Produits scalaires effectifs de fonctions symétriques différentiellement finies

Frédéric Chyzak

Collaboration avec Marni Mishna et Bruno Salvy

frederic.chyzak@inria.fr
http://algo.inria.fr/chyzak/

Deux problèmes typiques

Graphes k-réguliers :

$$R_k(t) = \left\langle \left(\exp \sum_{i \geq 1} \frac{p_i}{i} \right) [e_2], \exp(h_k t) \right\rangle.$$

Tableaux de Young k-réguliers :

$$Y_k(t) = \left\langle \left(\exp \sum_{i \geq 1} \frac{p_i}{i} \right) [e_1 + e_2], \frac{1}{1 - h_k t} \right\rangle.$$

Produit scalaire de fonctions symétriques différentiellement finies

$\longrightarrow$ séries génératrices différentiellement finies en t.

Fonctions symétriques

Fonction symétrique = série formelle en une infinité de variables,

$$\phi = \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots<\infty} c_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots} X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \cdots \in \mathbb{Q}[[X_1, X_2, \ldots]],$$

avec invariance par l'action des permutations σ de $\mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$\phi\left(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \ldots\right) = \phi\left(X_1, X_2, \ldots\right), \qquad c_{\alpha_{\sigma(1)},\alpha_{\sigma(2)},\ldots} = c_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}.$$

Anneau gradué par le degré, $\Lambda = \bigoplus_{n\geq 0} \Lambda^n \subset \mathbb{Q}[[X_1, X_2, \ldots]]$.

Partitions (d'entiers) ou partage (UQÀM)

Partition λ de l'entier n en k parts : $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{N}^k$ avec

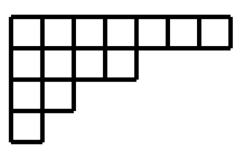
$$\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_k > 0 \qquad \text{et} \qquad \lambda_1 + \cdots + \lambda_k = n.$$

Autre notation : si r_i est le nombre de répétitions de la part i,

$$\lambda = \langle 1^{r_1} 2^{r_2} \cdots \rangle \qquad \text{et} \qquad \sum_i i r_i = n.$$

Notation :

$$\lambda \vdash n, \qquad |\lambda| = k, \qquad z_\lambda = (1^{r_1} r_1!)(2^{r_2} r_2!) \cdots .$$

$\lambda = (7,4,2,1) = \langle 1247 \rangle =$  $\leftrightarrow \lambda' = (4,3,2,2,1,1,1) = \langle 1^3 2^2 34 \rangle.$

Familles classiques de fonctions symétriques

Fonctions symétriques monomiales : (↔ définition)

$$m_\lambda = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{\mathbb{N}\setminus\{0\}}} (r_1!\, r_2! \cdots)^{-1} X_{\sigma(1)}^{\lambda_1} \cdots X_{\sigma(k)}^{\lambda_k}.$$

Fonctions symétriques élémentaires : (↔ formules de Newton)

$$e_\lambda = e_{\lambda_1} \cdots e_{\lambda_k} \qquad \text{pour} \qquad e_n = \sum_{i_1 < \cdots < i_n} X_{i_1} \cdots X_{i_n}.$$

Fonctions symétriques homogènes :

$$h_\lambda = h_{\lambda_1} \cdots h_{\lambda_k} \qquad \text{pour} \qquad h_n = \sum_{i_1 \leq \cdots \leq i_n} X_{i_1} \cdots X_{i_n}.$$

Fonctions symétriques puissances :

$$p_\lambda = p_{\lambda_1} \cdots p_{\lambda_k} \qquad \text{pour} \qquad p_n = \sum_{i \geq 1} X_i^n.$$

Fonctions symétriques de Schur : ($\leftrightarrow$ représentations de $\mathcal{S}_n$)

$$s_\lambda = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n,\lambda+\delta}}{a_{n,\delta}} = \lim_{n \to \infty} \text{dét}(h_{\lambda_i - i + j})_{i,j=1}^n = \lim_{n \to \infty} \text{dét}(e_{\lambda'_i - i + j})_{i,j=1}^n$$

$$\text{où} \quad \delta = (k-1, k-2, \ldots, 1) \quad \text{et} \quad a_{n,\mu} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{\mathbb{N} \setminus \{0\}}} \epsilon(\sigma) X_{\sigma(1)}^{\mu_1} \cdots X_{\sigma(k)}^{\mu_k}.$$

