Équations linéaires

à deux variables catalytiques

ou

Sur quelques arbres de génération à deux étiquettes

Mireille Bousquet-Mélou, CNRS, LaBRI,

Bordeaux

Énumération : d'un extrême à l'autre

Description récursive

→ équation fonctionnelle définissant la série génératrice

→ expression explicite de la série, de la suite de nombres, comportement asymptotique...

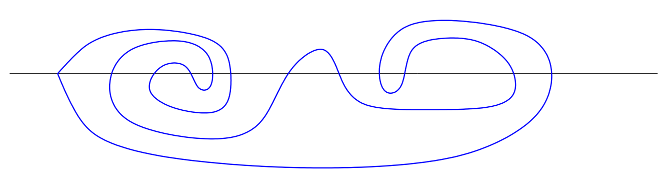
Exemples : chemins de Dyck, animaux dirigés (séries algébriques)

Graphes étiquetés, arbres croissants...

Structures décomposables simples

Pas de description récursive, pas de structure manifeste.

Exemples : chemins sans intersection, méandres...



Une situation intermédiaire

• La structure récursive contraint à prendre en compte un nombre fini de nouveaux paramètres pour pouvoir écrire une équation.

$\Rightarrow$ Série génératrice multivariée $F(t; u, v, \ldots)$.

Les variables u et v sont dites catalytiques [Zeilberger].

• La combinatoire est faite, mais l'équation est parfois étrange.

Que dire de $F(t; 1, 1, \ldots)$? De ses coefficients ?

Séries algébriques, séries différentiellement finies

- La série $F(t,u,v)$ est algébrique s'il existe un polynôme non nul P tel que

$$P(F,t,u,v)=0.$$

- Elle est différentiellement finie (ou : holonome) si elle satisfait trois équations différentielles linéaires à coefficients polynomiaux (une par variable) :

$$P_0(t,u,v)F(t,u,v)+P_1(t,u,v)\frac{\partial F}{\partial t}(t,u,v)+\cdots+P_k(t,u,v)\frac{\partial^k F}{\partial t^k}(t,u,v)=0,$$

plus deux autres équations où les dérivées sont prises par rapport à u et v.

- Toute série algébrique est différentiellement finie.

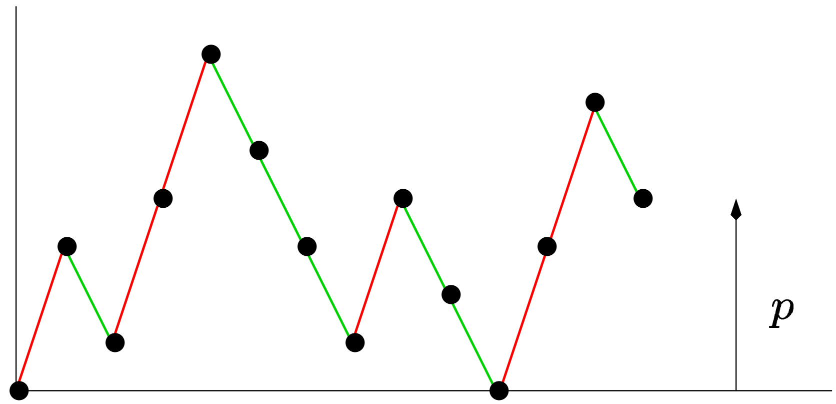
Pour Philippe

$$t := z$$

Chemins sur une demi-droite

Pas $+3$ et -2

$$D(t;u) \equiv D(u) = \sum_\omega t^{\ell(\omega)} u^{p(\omega)}$$



• Construction pas à pas :

$$D(u) = 1 + tu^3 D(u) + \frac{t}{u^2}(D(u) - D_0 - uD_1)$$

avec $\quad D_0 \equiv D_0(t) = [u^0]D(t;u) \quad$ et $\quad D_1 \equiv D_1(t) = [u^1]D(t;u).$

Soit encore

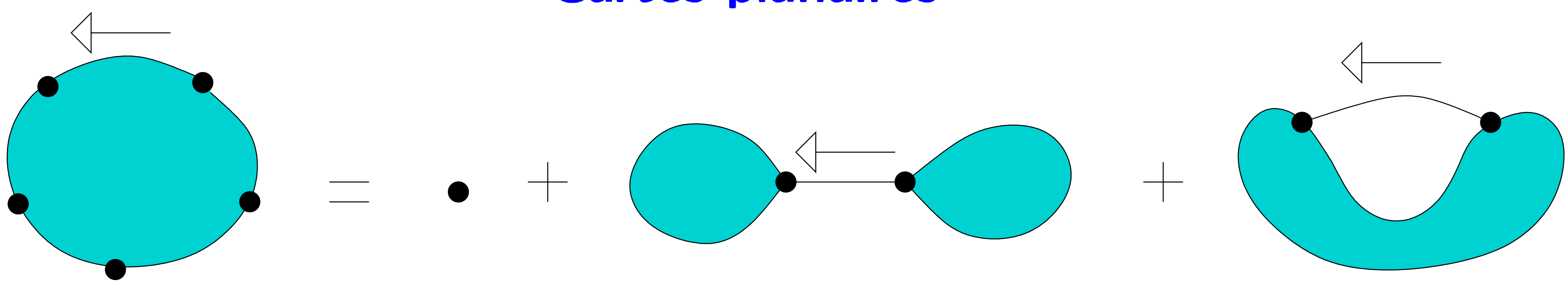
$$(u^2 - t(1+u^5))D(u) = u^2 - tD_0 - tuD_1.$$

