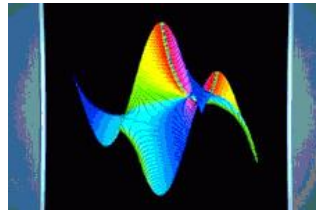


Combinatoire Analytique des Graphes Connexes

Bruno Salvy

`http://algo.inria.fr`



Travail commun avec Philippe Flajolet et Gilles Schaeffer

Énumération de graphes étiquetés

$\mathcal{G}_{n,m}$: ensemble des graphes sur $\{1, \dots, n\}$ à m arêtes.

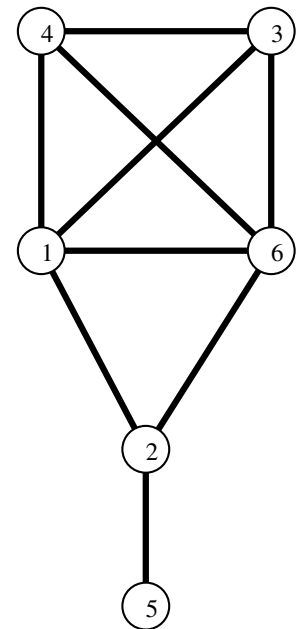
$\mathcal{C}_{n,m}$: sous-ensemble des graphes connexes.

$$G_{n,m} = |\mathcal{G}_{n,m}| = \binom{\binom{n}{2}}{m}.$$

En termes de séries génératrices,

$$G(z, q) := \sum_{n,m} G_{n,m} z^n q^m = \sum_{n \geq 0} (1 + q)^{\binom{n}{2}} \frac{z^n}{n!},$$

$$C(z, q) := \sum_{n,m} C_{n,m} z^n q^m = \log G(z, q).$$

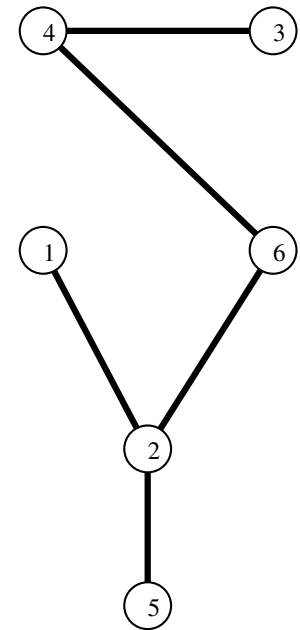


Graphes connexes et excès

Graphes connexes sur $\{1, \dots, n\}$: au moins $n - 1$ arêtes !

- $m = n - 1$: arbres de Cayley ;
- $m = n$: graphe unicyclique ;
- plus généralement, $m = n + k$ avec $k \geq -1$; l'entier k est appelé l'**excès** du graphe.

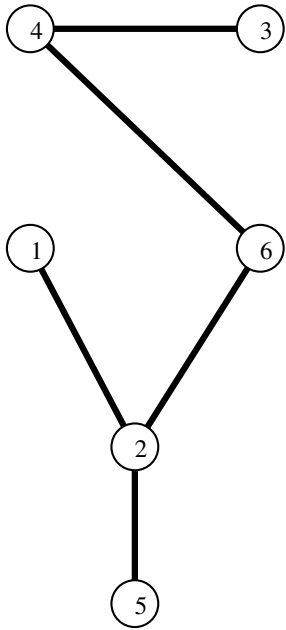
On va intéresser aux $C_{n,n+k}$ et à leur **asymptotique** pour $n \rightarrow \infty$.



