

Produits scalaires effectifs de fonctions symétriques différentiellement finies

Frédéric Chyzak

Collaboration avec Marni Mishna et Bruno Salvy

`frederic.chyzak@inria.fr`
`http://algo.inria.fr/chyzak/`

Deux problèmes typiques

Graphes k -réguliers :

$$R_k(t) = \left\langle \left(\exp \sum_{i \geq 1} \frac{p_i}{i} \right) [e_2], \exp(h_k t) \right\rangle.$$

Tableaux de Young k -réguliers :

$$Y_k(t) = \left\langle \left(\exp \sum_{i \geq 1} \frac{p_i}{i} \right) [e_1 + e_2], \frac{1}{1 - h_k t} \right\rangle.$$

Produit scalaire de fonctions symétriques différentiellement finies
→ séries génératrices différentiellement finies en t .

Fonctions symétriques

Fonction symétrique = série formelle en une infinité de variables,

$$\phi = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots < \infty} c_{\alpha_1, \alpha_2, \dots} X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \dots \in \mathbb{Q}[[X_1, X_2, \dots]],$$

avec **invariance par l'action des permutations** σ de $\mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$\phi(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \dots) = \phi(X_1, X_2, \dots), \quad c_{\alpha_{\sigma(1)}, \alpha_{\sigma(2)}, \dots} = c_{\alpha_1, \alpha_2, \dots}$$

Anneau gradué par le degré, $\Lambda = \bigoplus_{n \geq 0} \Lambda^n \subset \mathbb{Q}[[X_1, X_2, \dots]]$.

Partitions (d'entiers) ou partage (UQÀM)

Partition λ de l'entier n en k parts : $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{N}^k$ avec

$$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k > 0 \quad \text{et} \quad \lambda_1 + \dots + \lambda_k = n.$$

Autre notation : si r_i est le nombre de répétitions de la part i ,

$$\lambda = \langle 1^{r_1} 2^{r_2} \dots \rangle \quad \text{et} \quad \sum_i i r_i = n.$$

Notation :

$$\lambda \vdash n, \quad |\lambda| = k, \quad z_\lambda = (1^{r_1} r_1!)(2^{r_2} r_2!) \dots$$

$$\lambda = (7, 4, 2, 1) = \langle 1247 \rangle = \begin{array}{cccccccc} \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square & & \\ \square & \square & \square & & & & & \\ \square & & & & & & & \end{array} \leftrightarrow \lambda' = (4, 3, 2, 2, 1, 1, 1) = \langle 1^3 2^2 34 \rangle.$$

Familles classiques de fonctions symétriques

Fonctions symétriques **monomiales** : (↔ définition)

$$m_\lambda = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{\mathbb{N} \setminus \{0\}}} (r_1! r_2! \cdots)^{-1} X_{\sigma(1)}^{\lambda_1} \cdots X_{\sigma(k)}^{\lambda_k}.$$

Fonctions symétriques **élémentaires** : (↔ formules de Newton)

$$e_\lambda = e_{\lambda_1} \cdots e_{\lambda_k} \quad \text{pour} \quad e_n = \sum_{i_1 < \cdots < i_n} X_{i_1} \cdots X_{i_n}.$$

Fonctions symétriques **homogènes** :

$$h_\lambda = h_{\lambda_1} \cdots h_{\lambda_k} \quad \text{pour} \quad h_n = \sum_{i_1 \leq \cdots \leq i_n} X_{i_1} \cdots X_{i_n}.$$

Fonctions symétriques **puissances** :

$$p_\lambda = p_{\lambda_1} \cdots p_{\lambda_k} \quad \text{pour} \quad p_n = \sum_{i \geq 1} X_i^n.$$

Fonctions symétriques **de Schur** : (\leftrightarrow représentations de \mathcal{S}_n)

$$s_\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n, \lambda + \delta}}{a_{n, \delta}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \det(h_{\lambda_i - i + j})_{i, j=1}^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \det(e_{\lambda'_i - i + j})_{i, j=1}^n$$

où $\delta = (k - 1, k - 2, \dots, 1)$ et $a_{n, \mu} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{\mathbb{N} \setminus \{0\}}} \epsilon(\sigma) X_{\sigma(1)}^{\mu_1} \cdots X_{\sigma(k)}^{\mu_k}.$