• Méthode du noyau $\rightarrow$ solution algébrique de degré 10

$$D_0 = 1 + 2t^5 D_0^5 - t^5 D_0^6 + D_0^7 t^5 + t^{10} D_0^{10}$$

[MBM-Petkovšek 00,
Banderier-MBM-Denise-Flajolet-Gardy-Gouyou-Beauchamps 02]

Cartes planaires



Série génératrice (arêtes et degré de la face extérieure) :

$$C(t;u) \equiv C(u) = \sum_{C} t^{a(C)} u^{d(C)}$$

Suppression de l'arête racine :

$$C(u) = 1 + tu^2 C(u)^2 + tu \, \frac{uC(u) - C(1)}{u-1}.$$

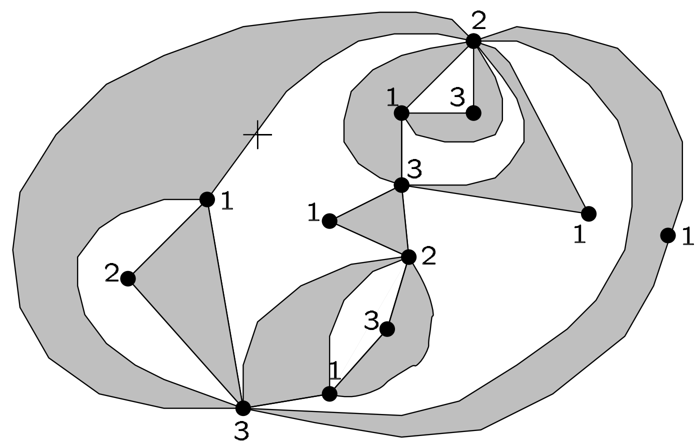
Méthode quadratique [Brown 65] : solution algébrique de degré 2

$$C(1) = 1 - 16t + 18tC(1) - 27t^2 C(1)^2$$

Un théorème en puissance

La solution d'une équation polynomiale à une variable catalytique est toujours algébrique [MBM 2005].

Exemple :
constellations triangulaires



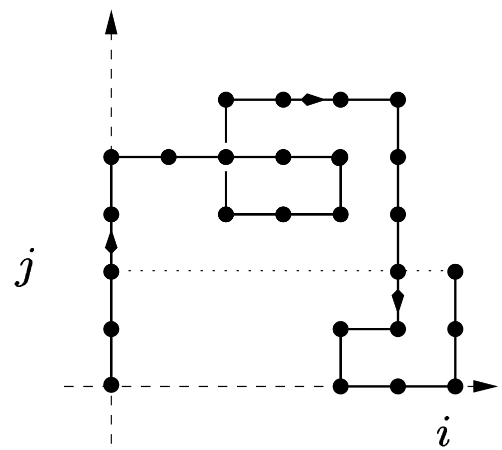
$$u) = 1+tuF(u)^3+tu\left(2F(u)+F(1)\right)\frac{F(u)-F(1)}{u-1}+tu\frac{F(u)-F(1)-(u-1)F'(1)}{(u-1)^2}$$

Solution algébrique de degré 3

$$F(1) = 1-47t+3t^2+(66t-27t^2)F(1)-9t(2-9t)F(1)^2-81t^2F(1)^3$$

Chemins dans un quart de plan

$$Q(t;u,v)=\sum_{\omega} t^{\ell(\omega)}u^{i(\omega)}v^{j(\omega)}$$



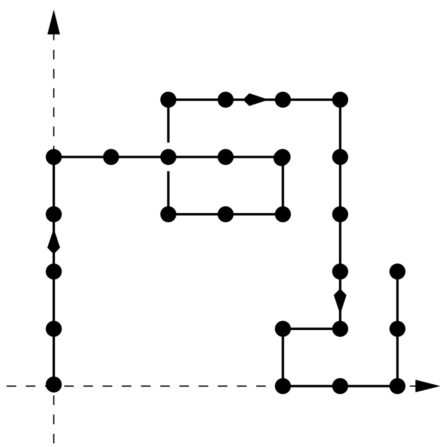
Construction pas à pas :