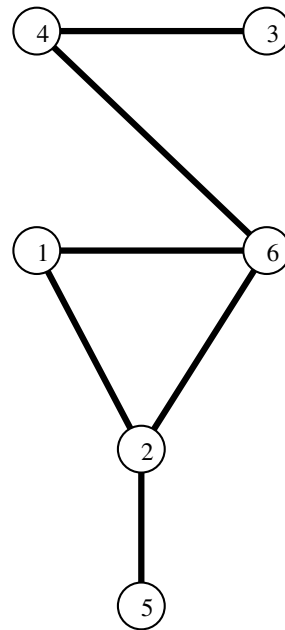
$$k = -1$$

$$\text{On pose } W_k(z) = \sum_{n \geq 0} C_{n,n+k} \frac{z^n}{n!}.$$

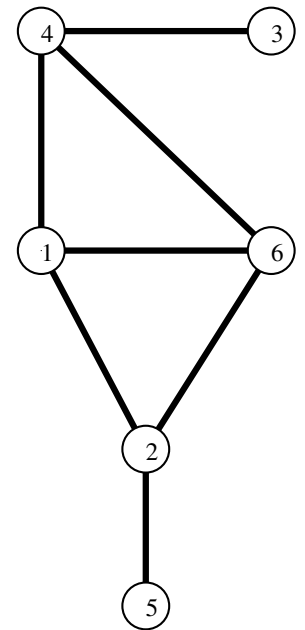
Graphes connexes et excès



$$k = -1$$



$$k = 0$$



$$k = 1$$

On veut calculer $W_k(z) = \sum_{n \geq 0} C_{n, n+k} \frac{z^n}{n!}$.

Échauffement combinatoire

Arbres enracinés : $\mathcal{T} = \mathcal{Z} \times \text{Set}(\mathcal{T})$

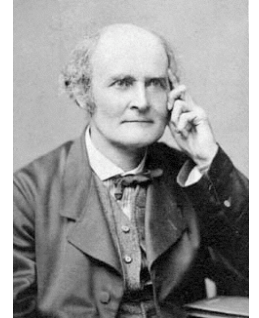
$$\longrightarrow T(z) = z \exp(T(z)),$$

non enracinés : $\mathcal{T} = \Theta \mathcal{W}_{-1}$

$$\longrightarrow W_{-1}(z) = \int \frac{T dz}{z} = \int e^T dz = \int (T' - TT') dT = T(z) - \frac{1}{2}T^2(z),$$

graphes unicycliques : $\mathcal{W}_0 = \text{Cycle}(\mathcal{T}, \text{card} \geq 3)$

$$\longrightarrow W_0 = \frac{1}{2} \left(\log \frac{1}{1-T} - T - \frac{T^2}{2} \right).$$

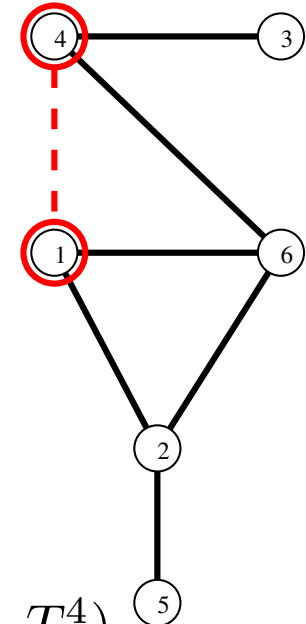


Au-delà

$$C(z, q) = \sum_{n,m} C_{n,m} z^n q^m = \sum_{k \geq -1} W_k(zq) q^k.$$

Marquer deux sommets donne une arête :

$$\theta_q \exp(\mathcal{C}) = q \left(\frac{1}{2} (\theta_z^2 - \theta_z) - \theta_q \right) \exp(\mathcal{C}).$$



$$\Rightarrow W_1 = \frac{T^4(6 - T)}{24(1 - T)^3}, \quad W_2 = \frac{T^4(2 + 28T - 23T^2 + 9T^3 - T^4)}{48(1 - T)^6}, \dots$$

Thm. 1 (Wright77). $W_k(z) = \frac{A_k(T(z))}{(1 - T(z))^{3k}}, A_k(x) \in \mathbb{Q}[x],$

$k \geq 1.$

Analyse de singularité

Singularité de plus petit module \rightarrow croissance exponentielle

Comportement local \rightarrow termes sous-exponentiels

Thm. 2 (FlOd84). *Sous des conditions légères*

$$f(z) = g(z) + O(h(z)), \quad z \rightarrow \rho \Rightarrow [z^n]f(z) = [z^n]g(z) + O([z^n]h(z)), \quad n \rightarrow \infty$$

Une échelle asymptotique simple se traduit

$$[z^n] \left(1 - \frac{z}{\rho}\right)^\alpha \log^\beta \frac{1}{1 - z/\rho} \sim \rho^{-n} \frac{n^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} \log^\beta n, \quad \alpha \notin \mathbb{N}.$$

Méthode : (i.) Localiser les singularités dominantes ;
(ii.) développer localement ; (iii.) traduire.

