Sur la factorisation des polynômes à deux variables

G. Lecerf

LAMA, UMR CNRS 8100

Université de Versailles

travail en commun avec

A. Bostan, (LAMA-STIX)
B. Salvy, (INRIA)
É. Schost, (STIX)
B. Wiebelt (STIX)

Prologue

– Décomposition en composantes irréductibles des solutions de systèmes algébriques (Kronecker).
– Factorisation des polynômes à plusieurs variables.

Factorisation dans $K[x, y]$

Notations : K est un corps (commutatif).

Si $F \in K[x, y]$, on note $F' = \dfrac{\partial F}{\partial y}$.

Entrée : $F \in K[x, y]$.

Sortie : Facteurs irréductibles de F.

Hypothèses : $\begin{cases} (i)\ \deg_y(F) = \deg(F) = d \\ (ii)\ \mathrm{Res}_y(F', F)(0) \neq 0 \end{cases}$

Algorithme : Remontée + Recombinaison

1. Factorisation dans $K[[x]][y]/(x)$;
2. Remontée de la factorisation dans $K[[x]][y]/(x^\sigma)$;
3. Recombinaison des facteurs.

▶ Si $Res_y(F', F) \neq 0$, ces hypothèses peuvent être satisfaites après un changement de variables linéaire générique.

Bibliographie

– **Complexités exponentielles :**

- Kronecker (1882) : substitution $x \leftarrow x,\ y \leftarrow x^{d+1}$.
- Zassenhaus (1969), Musser (1973) : Remontée + Recombinaison.

– **Complexités polynomiales :**

- Chistov & Grigoriev (1982).
- Kaltofen (1982) : approximants algébriques, $\mathcal{O}(d^{12})$.
- Lenstra (1982) : réduction de réseaux (LLL), $\mathcal{O}(d^{8})$.
- Noro & Yokoyama (2002) : bases de Gröbner, $\mathcal{O}(d^{6})$.
- Gao (2002) : recherche de formes différentielles exactes, $\mathcal{O}(d^{5})$.
- Belabas, van Hoeij, Klüners & Steel (2004, en préparation) : cadre plus général ($\mathbb{Z}[x]$, petite caractéristique...).
- BoLeSaScWi (ISSAC 2004) : dérivée logarithmique, $\tilde{\mathcal{O}}(d^{\omega})$, $2 \leq \omega \leq 2,39$.

Améliorations de la méthode Remontée + Recombinaison

- À l'origine, la phase de recombinaison était exponentielle.
- Préférée en pratique aux méthodes polynomiales.

- T. Sasaki *et al.* (1991, 1992, 1993) *heuristiques* : ramènent la recombinaison à de l'algèbre linéaire sur une matrice $\sigma^2 \times \mathcal{O}(d)$. Conjecture : $\sigma = d + 1$ suffit "presque tout le temps".
- Gao & Lauder (2000) : si K est fini, la complexité *moyenne* de la recombinaison est polynomiale en d.
- Belabas, van Hoeij, Klüners & Steel (2004, en préparation) : $\sigma = d(d-1) + 1$ suffit pour faire la recombinaison en temps polynomial.
- BoLeSaScWi (Issac 2004) : $\sigma = 3d - 2$ suffit si la caractéristique de K est nulle ou au moins $d(d-1)+1$.

Plan de l'exposé

$$\underbrace{\mathcal{O}(d^{\mathcal{O}(I)})}_{\text{Recombinaison}} + \underbrace{\mathcal{O}(II)d^2\log(d)^{\mathcal{O}(1)}}_{\text{Remontée}}$$

$\sigma = +\infty$ suffit

Théorème [Sasaki *et al.*, 1992] *Soit $F \in K[x,y]_d$, soit $F = F_1 \cdots F_r$ sa factorisation dans $K[x,y]$ et soit $F = \mathfrak{F}_1 \cdots \mathfrak{F}_s$ sa factorisation dans $K[[x]][y]$. Alors*

$$\mathcal{L} \;=\; \left\{ (\ell_1, \ldots, \ell_s) \in K^s \;\;\middle|\;\; \sum_{i=1}^{s} \ell_i \frac{\mathfrak{F}_i'}{\mathfrak{F}_i} F \;\in\; K[x,y]_{d-1} \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de K^s de dimension r. De plus, si $F_i = \prod_{j=1}^{s} \mathfrak{F}_j^{\mu_{i,j}}$, alors $\{\mu_1, \ldots, \mu_r\}$ est une base de $\mathcal{L}$.

