

Arbres suffixes et sources simples

Julien Fayolle

November 17, 2003
julien.fayolle@inria.fr

<http://algo.inria.fr/fayolle/index.html>



Compression de données sans perte

Principaux logiciels

- gzip, zip, PKZIP, WinZip
- compress, uncompress, zcat, gzcat
- pack, compact

Principaux algorithmes

- **LZ'77** amélioré par **LZSS** (Lempel-Ziv-Storer-Szymanski).
- **LZ'78** amélioré par **LZW** (Lempel-Ziv-Welch).
- de type **Huffman**

Pourquoi étudier LZ'77 ?

LZSS generally obtains the best rate among lossless compression algorithms: typically, text such as source code or English is reduced by **60-70%**. The amount of compression obtained depends on the size of the input and the distribution of common substrings.

tiré du manuel de zip.

Trie et arbre des suffixes

Soit X un ensemble fini de mots infinis sur un alphabet binaire \mathcal{M} .

$$\text{trie}(X) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } |X| = 0, \\ \bullet & \text{si } |X| = 1, \\ \langle \bullet, \text{trie}(X \setminus 0), \text{trie}(X \setminus 1) \rangle & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'**arbre des suffixes** ou **suffix tree** est simplement un trie construit sur l'ensemble des premiers suffixes d'un texte infini.

Si l'ensemble X a taille n , alors on regarde les n premiers suffixes.

L'idée [Jacquet et Szpankowski]

Asymptotiquement, les moyennes certains paramètres des **tries** et des **arbres suffixes** sont très

semblables.

Quels paramètres ? (trie)

La **taille** T donne la place prise en mémoire par l'arbre.

Quels paramètres ? (trie)

La **taille** T donne la place prise en mémoire par l'arbre.

Pour trouver une expression manipulable, on définit un autre paramètre, N_w , comme le nombre de mots de X commençant par le motif w .

Quels paramètres ? (trie)

La **taille** T donne la place prise en mémoire par l'arbre.

Pour trouver une expression manipulable, on définit un autre paramètre, N_w , comme le nombre de mots de X commençant par le motif w .

$$T = \sum_{w \in \mathcal{M}^*} \llbracket N_w \geq 2 \rrbracket.$$

Quels paramètres ? (trie)

La **taille** T donne la place prise en mémoire par l'arbre.

Pour trouver une expression manipulable, on définit un autre paramètre, N_w , comme le nombre de mots de X commençant par le motif w .

$$T = \sum_{w \in \mathcal{M}^*} \llbracket N_w \geq 2 \rrbracket.$$

La **longueur de cheminement** LC exprime la somme des profondeurs des nœuds externes.

Quels paramètres ? (trie)

La **taille** T donne la place prise en mémoire par l'arbre.

Pour trouver une expression manipulable, on définit un autre paramètre, N_w , comme le nombre de mots de X commençant par le motif w .

$$T = \sum_{w \in \mathcal{M}^*} \llbracket N_w \geq 2 \rrbracket.$$

La **longueur de cheminement** LC exprime la somme des profondeurs des nœuds externes.

$$LC = \sum_{w \in \mathcal{M}^*} N_w \llbracket N_w \geq 2 \rrbracket.$$

Et pour l'arbre suffixe

La **taille** T donne la place prise en mémoire par l'arbre.

Pour trouver une expression manipulable, on définit un autre paramètre \hat{N}_w comme le **nombre d'occurrences de w** dans les premières lettres du texte.

$$T = \sum_{w \in \mathcal{M}^*} [\hat{N}_w \geq 2].$$

La **longueur de cheminement** LC exprime la somme des profondeurs des nœuds externes.

$$LC = \sum_{w \in \mathcal{M}^*} \hat{N}_w [\hat{N}_w \geq 2].$$

Le modèle de source

- Une **source** est un mécanisme qui va produire des symboles de l'alphabet binaire $\{0, 1\}$ que l'on s'est choisi.