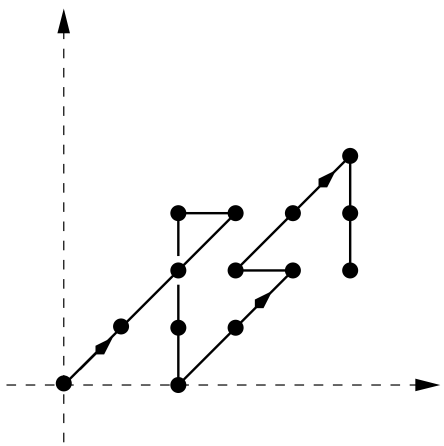
$$Q(u,v)=1+t(u+v)Q(u,v)+t\,\frac{Q(u,v)-Q(0,v)}{u}+t\,\frac{Q(u,v)-Q(u,0)}{v}$$

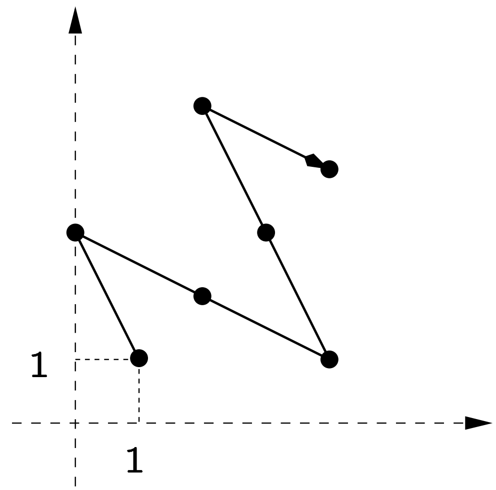
c'est-à-dire :

$$\left(uv-t(u+v)(1+uv)\right)Q(u,v)=uv-utQ(u,0)-vtQ(0,v).$$

Variations sur le thème







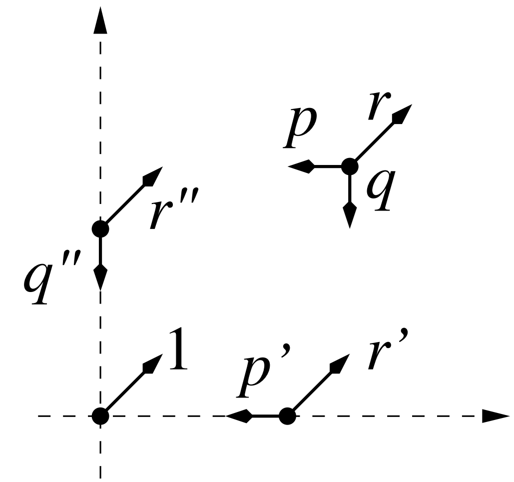
$$\left(uv - t(u+v)(1+uv)\right) Q(u,v) \;=\; uv - tuQ(u,0) - tvQ(0,v)$$

$$\Big(uv - t(u+v+u^2v^2)\Big) Q(u,v) \;=\; uv - tuQ(u,0) - tvQ(0,v)$$

$$\Big(uv - t(u^3+v^3)\Big) Q(u,v) \;=\; u^2v^2 - tu^3Q(u,0) - tv^3Q(0,v).$$

Chaînes de Markov dans un quart de plan

Probabilités
de transition



Question : trouver la ou les distribution(s) stationnaire(s) $(p_{i,j})_{i,j}$
[Fayolle, Iasnogorodski, Malyshev 99]

Équation fonctionnelle :

$$-p\bar{u}-q\bar{v}-ruv)P(u,v)+(1-p'\bar{u}-r'uv)P_1(u)+(1-q''\bar{v}-r''uv)P_2(v)+(1-uv)p_{0,0}=0$$

avec $\quad P(u,v)=\sum_{i,j\geqslant 1} p_{i,j}u^iv^j, \quad P_1(u)=\sum_{i\geqslant 1} p_{i,0}u^i, \quad P_2(v)=\sum_{j\geqslant 1} p_{0,j}v^j.$

Retour aux séries formelles : la loi de la chaîne

Soit $p_{i,j}(n)$ la probabilité qu'une trajectoire, partant de l'origine à l'instant 0, parvienne au point (i,j) à l'instant n. Alors

$$(1 - p\bar{u}t - q\bar{v}t - ruvt)P(u,v) + (1 - p'\bar{u}t - r'uvt)P_1(u)$$

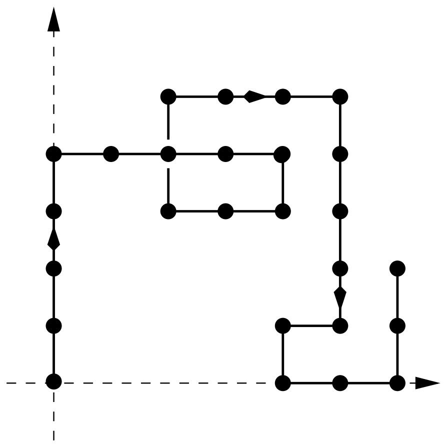
$$+(1 - q''\bar{v}t - r''uvt)P_2(v) + (1 - uvt)P_{0,0} = 1$$