Bases vectorielles des Λ^n — Bases d'anneau de Λ

$$\Lambda^n = \bigoplus_{\lambda \vdash n} \mathbb{Q} m_\lambda = \bigoplus_{\lambda \vdash n} \mathbb{Q} e_\lambda = \bigoplus_{\lambda \vdash n} \mathbb{Q} h_\lambda = \bigoplus_{\lambda \vdash n} \mathbb{Q} p_\lambda = \bigoplus_{\lambda \vdash n} \mathbb{Q} s_\lambda.$$

$$\Lambda = \bigoplus_{n \geq 0} \Lambda^n = \mathbb{Q}[e_1, e_2, \dots] = \mathbb{Q}[h_1, h_2, \dots] = \mathbb{Q}[p_1, p_2, \dots]$$

avec indépendance algébrique de chaque famille sur \mathbb{Q} .

On pose :

$$\hat{\Lambda} = \mathbb{Q}[[p_1, p_2, \dots]].$$

Produit scalaire — Extraction de coefficients

On définit le même produit scalaire par chacune des formules :

$$\langle h_\lambda, m_\mu \rangle = \delta_{\lambda, \mu}, \quad \langle p_\lambda, p_\mu \rangle = z_\lambda \delta_{\lambda, \mu}, \quad \langle s_\lambda, s_\mu \rangle = \delta_{\lambda, \mu}.$$

Permet l'extraction des coefficients $c_{\alpha_1, \alpha_2, \dots}$: pour $\phi \in \hat{\Lambda}$,

$$[X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \dots] \phi = [m_\lambda] \phi = \langle h_\lambda, \phi \rangle,$$

où :

$[u] \phi$ = coefficient du “monôme” u dans ϕ ,

λ = partition obtenue en réordonnant les α_i .

Pléthysme [$\pi\lambda\eta\theta\nu\sigma\mu\omicron\varsigma$ = multiplication]

$p_n[\cdot]$ = dilatation de chaque X_i en X_i^n :

$$\psi(p_1, p_2, \dots) \mapsto p_n[\psi] = \psi(p_n, p_{2n}, \dots),$$

$$p_n[p_m] = p_m[p_n] = p_{nm}.$$

Pour définir les $\phi[\cdot]$, on fait de Λ un anneau d'opérateurs par :

$$(\phi_1 + c\phi_2)[\psi] = \phi_1[\psi] + c\phi_2[\psi], \quad (\phi_1 \cdot \phi_2)[\psi] = \phi_1[\psi] \cdot \phi_2[\psi].$$

$$\phi[p_n] = p_n[\phi], \quad \phi[p_1] = p_1[\phi] = \phi.$$

Intuitivement : pléthysme = substitution symétrique qui remplace (X_1, X_2, \dots) par $(\sigma_1(u), \sigma_2(u), \dots)$ où u est un monôme en les X_i et (σ_i) énumère $\mathcal{S}_{\mathbb{N} \setminus \{0\}}$.

Graphes k -réguliers

G = classe des graphes simples étiquetés à nombre fini d'arêtes.

Marquage par degrés des sommets \rightarrow série génératrice $\phi_G = \sum_{g \in G} w(g)$,

avec $w : \text{graphe } g \mapsto \text{monôme}$

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccccccc}
 1 & - & 2 & - & 3 & - & 4 & & 5 & - & 6 & & 7 & \dots
 \end{array} & \mapsto & X_1 X_2^3 X_3^3 X_4^2 X_5^2 X_6
 \end{array}$$

Graphe k -régulier = tous ses sommets ont même degré.

$r_{n,k}$ = coefficient de $X_1^k \cdots X_n^k$ dans $\phi_G =$

nombre de graphes k -réguliers sur $\{1, \dots, n\}$.