Application aux arbres

Singularité dominante de T :

$$T(\rho)e^{-T(\rho)} = \rho, \quad (1 - T(\rho))e^{-T(\rho)} = 0 \quad (\text{fcts. impl.})$$
$$\Rightarrow \rho = e^{-1}.$$

Développement local :

$$Te^{-T} = e^{-1}(1 - (1 - T))e^{1-T} = e^{-1} \left(1 - \frac{(1 - T)^2}{2} - \frac{(1 - T)^3}{3} + \dots \right)$$

$$z = e^{-1} - e^{-1}(1 - ez)$$

$$\rightarrow T(z) = 1 - \sqrt{2}\sqrt{1 - ez} + \dots$$

Application :

$$[z^n]T(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^n n^{-3/2}, \quad (\text{Stirling!})$$

L'asymptotique du nombre de graphes connexes

Cor. 1. Lorsque $n \rightarrow \infty$,

$$C_{n,n-1} = n^{n-2}, \quad C_{n,n} = n^{n-1/2} \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{4} - \frac{7}{6\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right),$$

$$C_{n,n+k} \underset{k \geq 1}{=} A_k(1) \sqrt{\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{3k-1}{2}} \left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{3k}{2}\right)} + \frac{\frac{A'_k(1)}{A_k(1)} - k}{\Gamma\left(\frac{3k-1}{2}\right)} \sqrt{\frac{2}{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right).$$

Thm. 3 (FlSaSc200★). Les $A_k^{(j)}(1)$ sont donnés par

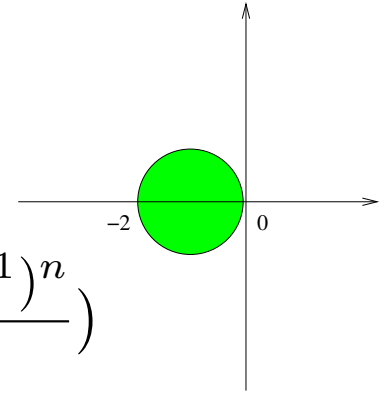
$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k(1) x^k = \log \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(6k)!}{(3k)!(2k)!3^{2k}2^{5k}} x^k \right), \quad [JaKnLuPi93]$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} A'_k(1) x^k = \frac{x}{6} + \frac{4-7x}{12} \left(1 + (2x)^{1/3} \frac{\text{Ai}'((2x)^{-2/3})}{\text{Ai}((2x)^{-2/3})} \right), \dots$$

Surtout, la méthode donne une preuve **analytique** directe à la fois du théorème de Wright et de ces résultats.

De la combinatoire à l'analyse

Convergence. La série génératrice des graphes connexes,



$$Q(z, -q) := \sum_{n,k} C_{n,n+k} q^k \frac{z^n}{n!} = q \log \left(\sum_n (1+q)^{n(n-1)/2} \frac{(zq^{-1})^n}{n!} \right)$$

diverge pour $q > 0$, mais pas pour $-2 < q < 0$!

Linéarisation. Pour $V(z) = \sum_n v_n z^n$ avec $\sum |v_n| < \infty$ et $w \in (0, 1)$,

$$\sum_n w^{n^2/2} v_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} V(e^{ix\sqrt{\log w^{-1}}}) e^{-x^2/2} dx.$$

Démonstration :

$$e^{-t^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} e^{-x^2/2} dx.$$

Graphes connexes via l'analyse

Application. Pour $q \in]0, 1[$ la série génératrice des graphes connexes s'écrit :

$$Q(z, q) = -q \log \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{x^2}{2} - z \frac{(1-q)^{-1/2}}{q} e^{ix\lambda(q)} \right) dx \right),$$

