

Intégrales de matrices et comptage de cartes

Jérémie Bouttier

Service de Physique Théorique, CEA Saclay

Séminaire ALGO – 26 Avril 2004

Plan

Diagrammes de Feynman

La méthode du col

La méthode des polynômes orthogonaux

Conclusion

Plan

Diagrammes de Feynman

La méthode du col

La méthode des polynômes orthogonaux

Conclusion

Intégrales gaussiennes

Soit

$$\mathcal{I}(A, b) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} d^n x \exp\left(-\frac{1}{2} {}^t x \cdot A \cdot x + {}^t b \cdot x\right)$$

avec

- ▶ A matrice $n \times n$ symétrique réelle définie positive
- ▶ b vecteur-colonne de taille n .

Alors

$$\mathcal{I}(A, b) = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det A}} \exp\left(\frac{1}{2} {}^t b \cdot A^{-1} \cdot b\right)$$

Corrélations de variables gaussiennes

$$\begin{aligned}\langle x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_{2k}} \rangle_A &\equiv \mathcal{I}(A, 0)^{-1} \int d^n x \, x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_{2k}} e^{-\frac{1}{2} {}^t x \cdot A \cdot x} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial b_{i_1}} \frac{\partial}{\partial b_{i_2}} \cdots \frac{\partial}{\partial b_{i_{2k}}} e^{\frac{1}{2} {}^t b \cdot A^{-1} \cdot b} \right) \Big|_{b=0}\end{aligned}$$

Théorème de Wick :

$$\langle x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_{2k}} \rangle_A = \sum (A^{-1})_{i_{j_1}, i_{j_2}} (A^{-1})_{i_{j_3}, i_{j_4}} \cdots (A^{-1})_{i_{j_{2k-1}}, i_{j_{2k}}}$$

où \sum porte sur les $(2k-1)!!$ appariements
 $\{\{j_1, j_2\}, \{j_3, j_4\}, \dots, \{j_{2k-1}, j_{2k}\}\}$ de $\{1, 2, \dots, 2k\}$.

Ex:

$$\langle x_{i_1} x_{i_2} \rangle_A = A_{i_1, i_2}^{-1} \quad \langle x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4} \rangle_A = A_{i_1, i_2}^{-1} A_{i_3, i_4}^{-1} + A_{i_1, i_3}^{-1} A_{i_2, i_4}^{-1} + A_{i_1, i_4}^{-1} A_{i_2, i_3}^{-1}$$

Théorie de perturbations (mécanique statistique)

- ▶ $x \Leftrightarrow$ état du système
- ▶ $e^{-\frac{1}{2}t x \cdot A \cdot x} \Leftrightarrow$ poids de Boltzmann gaussien
($\frac{1}{2}t x \cdot A \cdot x \Leftrightarrow \frac{\text{énergie cinétique} + \text{potentiel harmonique}}{\text{température}}$)
- ▶ $\int d^n x \Leftrightarrow$ moyenne sur les états du système

On introduit une « perturbation » non-gaussienne : V polynôme ou série formelle en x . Fonction de partition :

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}(A, V) &\equiv \mathcal{I}(A, 0)^{-1} \int d^n x e^{-\frac{1}{2}t x \cdot A \cdot x + V(x)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \langle V(x)^k \rangle_A\end{aligned}$$

\Rightarrow développer $V(x)^k$ en monômes, sommer sur les appariements des x deux à deux (Wick)...

Règles de Feynman

Les termes du développement perturbatifs sont représentés par des diagrammes (de Feynman).

- ▶ sommet \Leftrightarrow monôme de V $\left(\text{ex: } x_1^2 x_2 x_3 \Leftrightarrow \begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \diagdown \quad / \\ \bullet \\ / \quad \diagdown \\ 2 \quad 3 \end{array} \right)$
- ▶ arête $i-j \Leftrightarrow$ appariement (A_{ij}^{-1})
- ▶ poids combinatoire (*facteur de symétrie*)

$\mathcal{Z}(A, V)$ correspond à la somme sur tous les diagrammes.