Bases vectorielles des Λ^n — Bases d'anneau de Λ

$$\Lambda^n = \bigoplus_{\lambda \vdash n} \mathbb{Q}\, m_\lambda = \bigoplus_{\lambda \vdash n} \mathbb{Q}\, e_\lambda = \bigoplus_{\lambda \vdash n} \mathbb{Q}\, h_\lambda = \bigoplus_{\lambda \vdash n} \mathbb{Q}\, p_\lambda = \bigoplus_{\lambda \vdash n} \mathbb{Q}\, s_\lambda.$$

$$\Lambda = \bigoplus_{n \geq 0} \Lambda^n = \mathbb{Q}[e_1, e_2, \dots] = \mathbb{Q}[h_1, h_2, \dots] = \mathbb{Q}[p_1, p_2, \dots]$$

avec indépendance algébrique de chaque famille sur $\mathbb{Q}$.

On pose :

$$\hat{\Lambda} = \mathbb{Q}[[p_1, p_2, \dots]].$$

Produit scalaire — Extraction de coefficients

On définit le même produit scalaire par chacune des formules :

$$\langle h_\lambda, m_\mu \rangle = \delta_{\lambda,\mu}, \qquad \langle p_\lambda, p_\mu \rangle = z_\lambda \delta_{\lambda,\mu}, \qquad \langle s_\lambda, s_\mu \rangle = \delta_{\lambda,\mu}.$$

Permet l'extraction des coefficients $c_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}$: pour $\phi \in \hat{\Lambda}$,

$$[X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \cdots]\, \phi = [m_\lambda]\, \phi = \langle h_\lambda, \phi \rangle,$$

où :

$$[u]\, \phi = \text{coefficient du “monôme” } u \text{ dans } \phi,$$
$$\lambda = \text{partition obtenue en réordonnant les } \alpha_i.$$

Pléthysme $[\pi\lambda\eta\theta\upsilon\sigma\mu o\varsigma$ = multiplication$]$

$p_n[\cdot]$ = dilatation de chaque X_i en X_i^n :

$$\psi(p_1, p_2, \dots) \mapsto p_n[\psi] = \psi(p_n, p_{2n}, \dots),$$

$$p_n[p_m] = p_m[p_n] = p_{nm}.$$

Pour définir les $\phi[\cdot]$, on fait de Λ un anneau d'opérateurs par :

$$(\phi_1 + c\phi_2)[\psi] = \phi_1[\psi] + c\phi_2[\psi], \quad (\phi_1 \cdot \phi_2)[\psi] = \phi_1[\psi] \cdot \phi_2[\psi].$$

$$\phi[p_n] = p_n[\phi], \qquad \phi[p_1] = p_1[\phi] = \phi.$$

Intuitivement : pléthysme = substitution symétrique qui remplace $(X_1, X_2, \dots)$ par $\big(\sigma_1(u), \sigma_2(u), \dots\big)$ où u est un monôme en les X_i et (σ_i) énumère $\mathcal{S}_{\mathbb{N}\setminus\{0\}}$.

Graphes k-réguliers

G = classe des graphes simples étiquetés à nombre finis d'arêtes.

Marquage par degrés des sommets $\rightarrow$ série génératrice $\phi_G = \sum_{g \in G} w(g)$,

avec $\quad w : \text{graphe } g \quad \mapsto \quad \text{monôme}$

$$1 - 2 - 3 - 4 \quad 5 - 6 \quad 7 \quad \cdots \quad \mapsto \quad X_1 X_2^3 X_3^3 X_4^2 X_5^2 X_6$$

Graphe k-régulier = tous ses sommets ont même degré.

$r_{n,k}$ = coefficient de $X_1^k \cdots X_n^k$ dans ϕ_G =

nombre de graphes k-réguliers sur $\{1, \ldots, n\}$.