Séries génératrices des graphes k -réguliers

$$R_k(t) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{n \geq 0} r_{n,k} \frac{t^n}{n!} = \sum_{k \geq 0} \langle \phi_G, h_{\langle k^n \rangle} \rangle \frac{t^n}{n!} = \langle \phi_G, \exp(h_k t) \rangle$$

$$\phi_G = \sum_{g \in G} \prod_{\{i,j\}} X_i X_j = \prod_{i < j} (1 + X_i X_j) = \left(\exp \sum_{i \geq 1} \frac{p_i}{i} \right) [e_2]$$

↓

$$R_k(t) = \left\langle \exp \left(\sum_{\substack{i \leq k \\ i \text{ pair}}} (-1)^{i/2} \frac{p_i^2}{2i} + \frac{p_i}{i} + \sum_{\substack{i \leq k \\ i \text{ impair}}} \frac{p_i^2}{2i} \right), \exp \left(t \sum_{\lambda \vdash k} \frac{p_\lambda}{z_\lambda} \right) \right\rangle$$

$R_k(t)$ suit une **équation différentielle linéaire** !

Valeurs connues (Goulden, Jackson et Reilly)

$$2(1-t)R_2'(t) - t^2R_2(t) = 0,$$

$$R_2(t) = 1 + t^3 + 3t^4 + 12t^5 + 70t^6 + 465t^7 + 3507t^8 + 30016t^9 + \dots$$

$$9t^3(t^4 + 2t^2 - 2)R_3''(t)$$

$$+ 3(t^{10} + 6t^8 + 3t^6 - 6t^4 - 26t^2 + 8)R_3'(t)$$

$$- t^3(t^4 + 2t^2 - 2)^2R_3(t) = 0,$$

$$R_3(t) = 1 + 2t^2 + 47t^4 + 4720t^6 + 1256395t^8 + 699971370t^{10} + \dots$$

$$16t^2(t-1)^2(t^5 + 2t^4 + 2t^2 + 8t - 4)(t+2)^3R_4''(t)$$

$$- 4(t^{13} + 4t^{12} - 16t^{10} - 10t^9 - 36t^8 - 220t^7 - 348t^6 - 48t^5 + 200t^4 - 336t^3 - 240t^2 + 416t - 96)R_4'(t)$$

$$- t^4(t^5 + 2t^4 + 2t^2 + 8t - 4)^2R_4(t) = 0,$$

$$R_4(t) = 1 + t^5 + 15t^6 + 465t^7 + 19355t^8 + 1024380t^9 + 66462606t^{10} + \dots$$

Équations différentielles linéaires **retrouvées par notre algorithme.**

Séries différentiellement finies

ϕ est **D-finie** dans $\mathbb{K}[[X_1, \dots, X_r]]$

\Updownarrow (déf., Stanley)

les $\partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_r^{\alpha_r} \phi$ engendrent un espace vectoriel
de dimension finie sur $\mathbb{K}(X_1, \dots, X_r)$

ϕ est déterminée par **un système d'équations différentielles linéaires**.

Algorithmes de clôture par $+$, \times , dérivations, substitution algébrique, **spécialisations**, intégration indéfinies et définies, produit de Hadamard, diagonales.

Séries différentiellement finies en une infinité de variables

ϕ est **D-finie** dans $\mathbb{K}[[X_1, X_2, \dots]]$

\Updownarrow (déf., Gessel)

pour chaque $r \in \mathbb{N}$, la **spécialisation**

$\phi(X_1, \dots, X_r, 0, 0, \dots)$ est D-finie dans $\mathbb{K}[[X_1, \dots, X_r]]$

Exemples :

$$\prod_{i \geq 1} (1 + X_i), \quad \prod_{1 \leq i < j} (1 + X_i X_j).$$

$$J_0 \left(X_1 + \frac{X_2}{2} + \frac{X_3}{3} + \dots \right).$$

Propriétés de clôture des séries D-finies en une infinité de variables (Gessel)

1. Clôture par $+$, \times , ∂_i .

Les séries D-finies dans $\mathbb{K}[[X_1, X_2, \dots]]$ en constituent une sous-algèbre différentielle.

2. Clôture par oubli de dérivation et extension de coefficients.

Une série D-finie dans $\mathbb{K}[[X_1, X_2, \dots]]$ est D-finie dans $\mathbb{K}'[[X_2, X_3, \dots]]$ pour $\mathbb{K}' = \mathbb{K}(X_1)$.