But : Trouver $\sigma < +\infty$ tel que le théorème reste juste en remplaçant $\mathcal{L}$ par

$$\mathcal{L}_\sigma \;=\; \left\{ (\ell_1, \ldots, \ell_s) \in K^s \;\;\middle|\;\; \sum_{i=1}^{s} \ell_i \frac{\mathfrak{F}_i'}{\mathfrak{F}_i} F \;\in\; K[x,y]_{d-1} \;+\; (x^\sigma) K[[x]][y] \right\}$$

Lemme : $\mathcal{L} = \langle \mu_1, \ldots, \mu_r \rangle \subseteq \mathcal{L}_\sigma$.

Exemple

Soit $F = y^3 - y + x^2 \in \mathbb{Q}[x, y]$.

On a $F(0, y) = y(y-1)(y+1)$; remontée en précision $\sigma = d+1 = 4$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}_1 \bmod x^\sigma &= y - 1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^4) \ ; \\
\mathfrak{F}_2 \bmod x^\sigma &= y \quad - \quad x^2 + \mathcal{O}(x^4) \ ; \\
\mathfrak{F}_3 \bmod x^\sigma &= y + 1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^4).
\end{aligned}$$

Donc $\sum_{i=1}^{3} \ell_i \frac{\mathfrak{F}_i'}{\mathfrak{F}_i} F \bmod x^\sigma = \ell_1\mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_3 + \ell_2\mathfrak{F}_3\mathfrak{F}_1 + \ell_3\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2 \bmod x^\sigma =$
$(\ell_1+\ell_2+\ell_3)y^2 + (\ell_1-\ell_3)y + (\ell_3-\ell_1)x^2 - \ell_2 + \left(\ell_2 - \frac{\ell_1}{2} - \frac{\ell_3}{2}\right)x^2 y.$

$$\mathcal{L}_\sigma = \left\{(\ell_1,\ell_2,\ell_3) \in \mathbb{Q}^3 \;\middle|\; \ell_2 - \tfrac{\ell_1}{2} - \tfrac{\ell_3}{2} = 0\right\} = \left\langle (1,0,2), (0,1,-1) \right\rangle.$$

- $\sigma = d+1$ ne suffit pas pour lire la factorisation.
- En précision $d+2 = 5$, $\mathcal{L}_5 = \langle (1,1,1) \rangle$, donc F est irréductible.

$\sigma = d(d-1)+1$ suffit

[Belabas et al., en préparation 2004]

Si $F_1 = \mathfrak{F}_1 \cdots \mathfrak{F}_m$ et $\sum_{i=1}^{s} \ell_i \frac{\mathfrak{F}_i'}{\mathfrak{F}_i} F = Q + \mathcal{O}(x^{d(d-1)+1})$ alors $\ell_1 = \cdots = \ell_m$.

Soit $\varphi_j(x) \in \bar{K}[[x]]$ tel que $\mathfrak{F}_j(x, \varphi_j(x)) = 0$, alors

$$Q(x,\varphi_j) = \ell_j \frac{\mathfrak{F}_j' F}{\mathfrak{F}_j}(x,\varphi_j) + \mathcal{O}(x^\sigma) = \ell_j F'(x,\varphi_j) + \mathcal{O}(x^\sigma).$$

Pour tout $j \in \{1,\ldots,m\}$:

1. $\mathrm{Res}_y(\ell_j F' - Q, \mathfrak{F}_j) \in \mathcal{O}(x^\sigma)$.
2. $\mathrm{Res}_y(\ell_j F' - Q, F_1) = \prod_{i=1}^{m} \mathrm{Res}_y(\ell_j F' - Q, \mathfrak{F}_i) \in \mathcal{O}(x^\sigma)$.
3. $\deg_x(\mathrm{Res}_y(\ell_j F' - Q, F_1)) \leq d(d-1)$.
4. F_1 divise $\ell_j F' - Q$.