Séries génératrices des graphes k-réguliers

$$R_k(t) \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{n\geq 0} r_{n,k}\frac{t^n}{n!} = \sum_{k\geq 0}\langle \phi_G, h_{\langle k^n\rangle}\rangle \frac{t^n}{n!} = \langle \phi_G, \exp(h_k t)\rangle$$

$$\phi_G = \sum_{g\in G}\prod_{\{i,j\}} X_i X_j = \prod_{i<j}(1+X_iX_j) = \left(\exp\sum_{i\geq 1}\frac{p_i}{i}\right)[e_2]$$

$$\Downarrow$$

$$R_k(t) = \left\langle \exp\left(\sum_{\substack{i\leq k\\ i \text{ pair}}}(-1)^{i/2}\frac{p_i^2}{2i} + \frac{p_i}{i} + \sum_{\substack{i\leq k\\ i\text{ impair}}}\frac{p_i^2}{2i}\right), \exp\left(t\sum_{\lambda\vdash k}\frac{p_\lambda}{z_\lambda}\right)\right\rangle$$

$R_k(t)$ suit une équation différentielle linéaire !

Valeurs connues (Goulden, Jackson et Reilly)

$$2(1-t)R_2'(t) - t^2 R(t) = 0,$$

$$R_2(t) = 1 + t^3 + 3t^4 + 12t^5 + 70t^6 + 465t^7 + 3507t^8 + 30016t^9 + \cdots$$

$$9t^3(t^4+2t^2-2)R_3''(t) + 3(t^{10}+6t^8+3t^6-6t^4-26t^2+8)R_3'(t) - t^3(t^4+2t^2-2)^2 R_3(t) = 0,$$

$$R_3(t) = 1 + 2t^2 + 47t^4 + 4720t^6 + 1256395t^8 + 699971370t^{10} + \cdots$$

$$16t^2(t-1)^2(t^5+2t^4+2t^2+8t-4)(t+2)^3 R_4''(t) - 4(t^{13}+4t^{12}-16t^{10}-10t^9-36t^8-220t^7-348t^6-48t^5+200t^4-336t^3-240t^2+416t-96)R_4'(t) - t^4(t^5+2t^4+2t^2+8t-4)^2 R_4(t) = 0,$$

$$R_4(t) = 1 + t^5 + 15t^6 + 465t^7 + 19355t^8 + 1024380t^9 + 66462606t^{10} + \cdots$$

Équations différentielles linéaires retrouvées par notre algorithme.

Séries différentiellement finies

ϕ est D-finie dans $\mathbb{K}[[X_1, \ldots, X_r]]$

$\Updownarrow$ (déf., Stanley)

les $\partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_r^{\alpha_r} \phi$ engendrent un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}(X_1, \ldots, X_r)$

ϕ est déterminée par **un système d'équations différentielles linéaires**.

Algorithmes de clôture par $+$, $\times$, dérivations, substitution algébrique, spécialisations, intégration indéfinies et définies, produit de Hadamard, diagonales.

Séries différentiellement finies en une infinité de variables

ϕ est D-finie dans $\mathbb{K}[[X_1, X_2, \ldots]]$

$\Updownarrow$ (déf., Gessel)

pour chaque $r \in \mathbb{N}$, la spécialisation
$\phi(X_1, \ldots, X_r, 0, 0, \ldots)$ est D-finie dans $\mathbb{K}[[X_1, \ldots, X_r]]$

Exemples : $\displaystyle\prod_{i\geq 1}(1 + X_i)$, $\displaystyle\prod_{1\leq i<j}(1 + X_i X_j)$.

$$J_0\left(X_1 + \frac{X_2}{2} + \frac{X_3}{3} + \cdots\right).$$

Propriétés de clôture des séries D-finies en une infinité de variables (Gessel)

1. Clôture par $+$, $\times$, ∂_i.

   Les séries D-finies dans $\mathbb{K}[[X_1, X_2, \dots]]$ en constituent une sous-algèbre différentielle.

2. Clôture par oubli de dérivation et extension de coefficients.

   Une série D-finie dans $\mathbb{K}[[X_1, X_2, \dots]]$ est D-finie dans $\mathbb{K}'[[X_2, X_3, \dots]]$ pour $\mathbb{K}' = \mathbb{K}(X_1)$.

