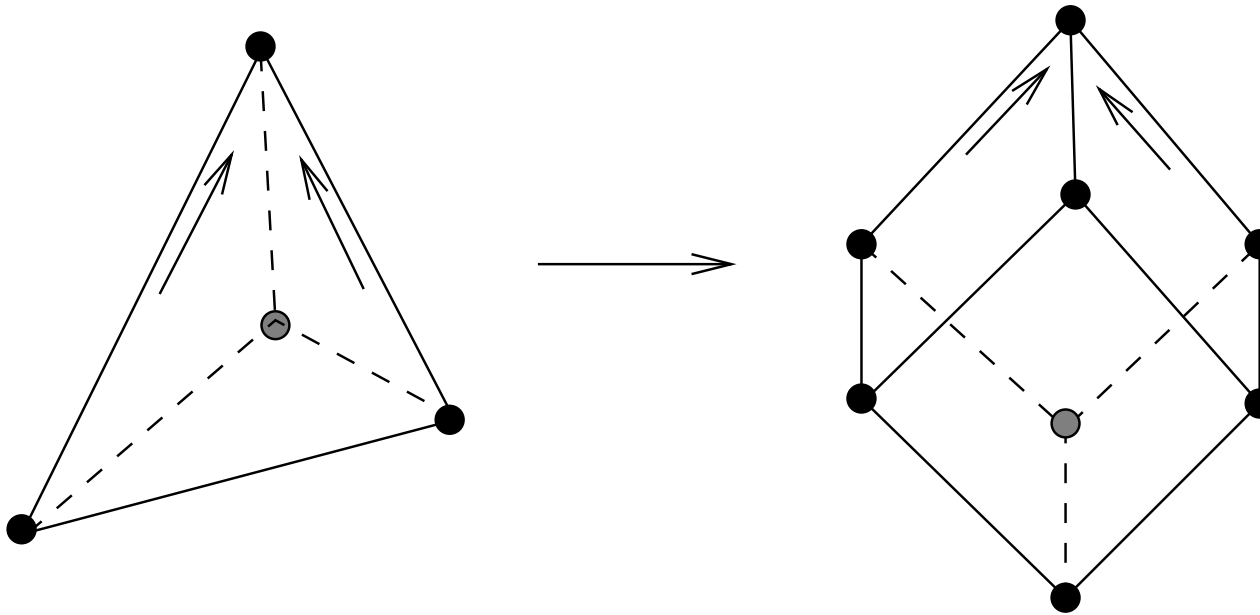
Il faut avoir



- Les cartes 3-connexes à tout automorphisme près (déformation continue + éventuelle réflexion) correspondent aux graphes 3-connexes non étiquetés (Whitney)
- On a une formule pour obtenir les cartes à tout automorphisme près en fonction des cartes  $k$ -enracinées orientées et non orientées

# Exemple

Une carte 2-enracinée de type réflexion et la quadrangulation 2-enracinée associée



## Etat d'avancement sur les cartes à réflexion près

- Pas d'article publié sauf Wormald pour les cartes quelconques
- Il faut utiliser des SG compliquées (4 variables) pour énumérer les quadrangulations simples de type réflexion
- Il est en revanche possible d'utiliser la deuxième décomposition en arbre pour mettre en relation la SG des quadrangulations simples 2-enracinées de type réflexion avec la SG des quadrangulations irréductibles 2-enracinées de type réflexion.
- Pour le moment, algorithme polynomial pas très rapide pour énumérer les graphes 3-connexes.