3. Clôture par substitution rationnelle.

Si f est D-finie dans $\mathbb{K}[[X_1, X_2, \dots]]$, si $R \in \mathbb{K}(X_1, \dots)$, si la série $f(R, X_2, X_3, \dots)$ est bien définie, alors elle est D-finie dans $\mathbb{K}[[X_1, X_2, \dots]]$.

4. D-finitude des exponentielles de polynôme.

Pour chaque polynôme $P \in \mathbb{K}[X_1, X_2, \dots]$, la série e^P est D-finie dans $\mathbb{K}[[X_1, X_2, \dots]]$.

Fonctions symétriques différentiellement finies

ϕ est une **fonction symétrique D-finie** dans $\hat{\Lambda}$

\Updownarrow (déf., Gessel)

ϕ est **D-finie** dans $\mathbb{Q}[[p_1, p_2, \dots]]$

Exemples :

$$\prod_{i \geq 1} (1 + X_i),$$

$$\prod_{1 \leq i < j} (1 + X_i X_j).$$

Contre-exemple :

$$J_0 \left(X_1 + \frac{X_2}{2} + \frac{X_3}{3} + \dots \right) \notin \hat{\Lambda}.$$

Propriétés de clôture des séries symétriques D-finies (Gessel)

1. Clôture par $+$, \times , ∂_i .
2. Clôture par **substitution rationnelle** (sous conditions).
3. D-finitude des **exponentielles de polynômes**.
4. Clôture par **produit de Kronecker** (donné par $p_\lambda * p_\mu = \delta_{\lambda,\mu} z_\lambda p_\lambda$).
5. Clôture par **produit scalaire** (sous conditions) :

Pour ϕ et ψ D-finies dans $\hat{\Lambda}[[t]]$, si ψ ne fait intervenir qu'un nombre fini de p_i , alors $\langle \phi, \psi \rangle$ est D-finie en t .

6. Clôture par **pléthysme** (sous conditions) :

$(\sum_{n \geq 0} h_n)[\psi]$ et $(\sum_{n \geq 0} e_n)[\psi]$ sont symétriques D-finies pour tout polynôme ψ en les p_n .

Algèbres de Weyl

$$A_p = \mathbb{C}\langle p_1, \dots, p_n, \partial_1, \dots, \partial_n; \mathcal{R}_p \rangle, \quad \partial_i = d/dp_i,$$

$$\mathcal{R}_p : \partial_i p_j = p_j \partial_i + \delta_{i,j}, \quad p_i p_j - p_j p_i = \partial_i \partial_j - \partial_j \partial_i = 0.$$

$$A_{p,t} = \mathbb{C}\langle p_1, \dots, p_n, t, \partial_1, \dots, \partial_n, \partial_t; \mathcal{R}_{p,t} \rangle, \quad \partial_t = d/dt.$$

$$\mathcal{R}_{p,t} : \mathcal{R}_p, \quad \partial_t t = t \partial_t + 1, \quad t p_i - p_i t = t \partial_i - \partial_i t = \partial_t p_i - p_i \partial_t = 0.$$

Opérateurs différentiels linéaires à coefficients polynomiaux

$$I_\phi := \text{ann}_{A_{p,t}} \phi = \{ L \in A_{p,t} \mid L\phi = 0 \} \quad (\text{idéal à gauche}).$$

$$A_{p,t}\phi = \{ L\phi \mid L \in A_{p,t} \} \simeq A_{p,t}/I_\phi \quad (\text{module à gauche}).$$

Adjonctions

Adjoint en général : pour P et Q dans A_p ,

$$\langle P\phi, \psi \rangle = \langle \phi, P^{\text{adj}}\psi \rangle, \quad (P^{\text{adj}})^{\text{adj}} = P, \quad (PQ)^{\text{adj}} = Q^{\text{adj}}P^{\text{adj}}.$$

Adjoint pour le produit scalaire usuel $(f, g) \mapsto \int fg$:

$$\langle \partial_i \phi, \psi \rangle = -\langle \phi, \partial_i \psi \rangle \implies p_i^* = p_i \quad \text{et} \quad \partial_i^* = -\partial_i$$

(intégration par parties).