$\log \mathcal{Z}(A, V)$ correspond à la somme sur les diagrammes connexes.

Intégrales matricielles

$x \rightarrow M$ matrice hermitienne $N \times N$ (dimension $n = N^2$).

La mesure de Dyson

$$\mathcal{D}_N M = \prod_{i \leq j} d(\operatorname{Re} M_{ij}) \prod_{i < j} d(\operatorname{Im} M_{ij})$$

est invariante par $M \mapsto \Omega M \Omega^{-1}$, $\Omega \in \mathrm{U}(N)$.

La forme quadratique $M \mapsto \operatorname{Tr} M^2$ est aussi $\mathrm{U}(N)$ -invariante.

$$\begin{aligned} \langle M_{ij} M_{kl} \rangle_0 &\equiv (2\pi\lambda)^{-N^2/2} \int \mathcal{D}_N M M_{ij} M_{kl} e^{-\frac{\lambda}{2} \operatorname{Tr} M^2} \\ &= \frac{\delta_{il} \delta_{jk}}{\lambda} \end{aligned}$$

Intégrales matricielles (2)

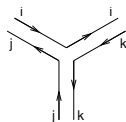
On introduit la perturbation $\text{Tr } V(M)$ avec $V(x) = \sum g_k \frac{x^k}{k}$.

Règles de Feynman :

- ▶ sommets (vertex)

$$\text{ex : } \text{Tr } M^3 = \sum_{ijk} M_{ij} M_{jk} M_{ki}$$

\Leftrightarrow



- ▶ arêtes

$$\langle M_{ij} M_{kl} \rangle_0 \propto \delta_{il} \delta_{jk}$$

\Leftrightarrow



- ▶ faces : boucles d'indices (conservés)

Les diagrammes sont des « fatgraphs » dessinables sur des surfaces orientables (\Leftrightarrow cartes).

Modèle à une matrice

$$\mathcal{Z}_N[t, \{g\}] \equiv \mathcal{N} \int \mathcal{D}_N M \exp N \operatorname{Tr} \left(-\frac{M^2}{2t} + \sum_k g_k \frac{M^k}{k} \right)$$

(\mathcal{N} tel que $\mathcal{Z}_N[t, \{0\}] = 1$)

$F_N \equiv \log \mathcal{Z}_N$ compte les diagrammes connexes (cartes) avec poids :

- ▶ $N g_k$ par vertex de degré k
- ▶ t/N par arête
- ▶ N par face (indices libres)
- ▶ facteur de symétrie

NB: le facteur de symétrie est éliminé en considérant $2t \partial_t F_N$ (cartes enracinées).

Développement en genre

$$\begin{aligned}\text{Exposant de } N : & \quad (\# \text{ vertex}) - (\# \text{ arêtes}) + (\# \text{ faces}) \\ & = \text{caractéristique d'Euler-Poincaré} \\ & = 2 - 2 \times \text{genre}\end{aligned}$$

Pour $N \rightarrow \infty$ les diagrammes « dominants » sont les cartes planaires.

$$F_N = N^2 F^{(0)} + F^{(1)} + \frac{1}{N^2} F^{(2)} + \dots$$

(t'Hooft)

Modèles à plusieurs matrices

Plus généralement des intégrales sur p matrices du type

$$\int \mathcal{D}_N M^{(1)} \dots \mathcal{D}_N M^{(p)} \exp N \operatorname{Tr} \left(-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^p q_{ij} M^{(i)} M^{(j)} + V(M) \right)$$

permettent de compter des cartes à demi-arêtes colorées (poids $(q^{-1})_{ij}$ par arête $i-j$).