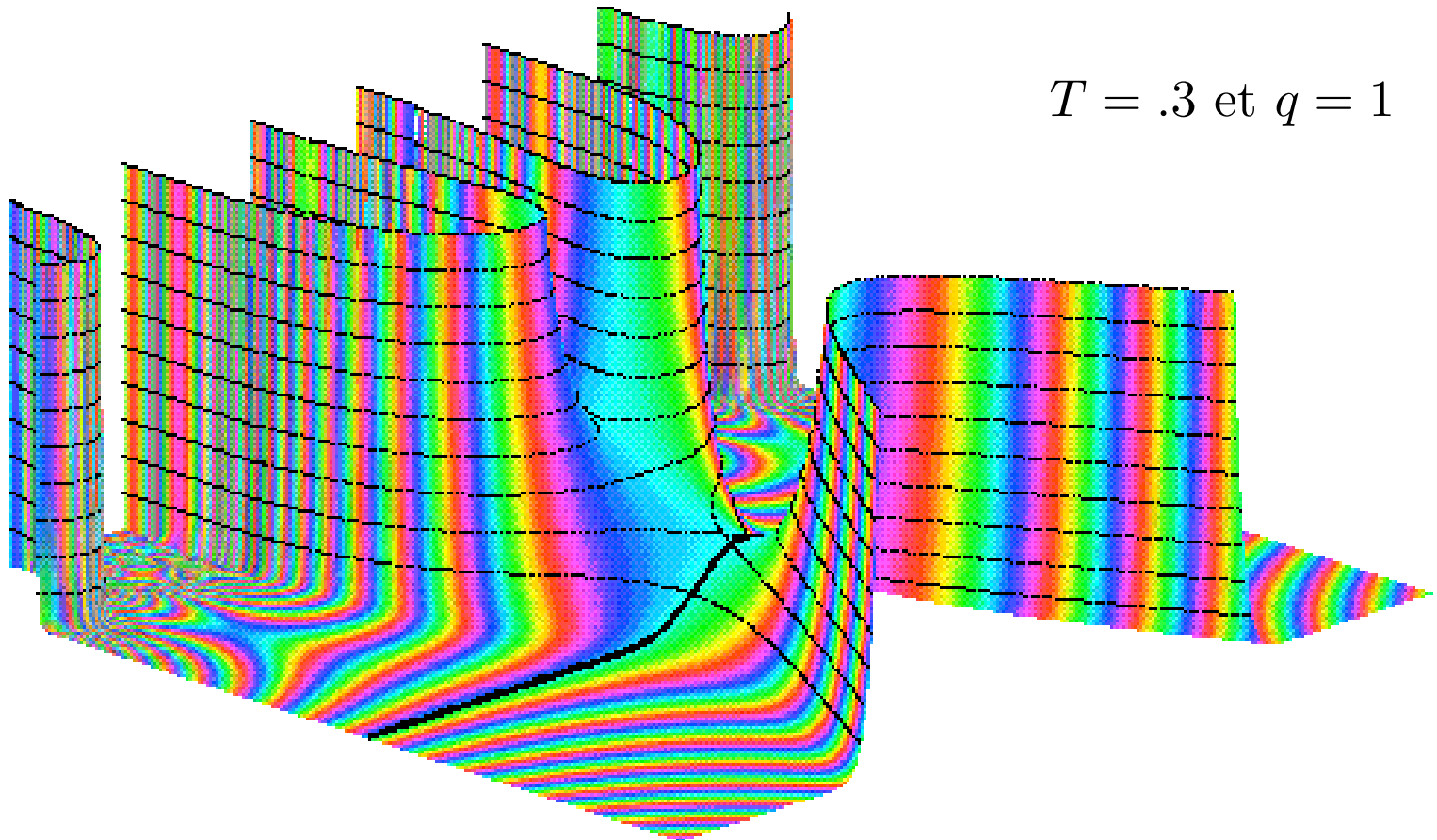
où $\lambda(q) = \sqrt{\log(1-q)^{-1}}$.