$\sigma = 3d - 2$ suffit si $\mathrm{char}(K) = 0$ ou $\mathrm{char}(K) \geq d(d-1)+1$

Soient $\phi_1, \ldots, \phi_d$ les racines de F dans $\bar{K}[[x]][y]$.

Il suffit : $(\ell_j F' - Q)(x, \phi_j) = 0 \mod x^{d(d-1)+1}$.

Hypothèse : $(\ell_j F' - Q)(x, \phi_j) = 0 \mod x^{\sigma}$.

- Il existe $A \in K[x,y]_{3d-4}$ tel que $(Q/F'(x,\phi_j))' = A/F'^3(x,\phi_j)$.
- $A(x, \phi_i) = 0 \mod x^{\sigma-1}$.
- F divise A, en particulier $(Q/F')(x,\phi_j)$ est de dérivée nulle dans $\bar{K}[[x]]$, donc $= \ell_j$ modulo $x^{\mathrm{char}(K)}$ et aussi modulo x^{σ}.

Exemple dû à van Hoeij

Soit p un nombre premier, $F = y^{p+1} + x^{p+1} - 1 \in \mathbb{F}_{p^2}[x, y]$.

– F est irréductible dans $\mathbb{F}_{p^2}[x, y]$.
– $\mathcal{L}_{p(p+1)} \neq \mathcal{L}_{p(p+1)+1} = \langle (1, 1, \ldots, 1) \rangle$.

▶ Il est donc nécessaire de remonter en précision $d(d-1)+1$ dans cet exemple.

Algorithme

1. Factoriser $F(0, y)$. On obtient $\mathfrak{F}_1 \bmod x, \ldots, \mathfrak{F}_s \bmod x$;
2. (Remontée) Calculer $\mathfrak{F}_1 \bmod x^\sigma, \ldots, \mathfrak{F}_s \bmod x^\sigma$;
3. (Recombinaison) Calculer une base échelonnée réduite $\{\mu_1, \ldots, \mu_r\}$ de $\mathcal{L}_\sigma$:
   - Construction du système linéaire,
   - Calcul de la forme échelon réduite.

Sortie : Retourner $F_i = \prod_{j=1}^{s} \mathfrak{F}_j^{\mu_{i,j}} \bmod x^{d+1}$, pour i de 1 à r.

Analyses de complexités

$$\mathcal{L}_\sigma = \left\{ (\ell_1, \ldots, \ell_s) \in K^s \;\middle|\; \sum_{i=1}^{s} \ell_i \frac{\mathfrak{F}_i'}{\mathfrak{F}_i} F \in K[x,y]_{d-1} + (x^\sigma) K[[x]][y] \right\}$$

Théorème [BoLeSaScWi04] *Soit K un corps de caractéristique zéro ou supérieure à $d(d-1)$. Soit $F \in K[x,y]_d$ et soit $\sigma = 3d-2$. Alors*

$$\mathcal{L}_\sigma = \mathcal{L}.$$

Corollaire [BoLeSaScWi04] *Sous les hypothèses précédentes, l'étape de recombinaison est dominée par le calcul d'une forme échelon réduite d'une matrice de taille*

- $3d^2 \times s$, par un algorithme déterministe,
- $6d \times s$, par un algorithme probabiliste.

Algorithme probabiliste

$$\boldsymbol{\Lambda_\tau} = \left\{ \boldsymbol{\ell_{1:s} \in K^s} \mid \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{s}} \boldsymbol{\ell_i}\, \mathbf{coeff}\left(\frac{\boldsymbol{\mathfrak{F}_i'}}{\boldsymbol{\mathfrak{F}_i}} \boldsymbol{F}, \boldsymbol{x^j y^k} \right) = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{k \leq d-1}, \boldsymbol{d \leq j+k \leq \tau - 1} \right\}.$$

Lemme $\boldsymbol{\pi(L_\tau) \subseteq \Lambda_\tau \subseteq \pi(L_{\tau-d+1})}$.