3. Clôture par substitution rationnelle.

   Si f est D-finie dans $\mathbb{K}[[X_1, X_2, \dots]]$, si $R \in \mathbb{K}(X_1, \dots)$, si la série $f(R, X_2, X_3, \dots)$ est bien définie, alors elle est D-finie dans $\mathbb{K}[[X_1, X_2, \dots]]$.

4. D-finitude des exponentielles de polynôme.

   Pour chaque polynôme $P \in \mathbb{K}[X_1, X_2, \dots]$, la série e^P est D-finie dans $\mathbb{K}[[X_1, X_2, \dots]]$.

Fonctions symétriques différentiellement finies

ϕ est une fonction symétrique D-finie dans $\hat{\Lambda}$

$\Updownarrow$ (déf., Gessel)

ϕ est D-finie dans $\mathbb{Q}[[p_1, p_2, \ldots]]$

Exemples : $\displaystyle\prod_{i\geq 1}(1+X_i),$ $\displaystyle\prod_{1\leq i<j}(1+X_iX_j).$

Contre-exemple : $\displaystyle J_0\left(X_1 + \frac{X_2}{2} + \frac{X_3}{3} + \cdots\right) \notin \hat{\Lambda}.$

Propriétés de clôture des séries symétriques D-finies (Gessel)

1. Clôture par $+$, $\times$, ∂_i.
2. Clôture par substitution rationnelle (sous conditions).
3. D-finitude des exponentielles de polynômes.
4. Clôture par produit de Kronecker (donné par $p_\lambda * p_\mu = \delta_{\lambda,\mu} z_\lambda p_\lambda$).
5. Clôture par produit scalaire (sous conditions) :

   Pour ϕ et ψ D-finies dans $\hat{\Lambda}[[t]]$, si ψ ne fait intervenir qu'un nombre fini de p_i, alors $\langle \phi, \psi \rangle$ est D-finie en t.

6. Clôture par pléthysme (sous conditions) :

   $\left(\sum_{n\geq 0} h_n\right)[\psi]$ et $\left(\sum_{n\geq 0} e_n\right)[\psi]$ sont symétriques D-finies pour tout polynôme ψ en les p_n.

Algèbres de Weyl

$$A_p = \mathbb{C}\langle p_1, \ldots, p_n, \partial_1, \ldots, \partial_n; \mathcal{R}_p \rangle, \qquad \partial_i = d/dp_i,$$

$$\mathcal{R}_p : \partial_i p_j = p_j \partial_i + \delta_{i,j}, \quad p_i p_j - p_j p_i = \partial_i \partial_j - \partial_j \partial_i = 0.$$

$$A_{p,t} = \mathbb{C}\langle p_1, \ldots, p_n, t, \partial_1, \ldots, \partial_n, \partial_t; \mathcal{R}_{p,t} \rangle, \qquad \partial_t = d/dt.$$

$$\mathcal{R}_{p,t} : \mathcal{R}_p, \quad \partial_t t = t\partial_t + 1, \quad tp_i - p_i t = t\partial_i - \partial_i t = \partial_t p_i - p_i \partial_t = 0.$$

$$\boxed{\text{Opérateurs différentiels linéaires à coefficients polynomiaux}}$$

$$I_\phi := \operatorname{ann}_{A_{p,t}} \phi = \{\, L \in A_{p,t} \mid L\phi = 0 \,\} \qquad \text{(idéal à gauche).}$$

$$A_{p,t}\phi = \{\, L\phi \mid L \in A_{p,t} \,\} \simeq A_{p,t}/I_\phi \qquad \text{(module à gauche).}$$

Adjonctions

Adjoint en général : pour P et Q dans A_p,

$$\langle P\phi, \psi\rangle = \langle \phi, P^{\mathrm{adj}}\psi\rangle, \qquad (P^{\mathrm{adj}})^{\mathrm{adj}} = P, \qquad (PQ)^{\mathrm{adj}} = Q^{\mathrm{adj}}P^{\mathrm{adj}}.$$

Adjoint pour le produit scalaire usuel $(f,g) \mapsto \int fg$:

$$\langle \partial_i\phi, \psi\rangle = -\langle \phi, \partial_i\psi\rangle \quad \Longrightarrow \quad p_i^\star = p_i \quad \text{et} \quad \partial_i^\star = -\partial_i$$

(intégration par parties).