Comme $Q(z, q) = \sum_{k \geq 0} W_k(z) q^k$, on cherche à faire un développement pour $q \rightarrow 0+$, avec z comme paramètre.

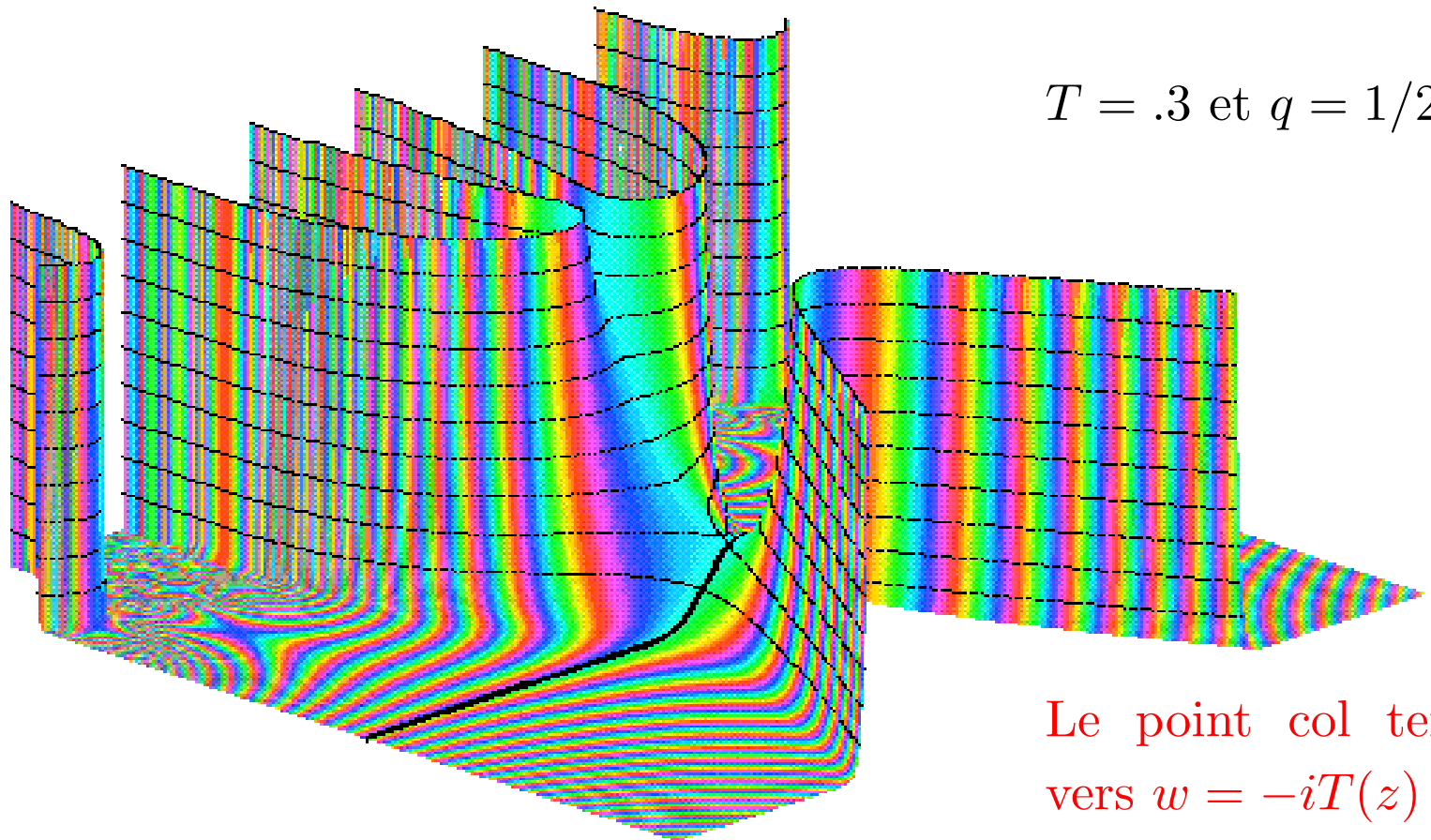
Le changement de variables $w = x\lambda$ simplifie un peu l'intégrale en