Le modèle de source

- Une **source** est un mécanisme qui va produire des symboles de l'alphabet binaire $\{0, 1\}$ que l'on s'est choisi.
- L'émission d'un symbole est muni d'une **probabilité**.
 - Pour une source **symétrique**, chaque lettre est affectée de la même probabilité ;
 - pour une source **biaisée**, la lettre 0 est tirée avec la probabilité p , et la lettre 1 avec la probabilité q . On parlera alors de **source** (p, q) . En plus $p > q$.

Le modèle de source

- Une **source** est un mécanisme qui va produire des symboles de l'alphabet binaire $\{0, 1\}$ que l'on s'est choisi.
- L'émission d'un symbole est muni d'une **probabilité**.
- La source est **sans mémoire** (ou Bernoulli) : le choix du symbole émis est indépendant des symboles précédents.

Le modèle de source

- Une **source** est un mécanisme qui va produire des symboles de l'alphabet binaire $\{0, 1\}$ que l'on s'est choisi.
- L'émission d'un symbole est muni d'une **probabilité**.
- La source est **sans mémoire** (ou Bernoulli) : le choix du symbole émis est indépendant des symboles précédents.
- La **probabilité fondamentale** p_w d'un motif w est la probabilité d'occurrence de w dans un texte à une position donnée, ici, la probabilité fondamentale est **indépendante** de la position de l'occurrence et s'écrit comme le produit des probabilités des lettres de w .

Déjà connu : les tries

Pour un trie construit sur un ensemble de taille n sous modèle de source, on connaît [Knuth] des résultats sur le comportement asymptotique de la moyenne des paramètres suivants :

- Taille : $\frac{n}{h}(1 + \epsilon'(n)) + o(n)$;
- Longueur de cheminement :
 $\frac{n \log n}{h} + \left(\frac{\gamma}{h} + K + \epsilon(n)\right) n + o(n)$;
- Hauteur : $\frac{2}{|\log c|} \log n + O(1)$.

où $h = -p \log p - q \log q$ est l'entropie de la source et c la probabilité de coïncidence.

[Vallée ; Clément, Flajolet et Vallée]

Tries et modèle de Poisson $\mathcal{P}(z)$

L'espérance de la **taille** d'un trie s'exprime

$$G(z) := \mathbb{E}_z(T) = \sum_{w \in \mathcal{M}^*} \mathbb{P}_z(N_w \geq 2)$$

sous le modèle de **Poisson** de paramètre z .

Tries et modèle de Poisson $\mathcal{P}(z)$

L'espérance de la **taille** d'un trie s'exprime

$$G(z) = \sum_{w \in \mathcal{M}^*} 1 - \mathbb{P}_z(N_w = 0) - \mathbb{P}_z(N_w = 1)$$

sous le modèle de **Poisson** de paramètre z .

Tries et modèle de Poisson $\mathcal{P}(z)$

L'espérance de la **taille** d'un trie s'exprime

$$G(z) = \sum_{w \in \mathcal{M}^*} (1 - (1 + p_w z) \exp(-p_w z))$$

sous le modèle de **Poisson** de paramètre z .

Tries et modèle de Poisson $\mathcal{P}(z)$

L'espérance de la **taille** d'un trie s'exprime

$$G(z) = \sum_{w \in \mathcal{M}^*} (1 - (1 + p_w z) \exp(-p_w z))$$

sous le modèle de **Poisson** de paramètre z .

Pour l'espérance de la taille sous modèle **symétrique**

$$\sum_{k \geq 0} 2^k (1 - (1 + 2^{-k} z) \exp(-2^{-k} z))$$

et sous modèle **biaisé** :

$$\sum_{k \geq 0} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (1 - (1 + p^i q^{k-i} z) \exp(-p^i q^{k-i} z))$$

Transformée de Mellin

- Ces trois résultats font intervenir la même fonction : $F(z) = 1 - (1 + z) \exp(-z)$, sur laquelle on va appliquer la transformée de **Mellin**.

Transformée de Mellin

- Ces trois résultats font intervenir la même fonction : $F(z) = 1 - (1 + z) \exp(-z)$, sur laquelle on va appliquer la transformée de **Mellin**.