$$\boldsymbol{\Lambda_\tau^a} = \left\{ \boldsymbol{\ell_{1:s} \in K^s} \mid \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{s}} \boldsymbol{\ell_i}\, \mathbf{coeff}\left(\frac{\boldsymbol{\mathfrak{F}_i' F}}{\boldsymbol{\mathfrak{F}_i}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{ax}), \boldsymbol{x^j} \right) = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{d \leq j \leq \tau - 1} \right\}.$$

Lemme Pour tout $\boldsymbol{b \in K}$, il existe un polynôme non nul $\boldsymbol{P_b \in K[z]}$ de degré au plus $\boldsymbol{(s-r)(d-1)}$ tel que si $\boldsymbol{P_b(a) \neq 0}$ alors $\boldsymbol{\Lambda_\tau = \Lambda_\tau^a \cap \Lambda_\tau^b}$.

Détail des complexités de la recombinaison

Entrée : $\mathfrak{F}_{1:s}$ à précision $\mathcal{O}(x^\tau)$.

On prend $\tau = 4d - 3$.

Substitution $y \mapsto ax$: $\mathcal{O}(d^2)$.

Construction du système : $\mathcal{O}(d\mathsf{M}(d))$.

Forme échelon réduite : $\mathcal{O}(d^\omega \log(d))$ [Storjohann, 2000].

Calcul des F_i : $\mathcal{O}(d\mathsf{M}(d))$.

Sortie : $F_1, \ldots, F_r$.

En pratique...

Soit K un corps de caractéristique zéro ou supérieure à d.
Soit $F \in K[x, y]_d$ et soit $\sigma = d + 1$ ($\tau = 2d$).

Théorème [Sasaki *et al.* 1992, BoLeSaScWi04] *Si la forme échelon réduite de $\mathcal{L}_\sigma$ ne contient que des 0 et des 1, alors*

$$\mathcal{L}_\sigma = \mathcal{L}.$$

Corollaire [BoLeSaScWi04] La recombinaison est dominée par le calcul d'une forme échelon réduite d'une matrice de taille

- $1/2d^2 \times s$, par un algorithme déterministe,
- $2d \times s$, par un algorithme probabiliste.

$\boldsymbol{F = S_n = \prod (y \pm \sqrt{x+1} \pm \cdots \pm \sqrt{x+n})}$, $\boldsymbol{K = \mathbb{Z}/754974721\mathbb{Z}}$.

Déterministe

n	degré total	nouveau Hensel	ancien Hensel	construction système	forme échelon	taille matrice
7	128	1.72 s	4.48 s	3.19 s	0.86 s	$\mathbf{64 \times 8256}$
8	256	8.19 s	35.1 s	27.3 s	13.0 s	$\mathbf{128 \times 32896}$
9	512	38.2 s	168 s	234 s	198 s	$\mathbf{256 \times 131328}$
10	1024	177 s	786 s	2007 s	3108 s	$\mathbf{512 \times 524800}$

Probabiliste

n	degré total	factorisation fi bre	nouveau Hensel	construction système	forme échelon	taille matrice
7	128	0.13 s	3.04 s	0.13 s	0.02 s	$\mathbf{64 \times 256}$
8	256	0.37 s	15.4 s	0.57 s	0.18 s	$\mathbf{128 \times 512}$
9	512	1.11 s	73.2 s	2.56 s	1.55 s	$\mathbf{256 \times 1024}$
10	1024	3.68 s	348 s	11.4 s	12.1 s	$\mathbf{512 \times 2048}$
11	2048	13.4 s	1700 s	52.2 s	95.2 s	$\mathbf{1024 \times 4096}$

$$F(x,y) = S_n(x^2,y)S_n(y^2,x)$$

n	degré total	Maple 9	Magma 2.9-15	Asir	notre code
3	8	0.589 s	0.04 s	0.01 s	0.02 s
5	32	50 min	4.36 s	2.36 s	0.75 s
7	128	> 41 h	> 1 jour	> 41 h	17.7 s
9	512	erreur	> 4 jours	erreur	394 s

Complexité de la remontée

Théorème. [BoLeSaScWi, ISSAC 2004]

À partir de $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_s \bmod x$, *on peut calculer* $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_s \bmod x^\sigma$ *en*

$$4\,\mathsf{M}(\sigma)\mathsf{M}(d)\log s + \mathcal{O}(\mathsf{M}(d)(\mathsf{M}(\sigma) + \log d))$$

opérations dans K.