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{1}{q} \left(\frac{w^2}{2} + ze^{iw} \right) \right) \underbrace{\exp(\dots)}_{\text{lim finie, } q \rightarrow 0} dw.$$

Le paysage



Le paysage quand $q \rightarrow 0$



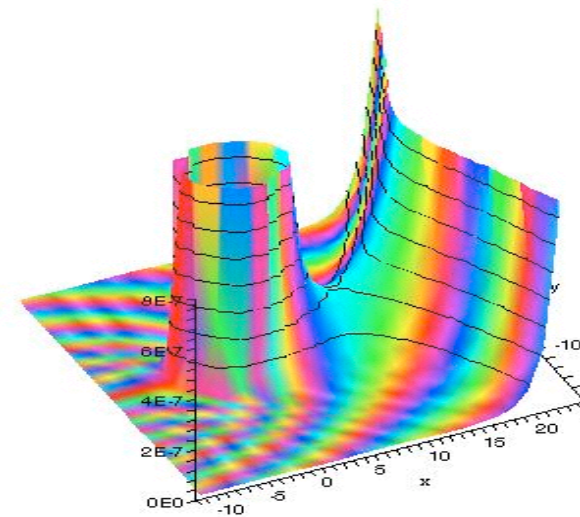
$T = .3$ et $q = 1/2$

Le point col tend
vers $w = -iT(z)$

La valeur au col tend vers $\exp(T - T^2/2)$.

La méthode du col

$$I = \int \exp\left(-\frac{1}{q}f(w)\right) g(w) dw, \quad q \rightarrow 0+.$$



Principe : l'intégrale se concentre aux cols (où $f'(r) = 0$).

1. On y déplace le contour par Cauchy.
2. Changement de variables **quadratique** (de plus grande pente)

$$f(w) = f(r) + y^2.$$

3. Localement, on développe et on intègre terme à terme

$$I = e^{-f(r)/q} \int e^{-y^2/q} g(w(y)) \frac{dw}{dy} dy \approx e^{-f(r)/q} \sqrt{\frac{2\pi q}{f''(r)}} (g(r) + \dots), \quad q \rightarrow 0+.$$

Application aux graphes connexes

$$\begin{aligned} Q(z, q) &= -q \log \left(\frac{1}{\lambda \sqrt{2\pi}} e^{-f(r)/q} \sqrt{\frac{2\pi q}{f''(r)}} g(r) (1 + \dots) \right) \\ &= f(r) - q \log \left(\sqrt{\frac{q}{f''(r)}} \frac{g(r)}{\lambda} \right) - q \log(1 + \dots). \end{aligned}$$

Le point col est en $w = -iT(z)$ (où T est la série des arbres)!

$$f(r) = T - \frac{T^2}{2},$$

on retrouve Cayley,

$$f''(r) = 1 - T,$$

on retrouve

$$g(r) = \exp \left(-\frac{T^2}{4} - \frac{T}{2} \right) (1 + O(q))$$

Rényi

Le dernier log donne les A_k .

Résumé

La méthode du col appliquée à la représentation intégrale

$$Q(z, q) = -q \log \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{1}{q} \left(\frac{w^2}{2} + ze^{iw} \right) \right) \underbrace{\exp(\dots)}_{\text{lim finie, } q \rightarrow 0} dw \right)$$