- $F^*(s) = -(s + 1)\Gamma(s)$ et dans le cas symétrique,

$$G^*(s) = -\frac{(s + 1)\Gamma(s)}{1 - 2^{s+1}}.$$

Transformée de Mellin

- Ces trois résultats font intervenir la même fonction : $F(z) = 1 - (1 + z) \exp(-z)$, sur laquelle on va appliquer la transformée de **Mellin**.

- $F^*(s) = -(s + 1)\Gamma(s)$ et dans le cas symétrique,

$$G^*(s) = -\frac{(s + 1)\Gamma(s)}{1 - 2^{s+1}}.$$

- On cherche les **pôles** de G^* à droite de -1 : -1 , $-1 + 2ik\pi / \ln 2$ pour $k \in \mathbb{Z}^*$ et 0.

Transformée de Mellin

- Ces trois résultats font intervenir la même fonction : $F(z) = 1 - (1+z)\exp(-z)$, sur laquelle on va appliquer la transformée de **Mellin**.

- $F^*(s) = -(s+1)\Gamma(s)$ et dans le cas symétrique,

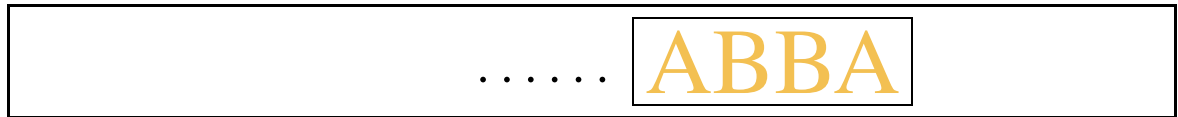
$$G^*(s) = -\frac{(s+1)\Gamma(s)}{1-2^{s+1}}.$$

- On cherche les **pôles** de G^* à droite de $-1 : -1, -1 + 2ik\pi / \ln 2$ pour $k \in \mathbb{Z}^*$ et 0.
- Les **parties singulières** de $G^*(s)$ en ces pôles déterminent le développement asymptotique de G à l'infini :

$$G(z) \simeq \frac{z}{\ln 2} - \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \frac{\Gamma\left(\frac{2ik\pi}{\ln 2}\right)}{\ln 2} z^{1-\frac{2ik\pi}{\ln 2}} - 1.$$

Auto-corrélation

On cherche le nombre d'apparitions du motif **ABBA** dans un texte T .



Auto-corrélation

On cherche le nombre d'apparitions du motif **ABBA** dans un texte T .

..... **ABB** **ABBA**

Auto-corrélation

On cherche le nombre d'apparitions du motif **ABBA** dans un texte T .



Auto-corrélation

On cherche le nombre d'apparitions du motif **ABBA** dans un texte T .



$$\mathcal{C} = \{u \mid w = vu \text{ et } v \text{ préfixe et suffixe de } w\}.$$

Auto-corrélation

On cherche le nombre d'apparitions du motif **ABBA** dans un texte T .



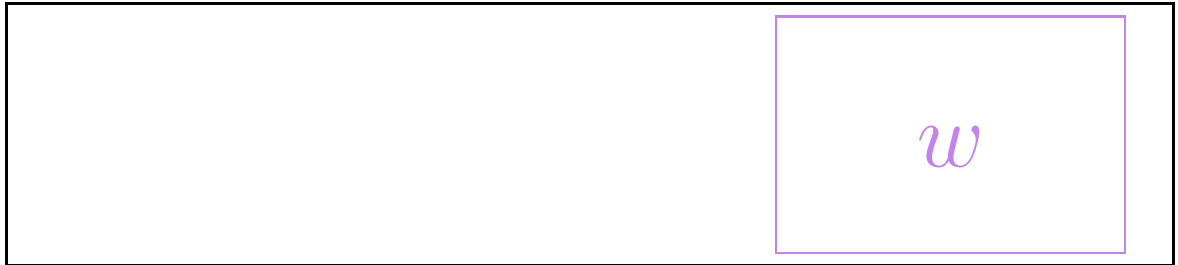
$\mathcal{C} = \{u | w = vu \text{ et } v \text{ préfixe et suffixe de } w\}$.

$$c(z) = \sum_{j=1}^k \llbracket S_j = P_j \rrbracket z^{k-j} = \sum_{j=0}^{k-1} c_j z^j.$$

où $c_j = \llbracket S_{k-j} = P_{k-j} \rrbracket$.