Meilleur algorithme connu avant [Shoup, Lemme de Hensel + « diviser pour régner »] :

$$\frac{27}{2}\,\mathsf{M}(\sigma)\mathsf{M}(d)\log s + \mathcal{O}(\mathsf{M}(d)(\mathsf{M}(\sigma) + \log d))$$

opérations dans K.

Remontée par Newton

Problème : Connaissant $\mathfrak{F}_i$ mod x, déterminer $\mathfrak{F}_i$ mod x^σ.

Algorithme à convergence quadratique : Soit $\mathfrak{F}_i^{(\kappa)} = \mathfrak{F}_i \mod x^\kappa$, pour $i = 1, \ldots, s$. Pour $\kappa = 1, 2, 4, \ldots$ et chaque i, calculer dans :

$$A_{i,\kappa}[Y] = K[[x]][y]/(\mathfrak{F}_i^{(\kappa)})$$

1. $\Delta := F'^{(-1)}F(Y) \in (x^\kappa)$;
2. $Y' := Y - \Delta(Y), F(Y') = 0 \mod \mathcal{O}(x^{2\kappa})$;
3. $\mathfrak{F}_i^{(\kappa)}(Y) = 0 = \mathfrak{F}_i^{(\kappa)}(Y' + \Delta(Y)) = \mathfrak{F}_i^{(\kappa)}(Y') + (\mathfrak{F}_i^{(\kappa)})'(Y')\Delta(Y')$ $\mod x^{2\kappa}$;
4. $\delta(Y') = (\mathfrak{F}_i^{(\kappa)})'(Y')\Delta(Y') \in \mathcal{O}(x^\kappa), \delta(Y) - \delta(Y') \in (x^\kappa)$;
5. $\mathfrak{F}_i^{(2\kappa)} = \mathfrak{F}_i^{(\kappa)} + \delta$.

Réduction modulaire simultanée

Problème : Soit $R = K[[x]]/(x^\kappa)$, $r \in R[y]_{d-1}$ et $\mathfrak{F}_i \in R[y]_{d_i-1}$.
Calculer r mod $\mathfrak{F}_i$.

Algorithme rapide classique : de type diviser-pour-régner, par divisions répétées par les noeuds de l'arbre des sous-produits.

Complexité : $10\,\mathsf{M}(d)\log s + \mathcal{O}(\mathsf{M}(d))$ opérations dans R.

Nouvel algorithme : $2\,\mathsf{M}(d)\log s + \mathcal{O}(\mathsf{M}(d))$ opérations dans R.

Idée : donner un algorithme pour le *problème transposé* et en déduire un de même complexité par *transposition de programme*.

Raison pour l'accélération : Division des polynômes remplaçée par multiplication transposée (moins chère) !