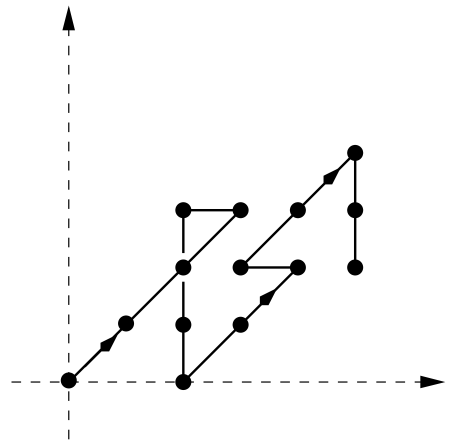
avec

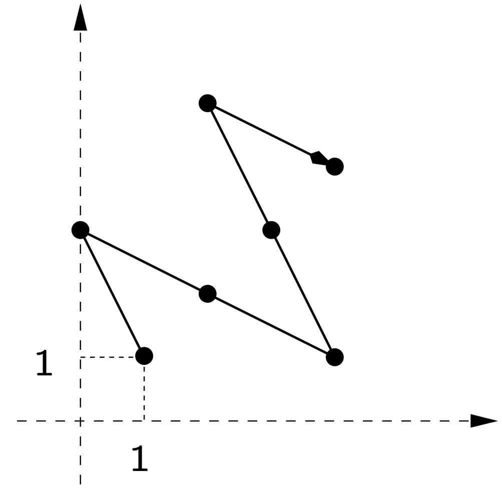
$$P(u,v) = \sum_{n,i,j>0} p_{i,j}(n)u^i v^j t^n, \quad P_{0,0} = \sum_{n\geqslant 0} p_{0,0}(n)t^n,$$

$$P_1(u) = \sum_{n,i>0} p_{i,0}(n)u^i t^n, \quad P_2(u) = \sum_{n,j>0} p_{0,j}(n)u^j t^n.$$

Des solutions de nature variée







D-finie et transcendante

$$(uv - t(u+v)(1+uv))\,Q(u,v) = uv - tuQ(u,0) - tvQ(0,v)$$

Algébrique

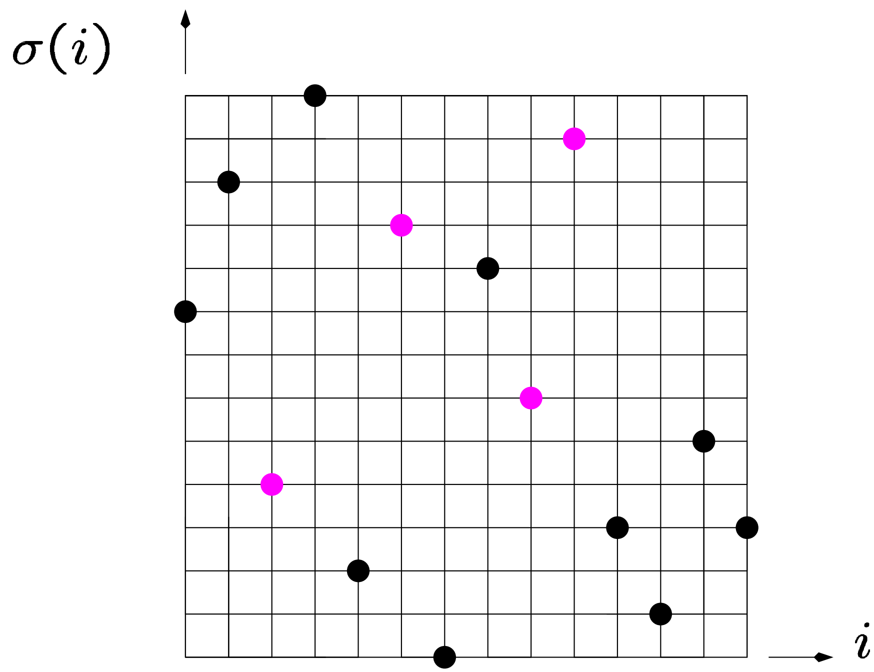
$$\Big(uv - t(u+v+u^2v^2)\Big)\,Q(u,v) = uv - tuQ(u,0) - tvQ(0,v)$$

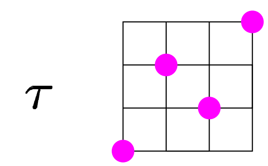
Pas D-finie (infinité de singularités)

$$\Big(uv - t(u^3+v^3)\Big)\,Q(u,v) = u^2v^2 - tu^3Q(u,0) - tv^3Q(0,v).$$

[MBM, Versailles 02]

Permutations à motifs exclus





La permutation $\sigma = 9.12.5.14.3.11.1.10.7.13.4.2.6.8$ contient le motif $\tau = 1324$.