Systeme [Guibas et Odlyzko]

\mathcal{N} l'ensemble des textes ne contenant pas le motif w et \mathcal{F} , les textes dont l'unique occurrence de w est finale.



Soit le système :

$$\begin{cases} \mathcal{N}.\mathcal{M} + \epsilon = \mathcal{N} + \mathcal{F} & , \\ \mathcal{N}.w = \mathcal{F}.\mathcal{C} & . \end{cases}$$

Les SGs utilisées

La SG comptant le nombre de textes ne contenant aucune occurrence du motif w est donnée par

$$N(z) = \frac{c(z)}{c(z)(1 - 2z) + z^k},$$

Les SGs utilisées

La SG comptant le nombre de textes ne contenant **aucune** occurrence du motif w est donnée par

$$N(z) = \frac{c(z)}{c(z)(1 - 2z) + z^k},$$

et pour **une seule** occurrence de w par

$$O(z) = \frac{z^k}{(c(z)(1 - 2z) + z^k)^2}.$$

Les SGP_s utilisées

La SG de probabilités comptant le nombre de textes ne contenant **aucune** occurrence du motif w est donnée par

$$\mathcal{N}(z) = \frac{\widehat{c}(z)}{\widehat{c}(z)(1-z) + p_w z^k},$$

et pour **une seule** occurrence de w par

$$\mathcal{O}(z) = \frac{p_w z^k}{(\widehat{c}(z)(1-z) + p_w z^k)^2}.$$

Rouché et Cauchy

Cherchons le coefficient d'ordre n , o_n de $\mathcal{O}(z)$.

Il y a un seul pôle ρ dans le disque centré en 0 et de rayon

$$R = 0.5 \left(1 + \frac{1}{p} \right)$$

Rouché et Cauchy

Cherchons le coefficient d'ordre n , o_n de $\mathcal{O}(z)$.

Il y a un seul pôle ρ dans le disque centré en 0 et de rayon

$$R = 0.5 \left(1 + \frac{1}{p} \right)$$

$$o_n = \mathbb{P}_n(\widehat{N}_w = 1) = \frac{p_w}{\widehat{c}^2(\rho)} \rho^{-n} (n + 1 - k) \rho^{k-2} \\ + O(knp_w^2) + C \left(\frac{1}{R} \right)^n .$$

Approximation de ρ

$$\rho \text{ vérifie } \widehat{c}(z)(1 - z) + p_w z^k = 0.$$

Donc le pôle est proche de 1 et à l'aide du **TAF** :

$$\rho \simeq 1 + \frac{p_w}{\widehat{c}(1)}.$$

$$\text{Soit } o_n = \mathbb{P}_n(\widehat{N}_w = 1) \simeq np_w \exp\left(-\frac{np_w}{\widehat{c}(1)}\right).$$

La différence–LC

On regarde la différence entre la moyenne de la LCE dans un trie et celle dans un arbre suffixe. L'espérance du trie s'exprime facilement sous le modèle de Poisson, alors que pour le trie suffixe, on a eu recours à de l'analyse complexe. Dans la suite on va évaluer la quantité

$$\Delta := \sum_{w \in \mathcal{M}^*} \mathbb{P}_n(\hat{N}_w = 1) - \mathbb{P}_z(N_w = 1)$$

La différence-LC

On regarde la différence entre la moyenne de la LCE dans un trie et celle dans un arbre suffixe. L'espérance du trie s'exprime facilement sous le modèle de Poisson, alors que pour le trie suffixe, on a eu recours à de l'analyse complexe. Dans la suite on va évaluer la quantité

$$\Delta := \sum_{w \in \mathcal{M}^*} \mathbb{P}_n(\hat{N}_w = 1) - np_w e^{-np_w}$$