donne le développement

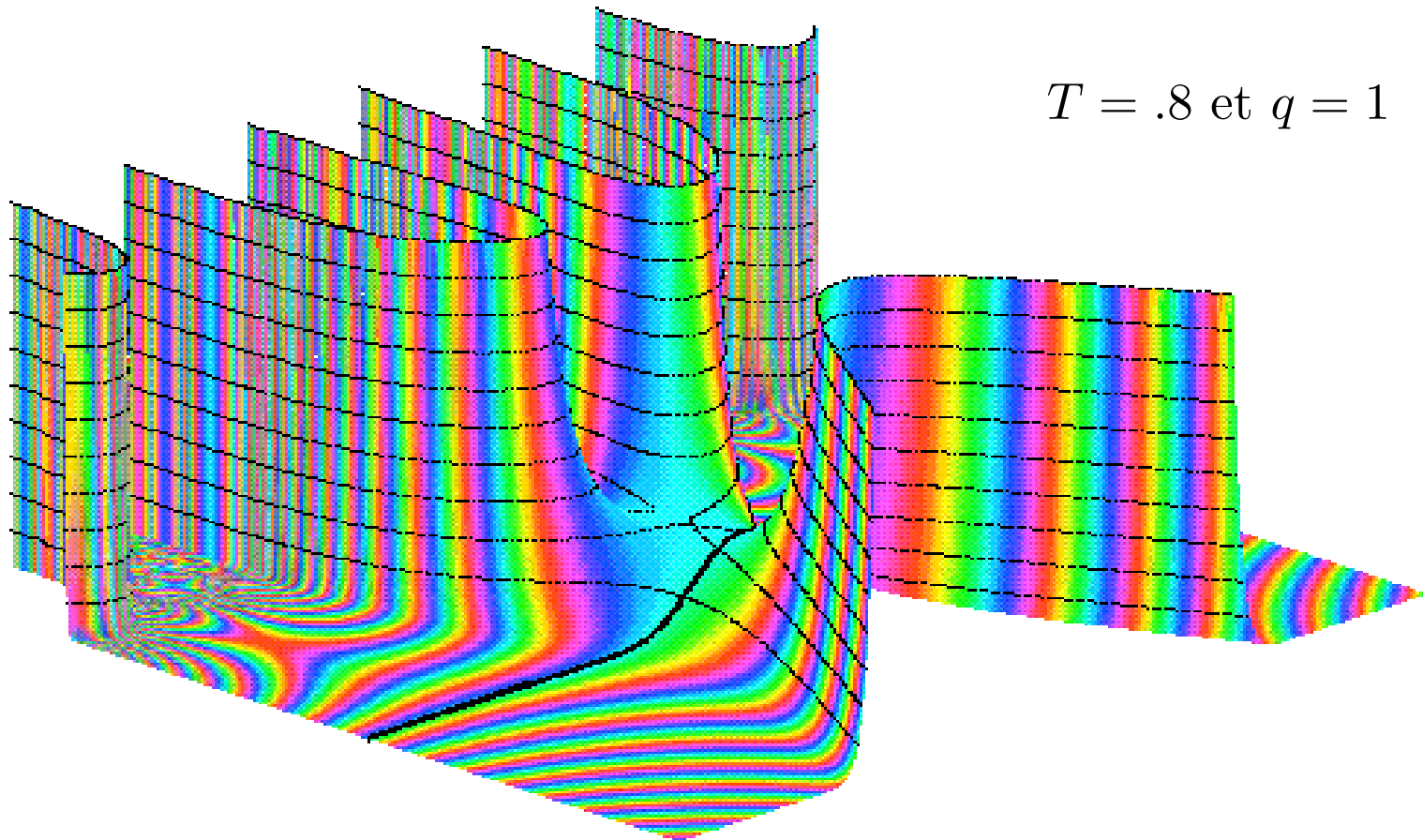
$$Q(z, q) \underset{q \rightarrow 0^+}{\sim} \left(T(z) - \frac{T(z)^2}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} \log \frac{1}{1 - T(z)} - \frac{T(z)}{2} - \frac{T^2(z)}{4} \right) q + \sum_{k \geq 2} \frac{A_{k-1}(T(z))}{(1 - T(z))^{3k-3}} (-q)^k,$$

où les A_k sont des polynômes en $T(z)$.

On retrouve à la fois les résultats de Cayley, Rényi et Wright.