Ex: modèle d'Ising sur cartes tétravalentes

$$\int \mathcal{D}_N A \mathcal{D}_N B e^{N \operatorname{Tr} \left(-\frac{A^2}{2} - \frac{B^2}{2} + cAB + g_+ \frac{A^4}{4} + g_- \frac{B^4}{4} \right)}$$

Plan

Diagrammes de Feynman

La méthode du col

La méthode des polynômes orthogonaux

Conclusion

Modèle à une matrice

$$\mathcal{Z}_N[t, \{g\}] \propto \int \mathcal{D}_N M e^{N \text{Tr} \Phi(M)}$$

avec $\Phi(M) \equiv -\frac{M^2}{2t} + \sum g_k \frac{M^k}{k}$

Pour $N \rightarrow \infty$ on s'attend à une contribution dominante au voisinage du « col » $-\frac{M_c}{t} + V'(M_c) = 0$.

Il existe une infinité de cols ! (invariance $U(N)$).

Idée : réduire l'intégrale matricielle en une intégrale sur les N valeurs propres de M .

Réduction aux valeurs propres

Diagonalisation :

$$M = U^\dagger \Lambda U, \quad U^\dagger U = 1, \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N), \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

Par le changement de variable $M \rightarrow (\Lambda, U)$

$$\mathcal{D}_N M = \mathcal{D}U \prod_i d\lambda_i \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)^2$$

Le modèle à une matrice se réécrit

$$\mathcal{Z}_N[t, \{g\}] \propto \int d\lambda_1 \cdots d\lambda_N e^{-N^2 S[\Lambda]}$$

avec $S[\Lambda] = \frac{1}{N} \sum_i \Phi(\lambda_i) - \frac{2}{N^2} \sum_{i < j} \ln |\lambda_i - \lambda_j|$

Équations de col

$$\Phi'(\lambda_i) - \frac{2}{N} \sum_{j \neq i} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} = 0$$

La *résolvante* $\omega(z) \equiv \frac{1}{N} \sum_i \frac{1}{z - \lambda_i}$ vérifie

$$\begin{aligned} \omega(z)^2 + \frac{\omega'(z)}{N} &= \frac{2}{N^2} \sum_{i \neq j} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} \frac{1}{z - \lambda_i} \\ &= \Phi'(z) \omega(z) - P(z), \quad P(z) \equiv \frac{1}{N} \sum_i \frac{\Phi'(z) - \Phi'(\lambda_i)}{z - \lambda_i} \end{aligned}$$

Dans la limite $N \rightarrow \infty$:

$$\boxed{\omega(z)^2 = \Phi'(z) \omega(z) - P(z)}$$

« One-cut hypothesis »

Pour N grand

$$\omega(z) = \frac{1}{N} \langle \text{Tr}(z - M)^{-1} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\langle \text{Tr} M^l \rangle}{z^{l+1}}$$

Hypothèse : les valeurs propres de M s'accumulent continûment sur un intervalle $[a, b]$ (contenant 0).

$\omega(z)$ est analytique sauf sur $[a, b]$ (coupure).

$$\begin{aligned} \omega(z) &= \frac{1}{2} \left(\Phi'(z) - \sqrt{\Phi'(z)^2 - 4P(z)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\Phi'(z) - \tilde{P}(z) \sqrt{(z-a)(z-b)} \right) \end{aligned}$$

a, b, \tilde{P} déterminés par la condition $\omega(z) \sim \frac{1}{z}$ pour $z \rightarrow \infty$.

Solution du modèle à une matrice

$$\omega(z) = \frac{\sqrt{(z-a)(z-b)}}{2} [z^{<0}] \left(\frac{\Phi'(z)}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} \right)$$

Par le changement de variable

$$z = Q(\sigma) \equiv \sigma + S + \frac{R}{\sigma} \quad \text{t.q. } (z-a)(z-b) = \left(\sigma - \frac{R}{\sigma}\right)^2$$

on déduit les équations (Bender-Canfield, J.B. *et al*)

$$[z^0]\omega(z) = 0 = \frac{S}{t} - [\sigma^0] \left(\sum_k g_k Q(\sigma)^k \right)$$

$$[z^{-1}]\omega(z) = 1 = \frac{R}{t} - [\sigma^{-1}] \left(\sum_k g_k Q(\sigma)^k \right)$$

Solution du modèle à une matrice (2)

R, S sont ainsi déterminés en tant que série formelle en t, g_k .