Adjoint dans le cadre symétrique :

$$\langle p_i \phi, \psi \rangle = \langle \phi, i\partial_i \psi \rangle \implies p_i^\diamond = i\partial_i \quad \text{et} \quad \partial_i^\diamond = i^{-1}p_i.$$

Extension à $A_p[t]$ par $t^* = t^\diamond = t$.

Adjoint d'un module

Module M à gauche \longleftrightarrow module M^{adj} à droite.

Mêmes supports, mêmes additions, mais

$$\forall P \in A_p, \forall m \in M^{\text{adj}}, mP := (P^{\text{adj}})m.$$

Cas $M = A_p\phi : M^{\text{adj}} = \phi^{\text{adj}}A_p$ avec

$$\phi^{\text{adj}} = \phi, \quad I_{\phi^{\text{adj}}} = (I_\phi)^{\text{adj}}, \quad (A_p\phi)^{\text{adj}} \simeq A_p/I_{\phi^{\text{adj}}}.$$

Produit scalaire effectif : cadre du calcul

Simplifications : un unique t et $\partial_t \phi = 0$.

Observations : pour $S \in A_p$, $T \in A_{p,t}$, $U \in A_t$, $P \in I_\phi \cap A_p$ et $Q \in I_\psi$,

$$\langle \phi, (P^\diamond SU + TQ)\psi \rangle = \langle S^\diamond P\phi, U\psi \rangle + \langle \phi, TQ\psi \rangle = 0,$$

$$\partial_t \langle \phi, \psi \rangle = \langle \phi, \partial_t \psi \rangle, \quad t \langle \phi, \psi \rangle = \langle t\phi, \psi \rangle = \langle \phi, t\psi \rangle.$$

Objectif : calculer $((\text{ann}_{A_p} \phi)^\diamond A_t + (\text{ann}_{A_{p,t}} \psi)) \cap \mathbb{C}\langle t, \partial_t \rangle$.

Idée du calcul :

1. construire itérativement des troncatures de $(I_\phi)^\diamond$ et de I_ψ ;
2. à chaque étape, chercher une recombinaison dans A_t .

Produit scalaire effectif : algorithme

Entrées :

- ϕ **D-finie** dans $\mathbb{C}[[p_1, \dots, p_n]]$, (hypothèse simplificatrice)
- ψ **D-finie** dans $\mathbb{C}[[t, p_1, \dots, p_n]]$.

Algorithme :

1. calculer des **bases de Gröbner** $(\mathcal{G}_\phi)^\diamond$ pour $(\text{ann } \phi)^\diamond$ et \mathcal{G}_ψ pour $(\text{ann } \psi)$ selon un même ordre (annulateurs relatifs à $\mathbb{C}(t) \otimes A_{p,t}$);
2. faire $B = \{ \}$;
3. itérer sur les monômes α de $[p_1, \dots, p_n, \partial_1, \dots, \partial_n, \partial_t]$ dans l'ordre croissant ;
 - (a) noter α_ϕ le **reste de la division à gauche** de α par $(\mathcal{G}_\phi)^\diamond$;
 - (b) noter α_ψ le **reste de la division à droite** de α par \mathcal{G}_ψ ;
 - (c) mettre $\alpha - \alpha_\phi$ et $\alpha - \alpha_\psi$ dans B et réduire pour éliminer les p_i et les ∂_i par de l'**algèbre linéaire**;
 - (d) si B contient un élément P en t et ∂_t seulement, stopper et le renvoyer.

Filtration par le degré total

$$F_d = \{ P \in A_p \mid \deg P \leq d \}.$$

$$F_d F_{d'} \subset F_{d+d'}, \quad F_d \subset F_{d+1}, \quad \bigcup_{d \geq 0} F_d = A_p.$$

Holonomie

Le module $A_p \phi$ est dit **holonome** quand $\dim_{\mathbb{C}} F_d \phi = O(d^n)$.

ϕ est dite holonome si $A_p \phi$ est holonome.

Théorème : ϕ est holonome si et seulement si ϕ est D-finie.