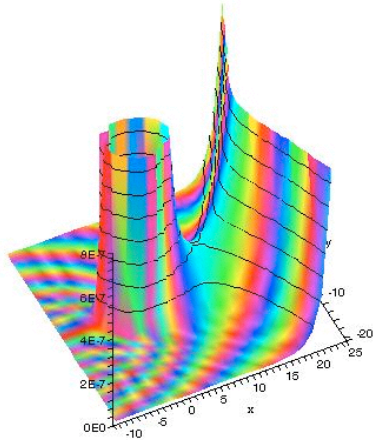
Ça donne les premiers $A_k(x)$ facilement, et donc aussi ces $A_k(1)$,
mais ce développement n'est pas valable lorsque $T(z) \rightarrow 1$.

Le paysage pour T proche de 1

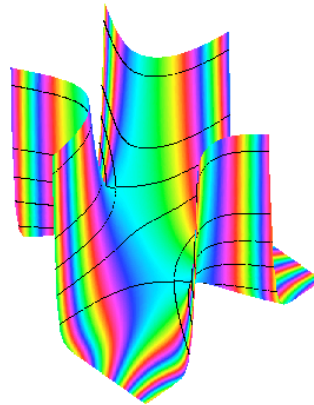


$T = .8$ et $q = 1$

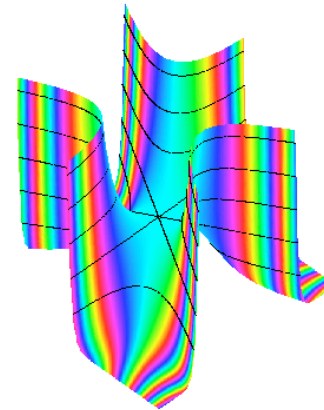
Phénomène d'Airy et méthode de cols



Un col simple.



Airy $z \neq 0$,
deux cols voisins.

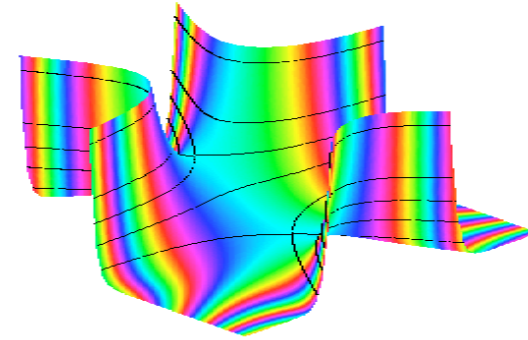


Airy $z = 0$
Un col double.

La fonction d'Airy est une solution de $y'' - zy = 0$,

$$\text{Ai}(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\infty e^{-i\pi/3}}^{\infty e^{i\pi/3}} e^{t^3/3 - zt} dt.$$

Les cols coalescents [ChFrUr57]



$$I = \int \exp\left(-\frac{1}{q}f(w)\right) g(w) dw, \quad q \rightarrow 0+.$$

Principe : attraper les deux cols r et ρ qui coalescent.

1. On y déplace le contour par Cauchy.
2. On effectue le changement de variables **cubique**

$$f(w) = P(v) = f(r) + \frac{f(r) - f(\rho)}{\theta^3} (2v^3 + 3\theta v^2), \quad \theta := 1 - T.$$

$$P(0) = f(r), P(-\theta) = f(\rho), f(\rho) - f(r) \sim -2\theta^3/3, \theta \rightarrow 0.$$

3. Localement, on développe et on intègre terme à terme

$$I = - \int_{e^{-i\pi/3}\infty}^{e^{i\pi/3}\infty} e^{-P(v)/q} \underbrace{g(w(v)) \frac{dw}{dv}}_{\sum_{k \geq 0} g_k(q, \theta) v^k} dv.$$

Airy apparaît dans les calculs

Tout se réduit à une réorganisation de développements asymptotiques après avoir calculé

$$I_k = - \int_{e^{-i\pi/3}\infty}^{e^{i\pi/3}\infty} e^{-P(v)/q} v^k dv.$$



La série génératrice se ramène à Airy

$$\sum_{k \geq 0} I_k \frac{z^k}{k!} = C \exp\left(-\frac{z\theta}{2}\right) \text{Ai}(\mu z + \nu),$$

puis se développe :

$$= C \text{Ai}(\nu) + (C\mu \text{Ai}'(\nu) - \frac{C\theta}{2} \text{Ai}(\nu))z + \dots$$