Adjoint dans le cadre symétrique :

$$\langle p_i\phi, \psi\rangle = \langle \phi, i\partial_i\psi\rangle \quad \Longrightarrow \quad p_i^\diamond = i\partial_i \quad \text{et} \quad \partial_i^\diamond = i^{-1}p_i.$$

Extension à $A_p[t]$ par $t^\star = t^\diamond = t$.

Adjoint d'un module

Module M à gauche $\longleftrightarrow$ module M^{adj} à droite.

Mêmes supports, mêmes additions, mais

$$\forall P \in A_p,\ \forall m \in M^{\mathrm{adj}},\ mP := (P^{\mathrm{adj}})m.$$

Cas $M = A_p\phi : M^{\mathrm{adj}} = \phi^{\mathrm{adj}} A_p$ avec

$$\phi^{\mathrm{adj}} = \phi, \quad I_{\phi^{\mathrm{adj}}} = (I_\phi)^{\mathrm{adj}}, \quad (A_p\phi)^{\mathrm{adj}} \simeq A_p / I_{\phi^{\mathrm{adj}}}.$$

Produit scalaire effectif : cadre du calcul

Simplifications : un unique t et $\partial_t\phi = 0$.

Observations : pour $S \in A_p$, $T \in A_{p,t}$, $U \in A_t$, $P \in I_\phi \cap A_p$ et $Q \in I_\psi$,

$$\left\langle \phi, (P^\diamond SU + TQ)\psi \right\rangle = \langle S^\diamond P\phi, U\psi\rangle + \langle \phi, TQ\psi\rangle = 0,$$

$$\partial_t\langle\phi,\psi\rangle = \langle\phi,\partial_t\psi\rangle, \qquad t\langle\phi,\psi\rangle = \langle t\phi,\psi\rangle = \langle\phi,t\psi\rangle.$$

Objectif : calculer $\left((\operatorname{ann}_{A_p}\phi)^\diamond A_t + (\operatorname{ann}_{A_{p,t}}\psi)\right) \cap \mathbb{C}\langle t, \partial_t\rangle$.

Idée du calcul :

1. construire itérativement des troncatures de $(I_\phi)^\diamond$ et de I_ψ ;
2. à chaque étape, chercher une recombinaison dans A_t.

Produit scalaire effectif : algorithme

Entrées :
– ϕ D-finie dans $\mathbb{C}[[p_1, \dots, p_n]]$, **(hypothèse simplificatrice)**
– ψ D-finie dans $\mathbb{C}[[t, p_1, \dots, p_n]]$.

Algorithme :

1. calculer des bases de Gröbner $(\mathcal{G}_\phi)^\diamond$ pour $(\operatorname{ann}\phi)^\diamond$ et $\mathcal{G}_\psi$ pour $(\operatorname{ann}\psi)$ selon un même ordre (annulateurs relatifs à $\mathbb{C}(t) \otimes A_{p,t}$) ;
2. faire $B = \{\}$;
3. itérer sur les monômes α de $[p_1, \dots, p_n, \partial_1, \dots, \partial_n, \partial_t]$ dans l'ordre croissant ;
   (a) noter α_ϕ le reste de la division à gauche de α par $(\mathcal{G}_\phi)^\diamond$;
   (b) noter α_ψ le reste de la division à droite de α par $\mathcal{G}_\psi$;
   (c) mettre $\alpha - \alpha_\phi$ et $\alpha - \alpha_\psi$ dans B et réduire pour éliminer les p_i et les ∂_i par de l'algèbre linéaire ;
   (d) si B contient un élément P en t et ∂_t seulement, stopper et le renvoyer.

Filtration par le degré total

$$F_d = \{\, P \in A_p \mid \deg P \leq d \,\}.$$

$$F_d F_{d'} \subset F_{d+d'}, \qquad F_d \subset F_{d+1}, \qquad \bigcup_{d \geq 0} F_d = A_p.$$

Holonomie

Le module $A_p\phi$ est dit holonome quand $\dim_{\mathbb{C}} F_d\phi = O\left(d^n\right)$.
ϕ est dite holonome si $A_p\phi$ est holonome.