La différence-LC

On regarde la différence entre la moyenne de la LCE dans un trie et celle dans un arbre suffixe. L'espérance du trie s'exprime facilement sous le modèle de Poisson, alors que pour le trie suffixe, on a eu recours à de l'analyse complexe. Dans la suite on va évaluer la quantité

$$\Delta \simeq \sum_{w \in \mathcal{M}^*} np_w (e^{-np_w / \hat{c}_w(1)} - e^{-np_w})$$

Trichotomie–LC

La somme Δ est découpée selon le comportement de np_w :

- $np_w \rightarrow \infty$: peu de motifs vérifient cette condition et la fonction $x \rightarrow xe^{-x}$ va apporter une décroissance suffisante.

Trichotomie–LC

La somme Δ est découpée selon le comportement de np_w :

- $np_w \rightarrow \infty$
- $np_w \rightarrow 0$: le nombre de motifs vérifiant cette condition est infini, mais leurs contributions individuelles vont être très faibles.

Trichotomie–LC

La somme Δ est découpée selon le comportement de np_w :

- $np_w \rightarrow \infty$
- $np_w \rightarrow 0$
- $np_w = O(1)$: on scinde cet ensemble en deux selon la valeur de $\widehat{c}(1)$

Trichotomie–LC

La somme Δ est découpée selon le comportement de np_w :

- $np_w \rightarrow \infty$

- $np_w \rightarrow 0$

- $np_w = O(1)$

★ $\hat{c}(1) \geq 1 + 2^{-k/2}$: ces motifs sont en très faible quantité

Trichotomie–LC

La somme Δ est découpée selon le comportement de np_w :

- $np_w \rightarrow \infty$
- $np_w \rightarrow 0$
- $np_w = O(1)$
 - ★ $\hat{c}(1) \geq 1 + 2^{-k/2}$
 - ★ $\hat{c}(1) \leq 1 + 2^{-k/2}$: nombreux motifs mais de contribution faible dans Δ

Motifs courts

L'ensemble de motifs se restreint d'abord à $np_w \geq n^{1/6}$.

$$p_w = p^i q^{k-i} \geq q^k \geq n^{-5/6}.$$

Motifs courts

L'ensemble de motifs se restreint d'abord à $np_w \geq n^{1/6}$.

$$p_w = p^i q^{k-i} \geq q^k \geq n^{-5/6}.$$

$$k \leq \frac{5}{6} C_q \log n =: k_c(n)$$

$$\Delta_c \leq \left(n^{\frac{5}{6} C_q} \right) \cdot \left(n^{\frac{1}{6}} e^{-n^{1/6}/\widehat{c}(1)} \right),$$

et finalement

$$\Delta_c = o(1).$$

Motifs longs

La condition s'écrit d'abord $np_w \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$.

$$p_w = p^i q^{k-i} \leq p^k \leq n^{-1.5}.$$

Motifs longs

La condition s'écrit d'abord $np_w \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$.

$$p_w = p^i q^{k-i} \leq p^k \leq n^{-1.5}.$$

$$k \geq 1.5C_p \log n =: k_l(n)$$

Motifs longs

La condition s'écrit d'abord $np_w \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$.

$$p_w = p^i q^{k-i} \leq p^k \leq n^{-1.5}.$$

$$k \geq 1.5C_p \log n =: k_l(n)$$

$$\text{DL} : \sum_{k \geq k_l(n)} \sum_{w \in \mathcal{M}^k} (np_w)^2 \left(1 - \frac{1}{\widehat{c}(1)}\right)$$

$$\sum_{w \in \mathcal{M}^k} p_w^2 = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (p^i q^{k-i})^2 = (p^2 + q^2)^k$$

$$\Delta_l = O(\sqrt{n}) \text{ au pire (cas symétrique).}$$

Comportement de $\widehat{c}(1)$

La somme des valeurs de $\widehat{c}(1)$ pour tous les motifs de taille k est indépendante du modèle probabiliste