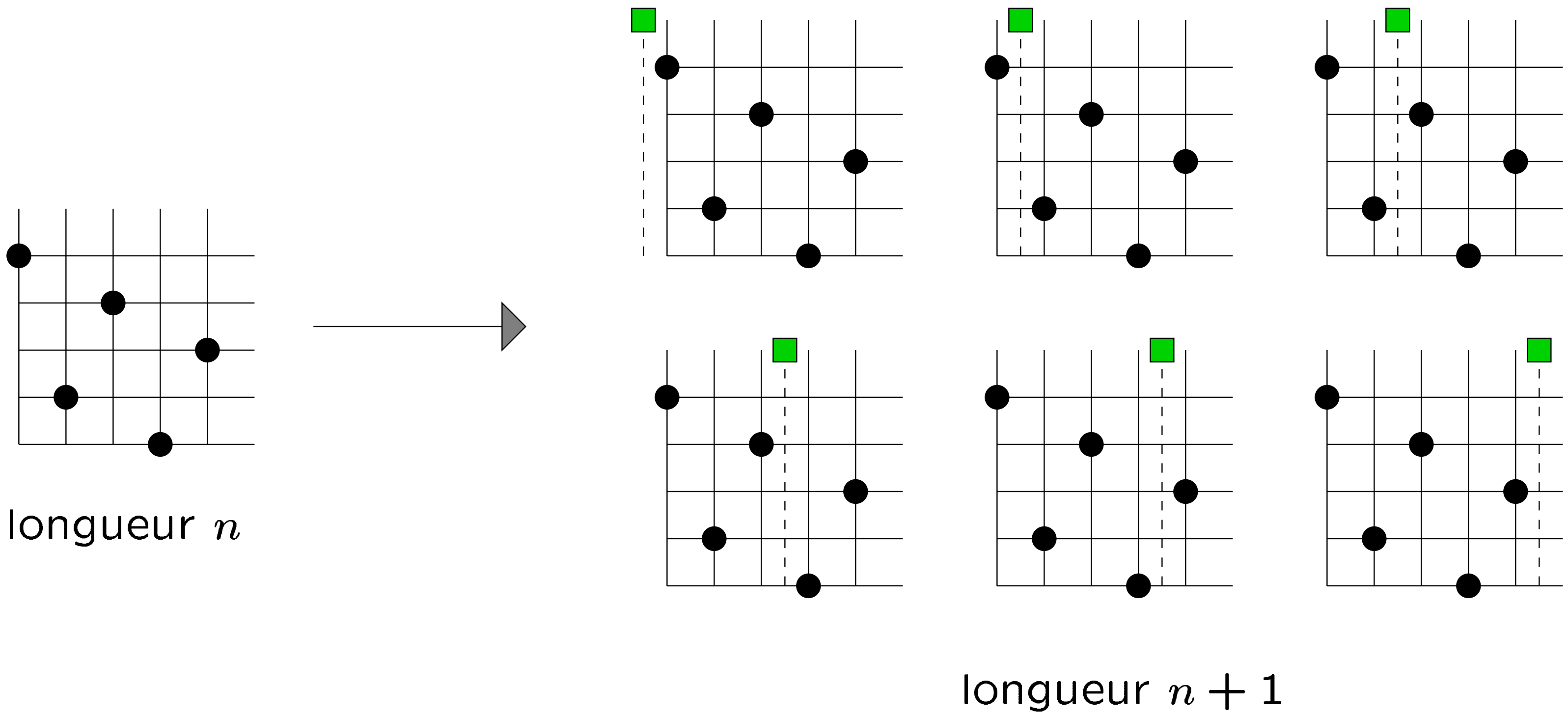
Soit $a_n(\tau)$ le nombre de permutations de $\mathcal{S}_n$ qui évitent le motif τ.

Conjecture : $a_n(\tau) \leqslant C^n$ pour une constante C qui dépend de τ [Stanley]

- Description récursive simple... au prix de l'ajout de quelques paramètres $\Rightarrow$ équation fonctionnelle à quelques variables catalytiques.