Théorème : ϕ est holonome si et seulement si ϕ est D-finie.
(Kashiwara, Takayama)

Preuve de l'algorithme — Correction

1. On introduit $S := (A_{p,t}\phi)^\diamond \otimes_{A_p[t]} (A_{p,t}\psi) \twoheadrightarrow \langle A_{p,t}\phi, A_{p,t}\psi\rangle$, où $(P\phi)^\diamond \otimes \psi = (\phi^\diamond P^\diamond) \otimes \psi = \phi^\diamond \otimes (P^\diamond \psi)$.

2. On a : $S \simeq (A_{p,t}/I_\phi^\diamond) \otimes_{A_p[t]} (A_{p,t}/I_\psi) \simeq \left(A_{p,t}^\diamond \otimes_{A_p[t]} A_{p,t}\right)/K$ pour $K = I_\phi^\diamond \otimes_{A_p[t]} A_{p,t} + A_{p,t} \otimes_{A_p[t]} I_\psi = \operatorname{ann}_{A_{p,t}^\diamond \otimes_{A_p[t]} A_{p,t}} (\phi^\diamond \otimes \psi)$.

3. L'algorithme construit progressivement une base vectorielle de K et renvoie $K \cap \mathbb{C}\langle t, \partial_t \otimes 1 + 1 \otimes \partial_t\rangle$ lorsque celui-ci est non trivial.

Preuve de l'algorithme — Terminaison

1. S est holonome dès que ϕ et ψ sont holonomes, car

$$\int P := P/\sum_i \partial_{p_i} P \twoheadrightarrow S$$

   pour $P := (A_{p,t}\phi)^\diamond \otimes_{\mathbb{C}[p,t]} (A_{p,t}\psi) = \iota^*\big((A_{p,t}\phi)^\diamond \otimes_{\mathbb{C}} (A_{p,t}\psi)\big)$, où ι^* est l'image inverse de l'application $\iota : (p,t) \mapsto (p,t,p,t)$.

2. Donc $K \cap \mathbb{C}\langle t, \partial_t \otimes 1 + 1 \otimes \partial_t\rangle$ ne se réduit pas à $\{0\}$.

3. Tout élément de K est atteint un jour.

Passage du cas symétrique au cas classique

Trois morphismes préservant l'holonomie :

1. dilatation $\phi \mapsto \phi(p_1, 2p_2, \ldots, np_n)$: $\tau : (p_i, \partial_i) \mapsto (ip_i, i^{-1}\partial_i)$
2. transformée de Laplace formelle $\phi \mapsto \int e^{-pq}\phi(p)\,dq$:
$$\mathcal{F} : (p_i, \partial_i) \mapsto (-\partial_i, p_i)$$
3. adjonction usuelle : $(p_i, \partial_i) \mapsto (p_i, -\partial_i)$

$$\diamond = \text{adjonction symétrique} = \text{adjonction classique} \circ \mathcal{F} \circ \tau = \star \circ \mathcal{F} \circ \tau$$

$$(p_i, \partial_i) \mapsto (i\partial_i, i^{-1}p_i).$$

En conséquence, ϕ holonome implique $(A_{p,t}\phi)^\diamond$ holonome.

Autres applications de l'algorithme

Conjecture : Le nombre $y_{n,k}$ de tableaux de Young k-uniformes de taille n admet l'estimation asymptotique

$$y_{n,k} \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{e^{k-2}}{2\pi}\right)^{k/4} n!^{k/2-1} \left(\frac{k^{k/2}}{k!}\right)^{n} \frac{\exp(\sqrt{kn})}{n^{k/4}}, \qquad n \to \infty.$$

(Preuves pour $k = 1, 2$; constantes conjecturales pour $k = 3, 4$; cas général pourrait être prouvé par la méthode de MacKay.)

Proposition : Le produit de Kronecker (donné par $p_\lambda * p_\mu = \delta_{\lambda,\mu} z_\lambda p_\lambda$) de la somme des fonctions de Schur avec elle-même est

$$\left(\sum_\lambda s_\lambda\right) * \left(\sum_\lambda s_\lambda\right) = \exp\left(\sum_{n\geq 1} \frac{p_{2n-1}}{(2n-1)(1-p_{2n-1})}\right)\left(\prod_{n\geq 1}(1-p_n^2)\right)^{-1/2}.$$