$$\sum_{w \in \mathcal{M}^k} \widehat{c}(1) = 2^k + k - 1$$

Comportement de $\widehat{c}(1)$

La somme des valeurs de $\widehat{c}(1)$ pour tous les motifs de taille k est indépendante du modèle probabiliste

$$\sum_{w \in \mathcal{M}^k} \widehat{c}(1) = 2^k + k - 1$$

d'où le lemme $\boxed{\#A_k < k2^{k/2}}$

où $A_k := \{w : |w| = k, \widehat{c}(1) \geq 1 + 2^{-k/2}\}$.

Motifs périodiques

$A_k \cap$ intermédiaire = périodique.

$$\Delta_p < K \cdot \left(\sum_{k=k_c(n)}^{k_l(n)} k 2^{k/2} \right)$$

$$\Delta_p = O(n^{0.75C_p} \log n).$$

Motifs apériodiques

$w \notin A_k$, donc $\widehat{c}(1)$ est très proche de 1 :

$$\widehat{c}(1) \leq 1 + 2^{-k/2},$$

mais on a (environ) 2^k motifs de taille k .

Chaque terme de Δ_a est $\leq np_w e^{-np_w} \left(e^{np_w 2^{-k/2}} - 1 \right)$.

On veut utiliser un **DL** soit : $np_w 2^{-k/2} \rightarrow 0$.

$$p < 0.54$$

Motifs apériodiques

$w \notin A_k$, donc $\widehat{c}(1)$ est très proche de 1 :

$$\widehat{c}(1) \leq 1 + 2^{-k/2},$$

mais on a (environ) 2^k motifs de taille k .

Chaque terme de Δ_a est $\leq np_w e^{-np_w} \left(e^{np_w 2^{-k/2}} - 1 \right)$.

On veut utiliser un **DL** soit : $np_w 2^{-k/2} \rightarrow 0$.

$$p < 0.54$$

$$\Delta_a \leq \sum_{k=k_c(n)}^{k_l(n)} \beta 2^k 2^{-k/2} = O(n^{0.75 C_p}).$$

Récapitulons–LCE

- $|w| \leq \frac{5}{6}C_q \log n$ $o(1)$;
- $|w| \geq 1.5C_p \log n$ au pire $O(\sqrt{n})$;
- $|w| \in]\frac{5}{6}C_q \log n, 1.5C_p \log n[$
 - ★ $\hat{c}(1) \geq 1 + 2^{-k/2}$ $O(n^{0.75C_p} \log n)$;
 - ★ $\hat{c}(1) \leq 1 + 2^{-k/2}$ $O(n^{0.75C_p})$
pour $p < 0.54$.

Conclusion

Pour un trie suffixe, l'espérance de la LCE se comporte asymptotiquement en

Conclusion

Pour un trie suffixe, l'espérance de la LCE se comporte asymptotiquement en

$$LC_n = \frac{n \log n}{h} + (K + \epsilon(n))n + O(n^{0.85})$$

pour $p \in [0.5, 0.54]$,

et la taille en

Conclusion

Pour un trie suffixe, l'espérance de la LCE se comporte asymptotiquement en

$$LC_n = \frac{n \log n}{h} + (K + \epsilon(n))n + O(n^{0.85})$$

pour $p \in [0.5, 0.54]$,

et la taille en

$$T_n = \frac{n}{h}(1 + \epsilon'(n)) + O(n^{0.85})$$

pour $p \in [0.5, 0.54]$.

Perspectives

- Élargir le domaine de validité sur la proba ;
- étendre le modèle de source dynamique [Vallée] ;
- appliquer la méthode à d'autres paramètres.

Perspectives

- Élargir le domaine de validité sur la proba ;
- étendre le modèle de source dynamique [Vallée] ;
- appliquer la méthode à d'autres paramètres.

La lotta continua ...