La série génératrice des cartes enracinées est :

$$R + S^2 - (2S[\sigma^{-2}] + [\sigma^{-3}]) \left(\sum_k g_k Q(\sigma)^k \right)$$

Ex : nombre de cartes cubiques enracinées (\leftrightarrow triangulations) :

$$\frac{2^{2n+1}}{(n+2)!} (n+2)(n+4)(n+6) \cdots (3n-2)(3n)$$

(formule d'inversion de Lagrange pour $g_k = \delta_{k,3}$)

Plan

Diagrammes de Feynman

La méthode du col

La méthode des polynômes orthogonaux

Conclusion

Modèle à une matrice

$$\mathcal{Z}_N \propto \int \mathcal{D}_N M e^{N \text{Tr} \Phi(M)} \propto \int d\lambda_1 \cdots d\lambda_N \Delta^2(\Lambda) e^{-N \sum_i \Phi(\lambda_i)}$$

avec $\Delta = \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)$ déterminant de Vandermonde.

Pour toute famille de polynômes $\{p_i\}$ (p_i unitaire de degré $i - 1$) :

$$\Delta(\Lambda) = \det_{1 \leq i, j \leq N} p_i(\lambda_j)$$

$$\mathcal{Z}_N \propto \det_{1 \leq i, j \leq N} (p_i, p_j), \quad (p, q) \equiv \int d\lambda p(\lambda) q(\lambda) e^{-N\Phi(\lambda)}$$

Pour $(p_i, p_j) = h_i \delta_{ij}$ (polynômes orthogonaux) :

$$\mathcal{Z}_N \propto \prod_{i=1}^N h_i$$

Modèle à deux matrices

$$\mathcal{Z}_N^{(2)} \propto \int \mathcal{D}_N A \mathcal{D}_N B e^{N \text{Tr}(AB + V_1(A) + V_2(B))}$$

Réduction aux valeurs propres par intégrale HCIZ :

$$\int_{\text{U}(N)} \mathcal{D}U e^{\text{Tr} U^\dagger a U b} \propto \frac{\det_{ij} e^{a_i b_j}}{\Delta(a)\Delta(b)}$$

Pour toute famille $\{p_i, q_i\}$ de polynômes unitaires (degré $i - 1$) :

$$\mathcal{Z}_N^{(2)} \propto \det_{1 \leq i, j \leq N} (p_i, q_j) \quad (p, q) \equiv \int da db p(a)q(b) e^{N(ab + V_1(a) + V_2(b))}$$

Pour $(p_i, q_j) = h_i \delta_{ij}$ (polynômes bi -orthogonaux) :

$$\mathcal{Z}_N^{(2)} \propto \prod_{i=1}^N h_i$$

Relations de récurrence

Cas de 1 matrice : les polynômes orthogonaux vérifient

$$\lambda p_i(\lambda) = p_{i+1}(\lambda) + S_i p_i(\lambda) + R_i p_{i-1}(\lambda), \quad R_i = \frac{h_i}{h_{i-1}}$$
$$p'_i(\lambda) = (i-1)p_{i-1}(\lambda) + o(\lambda^{i-2})$$

En écrivant pour $i = j$, $i = j + 1$:

$$(p'_i, p_j) + (p_i, p'_j) = N(\Phi'(\lambda)p_i, p_j)$$

on obtient des relations de récurrence déterminant les R_i, S_j .

Ex: cartes tétravalentes $\left(\Phi(\lambda) = \frac{\lambda^2}{2t} - \frac{\lambda^4}{4} \right)$

$$S_i = 0, \quad \frac{(i-1)}{N} = \frac{R_i}{t} - R_i(R_{i+1} + R_i + R_{i-1})$$

Relations de récurrence (2)

Cas de 2 matrices : polynômes bi-orthogonaux $p_i(a), q_j(b)$

$$(p_i(a), q_j(b)) = \int da db p_i(a) q_j(b) e^{N(ab + V_1(a) + V_2(b))} = h_i \delta_{ij}$$