Réduction simultanée transposée

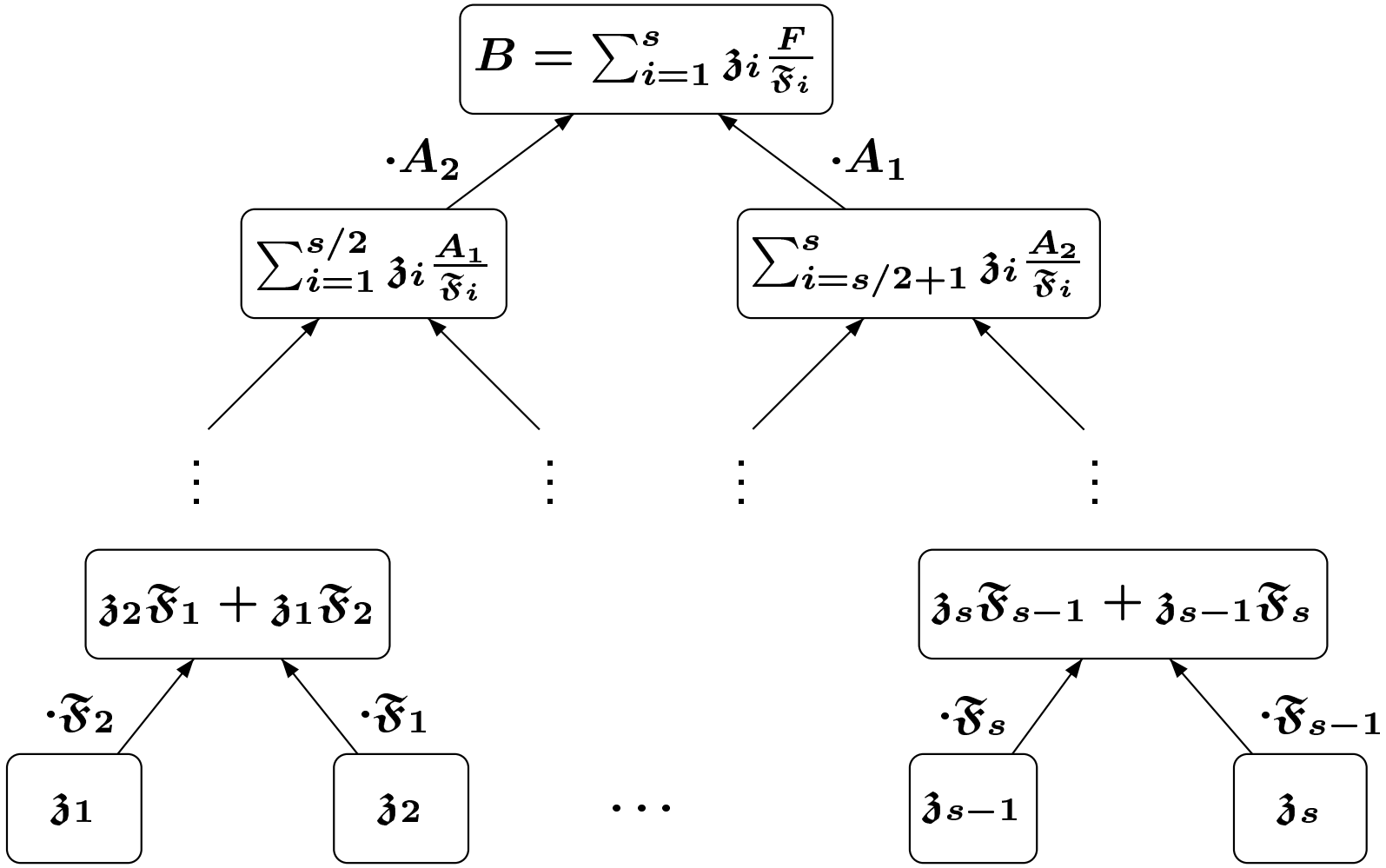
Lemme *Le problème transposé de la* réduction simultanée *est* :

Étant donné s polynômes $\mathfrak{c}_j$ dans $R[y]_{d_j-1}$, calculer les d premiers coefficients du développement en série de Taylor dans $R[[y]]$ de