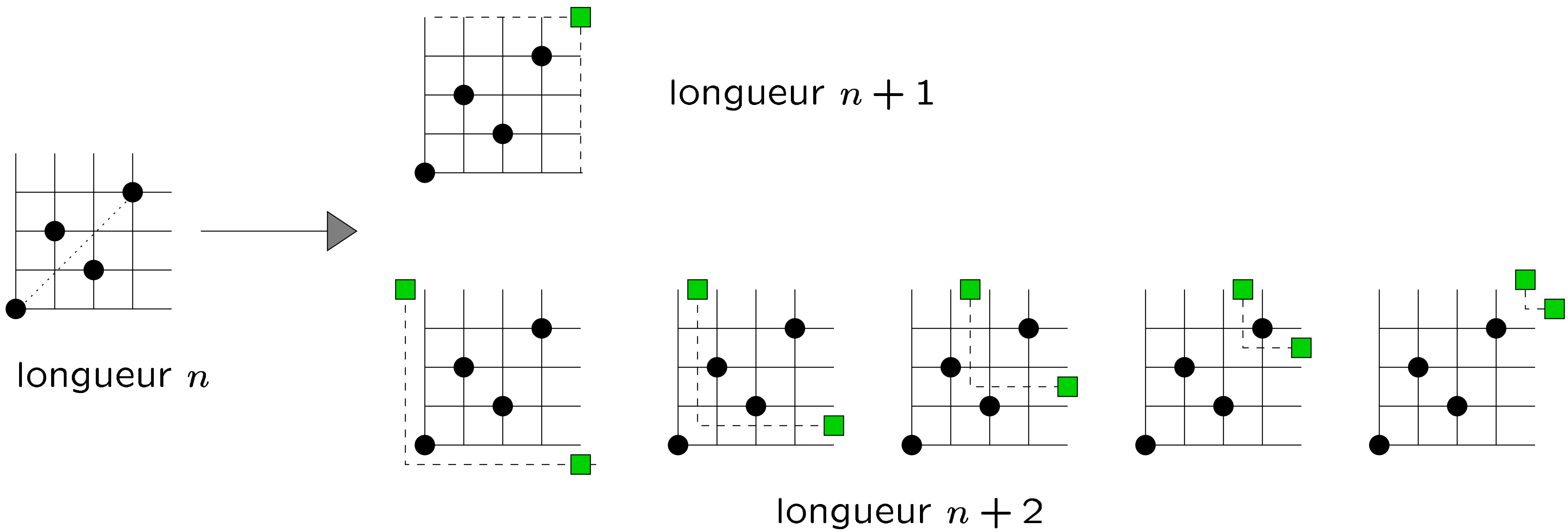
Exemple : involutions évitant 2143 (vexillaires)
1995 : structure récursive à deux paramètres catalytiques, et conjecture simple (Motzkin)
2001 : preuve ($\sim$ bijective) [Guibert-Pergola-Pinzani]

Construction récursive des permutations



Insertion de $(n+1)$ dans une permutation de longueur n.

Construction récursive des involutions



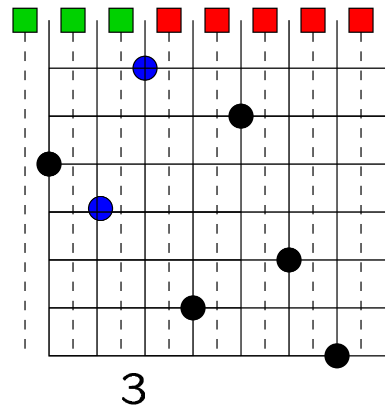
Insertion d'un point fixe ou d'un cycle de longueur 2.

Ex. 0 : Permutations évitant 123

insertion possible

insertion interdite

$p = 3$



Insertion avant la première montée.

Si p désigne la position de la première montée :

$$(p) \rightarrow (p+1), (2), (3), \ldots, (p)$$

Équation fonctionnelle pour les permutations évitant 123

Série génératrice :

$$G(t;u) \equiv G(u) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(123)} t^{\ell(\sigma)} u^{p(\sigma)}$$

$$(p) \to (p+1), (2), (3), \ldots, (p)$$

$$\begin{aligned} G(u) &= u + t \sum_{p \geqslant 1} G_p(t)(u^2 + \cdots + u^p + u^{p+1}) \\ &= u + tu^2 \, \frac{G(u) - G(1)}{u-1}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\left(1 + \frac{tu^2}{1-u}\right) G(u) = u + \frac{tu^2}{1-u} G(1).$$

La méthode du noyau

$$\left(1 + \frac{tu^2}{1-u}\right) G(u) = u + \frac{tu^2}{1-u} G(1).$$

- Le noyau $K(u) = 1 - u + tu^2$ a deux racines :