Théorème de Pringsheim

Si une fonction dont le rayon de convergence est fini a ses coefficients de Taylor positifs, alors un de ses pôles dominant est situé sur l'axe réel positif.

Mellin analysis in the symmetric case

$$F(z) = 1 - (1 + z) \exp(-z)$$

- fundamental strip

Mellin analysis in the symmetric case

$$F(z) = 1 - (1 + z) \exp(-z)$$

- fundamental strip
- convergence strip

Mellin analysis in the symmetric case

$$F(z) = 1 - (1 + z) \exp(-z)$$

- fundamental strip
- convergence strip
- Mellin transform of F

Mellin analysis in the symmetric case

$$F(z) = 1 - (1 + z) \exp(-z)$$

- fundamental strip $\langle -2, 0 \rangle$
- convergence strip
- Mellin transform of F

Mellin analysis in the symmetric case

$$F(z) = 1 - (1 + z) \exp(-z)$$

- fundamental strip $\langle -2, 0 \rangle$
- convergence strip $\langle -2, -1 \rangle$
- Mellin transform of F

Mellin analysis in the symmetric case

$$F(z) = 1 - (1 + z) \exp(-z)$$

- fundamental strip $\langle -2, 0 \rangle$
- convergence strip $\langle -2, -1 \rangle$
- Mellin transform of F $F^*(s) = -(s + 1)\Gamma(s)$

Poles

- The poles of the Gamma function are the negative integers and are simple.

Poles

- The poles of the Gamma function are the negative integers and are simple.
- The poles of $F^*(s)$ are the negative integers, except -1.

Poles

- The poles of the Gamma function are the negative integers and are simple.
- The poles of $F^*(s)$ are the negative integers, except -1.
- The poles of $G^*(s)$ are $0, -2, -3, \dots$, poles of $F^*(s)$ and $\{-1 + 2ik\pi / \ln 2, k \in \mathbb{Z}\}$, poles of $1/1 - 2^{s+1}$ (in the symmetric case).

Poles

- The poles of the Gamma function are the negative integers and are simple.
- The poles of $F^*(s)$ are the negative integers, except -1.
- The poles of $G^*(s)$ are $0, -2, -3, \dots$, poles of $F^*(s)$ and $\{-1 + 2ik\pi / \ln 2, k \in \mathbb{Z}\}$, poles of $1/1 - 2^{s+1}$ (in the symmetric case).
- Since we are interested in the asymptotic behavior at infinity, we look at the poles at the right of -1.

Singular Parts (**symmetric case**)

Let's look at the singular parts of $G^*(s)$ at its poles left to -1.

At -1

At 0

At $-1 + 2ik\pi / \ln 2$
for $k \in \mathbb{Z}^*$

Singular Parts (**symmetric case**)

Let's look at the singular parts of $G^*(s)$ at its poles left to -1.

At -1

$$G^*(s) \asymp - \left[\frac{1}{(s+1) \ln 2} \right]$$

At 0

At $-1 + 2ik\pi / \ln 2$
for $k \in \mathbb{Z}^*$

Singular Parts (**symmetric case**)

Let's look at the singular parts of $G^*(s)$ at its poles left to -1.

At -1

$$G^*(s) \asymp - \left[\frac{1}{(s+1) \ln 2} \right]$$

At 0

$$G^*(s) \asymp \left[\frac{1}{s} \right]$$

At $-1 + 2ik\pi / \ln 2$
for $k \in \mathbb{Z}^*$

Singular Parts (**symmetric case**)

Let's look at the singular parts of $G^*(s)$ at its poles left to -1.

At -1

$$G^*(s) \asymp - \left[\frac{1}{(s+1) \ln 2} \right]$$

At 0

$$G^*(s) \asymp \left[\frac{1}{s} \right]$$

At $-1 + 2ik\pi / \ln 2$
for $k \in \mathbb{Z}^*$

$$- \left[\frac{\Gamma\left(\frac{2ik\pi}{\ln 2}\right)}{\left(s + 1 - \frac{2ik\pi}{\ln 2}\right) \ln 2} \right]$$