En écrivant pour diverses valeurs de i, j

$$(p'_i(a), q_j(b)) + N(p_i(a), b q_j(b)) + N(V'_1(a) p_i(a), q_j(b)) = 0$$

$$(p_i(a), q'_j(b)) + N(a p_i(a), q_j(b)) + N(p_i(a), V'_2(b) q_j(b)) = 0$$

on obtient des relations de récurrence déterminant les h_i

$$(\mathcal{Z}_N^{(2)}) \propto \prod_{i=1}^N h_i.$$

NB: pour des degrés de V_1, V_2 finis, il y a un nombre fini d'équations.

Limite planaire $N \rightarrow \infty$

Cas de 1 matrice : $\lambda p_i(\lambda) = p_{i+1}(\lambda) + S_i p_i(\lambda) + R_i p_{i-1}(\lambda)$

Hypothèse : pour $N \rightarrow \infty$, $\frac{i}{N} \rightarrow x$ (fixé), R_i, S_i tendent vers des fonctions lisses $R(x), S(x)$.

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{Z}_N \propto \prod_{i=1}^N h_i \\ R_i = \frac{h_i}{h_{i-1}} \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} F^{(0)} \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log \mathcal{Z}_N}{N^2} \\ = \int_0^1 dx (1-x) \log R(x) \end{array} \right.$$

Ex: cartes tétravalentes $R(x) = t(x + 3R(x)^2)$.

$$\begin{array}{l} \text{Cas général} \\ Q(\sigma) \equiv \sigma + S(x) + \frac{R(x)}{\sigma} \end{array} \implies \left\{ \begin{array}{l} 0 = \frac{S}{t} - [\sigma^0] \left(\sum_k g_k Q(\sigma)^k \right) \\ \color{red}{x} = \frac{R}{t} - [\sigma^{-1}] \left(\sum_k g_k Q(\sigma)^k \right) \end{array} \right.$$

Modèle d'Ising

$$\int \mathcal{D}_N A \mathcal{D}_N B e^{N \text{Tr} \left(-\frac{A^2}{2} - \frac{B^2}{2} + cAB + g_+ \frac{A^4}{4} + g_- \frac{B^4}{4} \right)}$$

Opérateurs Q_1, Q_2, P_1, P_2

$$(Q_1 p(a), q(b)) = (ap(a), q(b)) \quad (Q_2 p(a), q(b)) = (p(a), bq(b))$$

$$(P_1 p(a), q(b)) = (p'(a), q(b)) \quad (P_2 p(a), q(b)) = (p(a), q'(b))$$

Équations :

$$\frac{P_1}{N} - Q_1 + cQ_2 + g_+ Q_1^3 = 0$$

$$\frac{P_2}{N} - Q_2 + cQ_1 + g_- Q_2^3 = 0$$

$$Q_1 = \sigma + \alpha\sigma^{-1} + \beta\sigma^{-3} \quad \frac{P_1}{N} = x\sigma^{-1} + \dots$$

$$Q_2 = \gamma\sigma^3 + \delta\sigma + R\sigma^{-1} \quad \frac{P_2}{N} = \frac{x\sigma}{R} + \dots$$

Plan

Diagrammes de Feynman

La méthode du col

La méthode des polynômes orthogonaux

Conclusion

Conclusion

- ▶ Les intégrales matricielles sont un outil très puissant pour la modélisation et l'énumération de cartes.
- ▶ De nombreux aspects sont non-traités ici :
 - ▶ méthode des équations de boucles (modèle de Potts, genres plus élevés)
 - ▶ connexions avec autres domaines : matrices aléatoires, équations différentielles intégrables, géométrie algébrique, combinatoire bijective, physique (gravité quantique)
- ▶ Références :
 - ▶ Brézin, Itzykson, Parisi, Zuber (1978)
 - ▶ modèle d'Ising : Boulatov, Kazakov (1987)
 - ▶ revues : Di Francesco, Ginsparg, Zinn-Justin (1992); Zvonkin (1997); Eynard (2001)