$$U_{0,1}(x) = \frac{1 \mp \sqrt{1-4t}}{2t}.$$

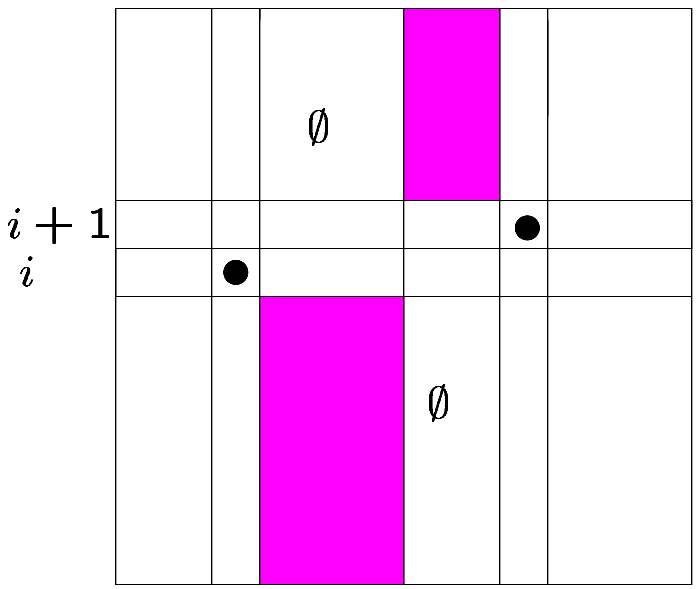
On a

$$U_0 = 1 + O(t) \qquad \text{et} \qquad U_1 = \frac{1}{t} + O(1).$$

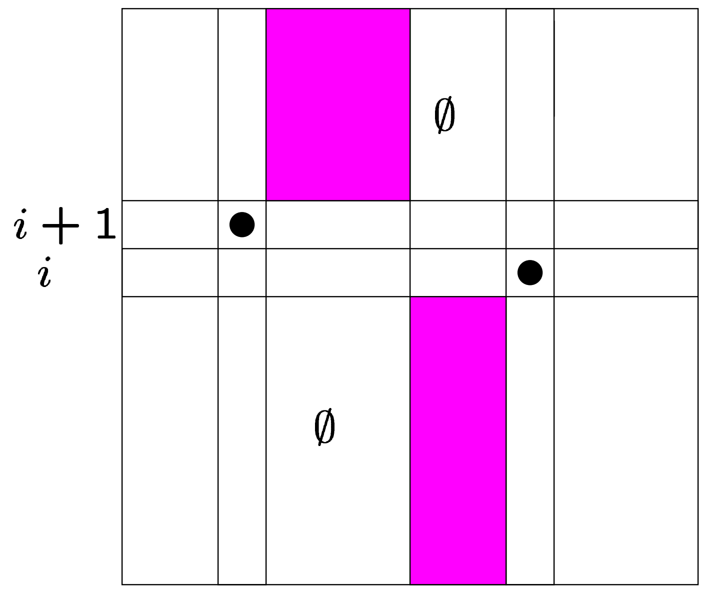
- On peut remplacer u par U_0 dans l'équation (mais pas par U_1) :

$$G(1) = U_0 \qquad \text{et} \qquad a_n(123) = C_n.$$

Ex. 1 : Permutations de Baxter



$\sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(i+1)$



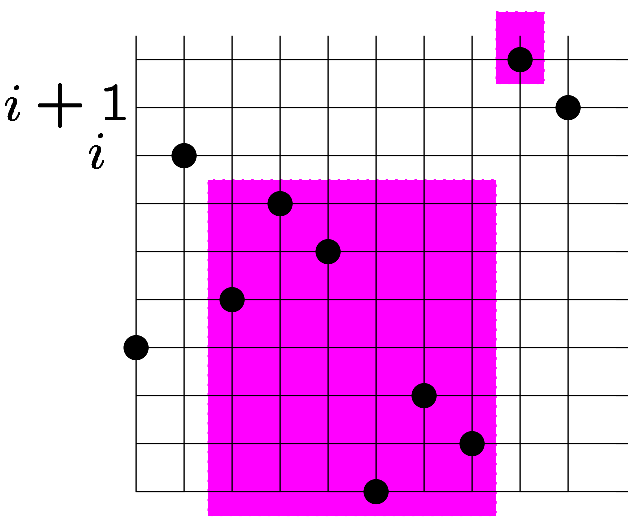
$\sigma^{-1}(i+1) < \sigma^{-1}(i)$

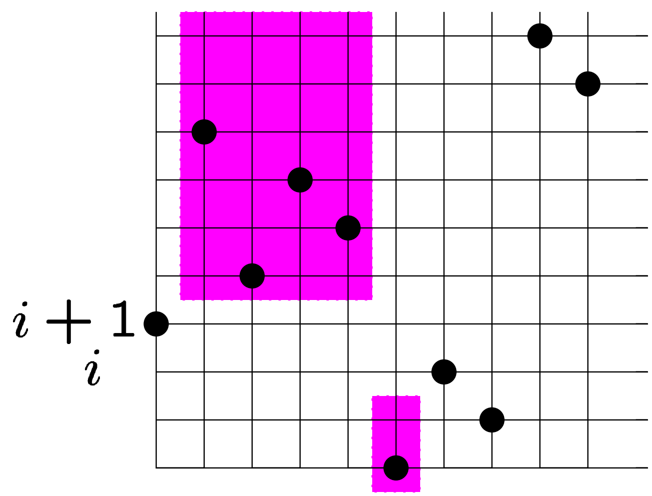
Pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, le mot σ s'écrit

$$\sigma = \pi \ i \ \pi_- \ \pi_+ \ (i+1) \ \pi' \quad \text{ou} \quad \sigma = \pi \ (i+1) \ \pi_+ \ \pi_- \ i \ \pi',$$

où toutes les lettres contenues dans π_+ (resp. π_-) sont plus grandes (resp. plus petites) que i.