(Kashiwara, Takayama)

Preuve de l'algorithme — Correction

1. On introduit $S := (A_{p,t}\phi)^\diamond \otimes_{A_p[t]} (A_{p,t}\psi) \twoheadrightarrow \langle A_{p,t}\phi, A_{p,t}\psi \rangle$, où $(P\phi)^\diamond \otimes \psi = (\phi^\diamond P^\diamond) \otimes \psi = \phi^\diamond \otimes (P^\diamond \psi)$.
2. On a : $S \simeq (A_{p,t}/I_\phi^\diamond) \otimes_{A_p[t]} (A_{p,t}/I_\psi) \simeq (A_{p,t}^\diamond \otimes_{A_p[t]} A_{p,t}) / K$
pour
$$K = I_\phi^\diamond \otimes_{A_p[t]} A_{p,t} + A_{p,t} \otimes_{A_p[t]} I_\psi = \text{ann}_{A_{p,t}^\diamond \otimes_{A_p[t]} A_{p,t}} (\phi^\diamond \otimes \psi).$$
3. L'algorithme construit progressivement une base vectorielle de K et renvoie $K \cap \mathbb{C}\langle t, \partial_t \otimes 1 + 1 \otimes \partial_t \rangle$ lorsque celui-ci est non trivial.

Preuve de l'algorithme — Terminaison

1. S est holonome dès que ϕ et ψ sont holonomes, car

$$\int P := P / \sum_i \partial_{p_i} P \twoheadrightarrow S$$

pour $P := (A_{p,t}\phi)^\diamond \otimes_{\mathbb{C}[p,t]} (A_{p,t}\psi) = \iota^*((A_{p,t}\phi)^\diamond \otimes_{\mathbb{C}} (A_{p,t}\psi))$, où ι^* est l'image inverse de l'application $\iota : (p, t) \mapsto (p, t, p, t)$.

2. Donc $K \cap \mathbb{C}\langle t, \partial_t \otimes 1 + 1 \otimes \partial_t \rangle$ ne se réduit pas à $\{0\}$.
3. Tout élément de K est atteint un jour.

Passage du cas symétrique au cas classique

Trois morphismes **préservant l'holonomie** :

1. dilatation $\phi \mapsto \phi(p_1, 2p_2, \dots, np_n)$: $\tau : (p_i, \partial_i) \mapsto (ip_i, i^{-1}\partial_i)$

2. transformée de Laplace formelle $\phi \mapsto \int e^{-pq} \phi(p) dq$:
 $\mathcal{F} : (p_i, \partial_i) \mapsto (-\partial_i, p_i)$

3. adjonction usuelle : $(p_i, \partial_i) \mapsto (p_i, -\partial_i)$

$\diamond =$ adjonction symétrique = adjonction classique $\circ \mathcal{F} \circ \tau = \star \circ \mathcal{F} \circ \tau$

$$(p_i, \partial_i) \mapsto (i\partial_i, i^{-1}p_i).$$

En conséquence, ϕ holonome implique $(A_{p,t}\phi)^\diamond$ holonome.

Autres applications de l'algorithme

Conjecture : Le nombre $y_{n,k}$ de tableaux de Young k -uniformes de taille n admet l'**estimation asymptotique**

$$y_{n,k} \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{e^{k-2}}{2\pi} \right)^{k/4} n!^{k/2-1} \left(\frac{k^{k/2}}{k!} \right)^n \frac{\exp(\sqrt{kn})}{n^{k/4}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

(Preuves pour $k = 1, 2$; constantes conjecturales pour $k = 3, 4$; cas général pourrait être prouvé par la méthode de MacKay.)

Proposition : Le **produit de Kronecker** (donné par $p_\lambda * p_\mu = \delta_{\lambda,\mu} z_\lambda p_\lambda$) de la somme des fonctions de Schur avec elle-même est

$$\left(\sum_{\lambda} s_{\lambda} \right) * \left(\sum_{\lambda} s_{\lambda} \right) = \exp \left(\sum_{n \geq 1} \frac{p_{2n-1}}{(2n-1)(1-p_{2n-1})} \right) \left(\prod_{n \geq 1} (1-p_n^2) \right)^{-1/2}.$$