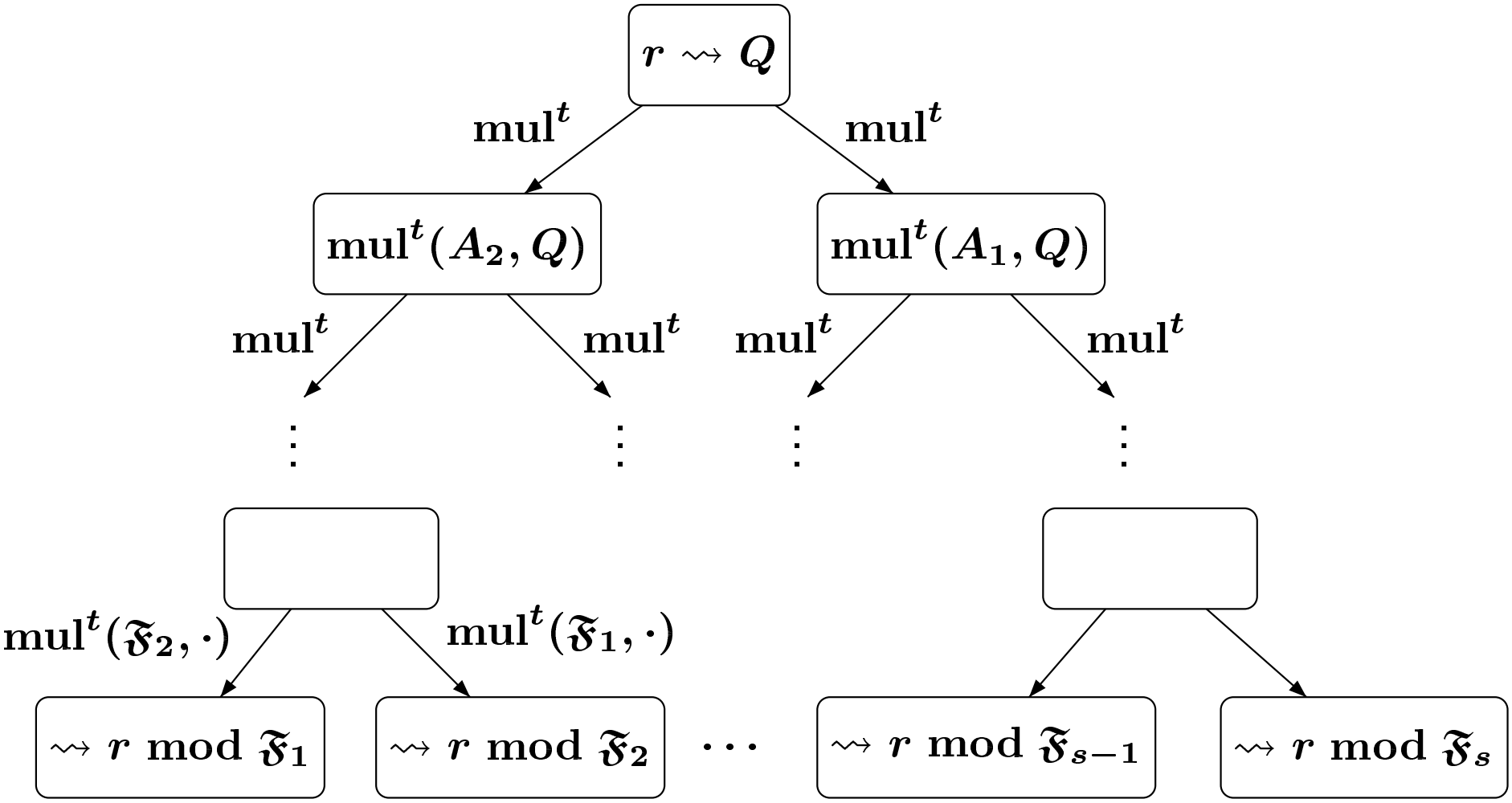
$$\sum_{j=1}^{s} \frac{\mathfrak{u}_j}{\mathbf{rec}(d_j, \mathfrak{F}_j)} = \frac{1}{\mathbf{rec}(d, F)} \mathbf{rec}\left(d-1, \sum_{j=1}^{s} \mathfrak{z}_j \frac{F}{\mathfrak{F}_j}\right),$$

où

$$\mathfrak{u}_j = \mathfrak{c}_j \mathbf{rec}(d_j, \mathfrak{F}_j) \bmod y^{d_j} \quad \text{et} \quad \mathfrak{z}_j = \mathbf{rec}(d_j - 1, \mathfrak{u}_j).$$



Calcul de $B = \sum_{i=1}^{s} \mathfrak{z}_j \frac{F}{\mathfrak{F}_j}$ par **UpTree**.



Réduction modulaire simultanée par $\mathbf{TUpTree}$.

Perspectives

- Quelle est la meilleure borne pour la précision de la remontée σ ?
- $\sigma \geq 2d - 1$ est nécessaire.
- Conjecture : $\sigma = 2d + 1$ suffit.
- Améliorer les résultats pour les « petites » caractéristiques.