Exemple





À voir

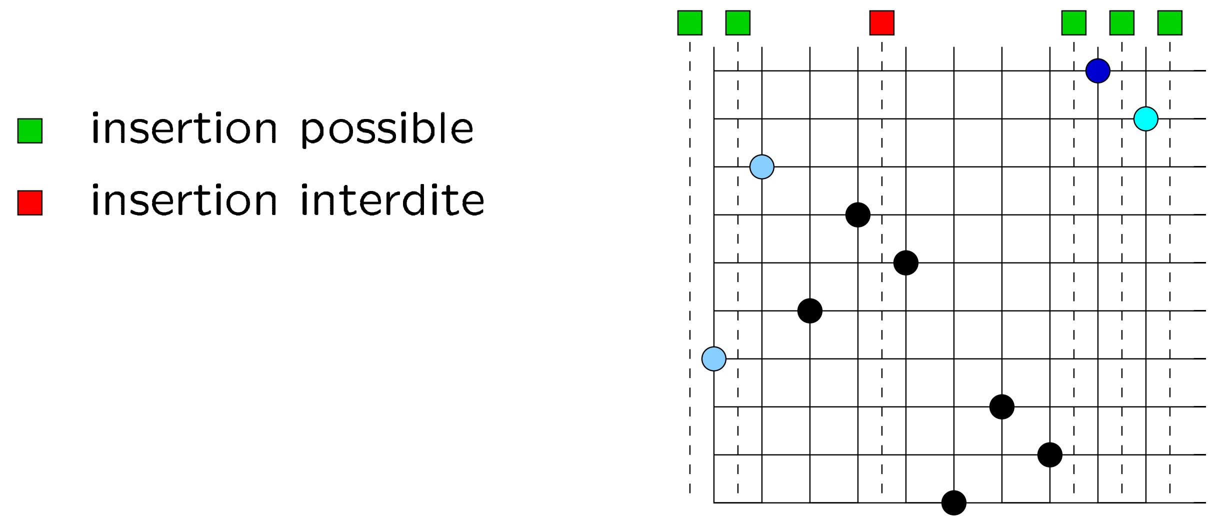
Le nombre de permutations de Baxter de longueur n est :

$$b(n) = \frac{2}{n(n+1)^2} \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k-1} \binom{n+1}{k} \binom{n+1}{k+1}.$$

La série $\sum_n b(n) t^n$ est D-finie.

[Chung-Graham-Hoggatt-Kleiman 78, Mallows 79, Viennot 81, Cori-Dulucq-Viennot 86, Dulucq-Guibert 96]

Construction récursive des permutations de Baxter



Insertion juste avant un élément saillant supérieur gauche (*ssg*) ou juste après un élément saillant supérieur droit (*ssd*).

S'il y a p éléments *ssg* et q éléments *ssd*, on obtient $p+q$ permutations de Baxter :

$$(p,q) \rightarrow \begin{cases} (1,q+1),(2,q+1),\ldots,(p,q+1) \\ (p+1,q),(p+1,q-1),\ldots,(p+1,1). \end{cases}$$

Équation fonctionnelle pour les permutations de Baxter

Série génératrice : $$G(t;u,v) \equiv G(u,v) = \sum_{\sigma\in\mathcal{B}} t^{\ell(\sigma)} u^{p(\sigma)} v^{q(\sigma)}$$

$$(p,q) \to \begin{cases} (1,q+1),(2,q+1),\ldots,(p,q+1) \\ (p+1,q),(p+1,q-1),\ldots,(p+1,1). \end{cases}$$

$$\begin{aligned} G(u,v) &= tuv + t\sum_{p,q\geqslant 1} G_{p,q}(t)\Big((u+u^2+\cdots+u^p)v^{q+1} \\ &\qquad\qquad + u^{p+1}(v^q+v^{q-1}+\cdots+v)\Big) \\ &= tuv + tuv\frac{G(u,v)-G(1,v)}{u-1} + tuv\frac{G(u,v)-G(u,1)}{v-1} \end{aligned}$$

$$\left(1+\frac{tuv}{1-u}+\frac{tuv}{1-v}\right)G(u,v) = tuv + \frac{tuv}{1-v}G(u,1) + \frac{tuv}{1-u}G(1,v).$$

Étape 1 : la méthode du noyau

- On pose $u = 1 + x$, $v = 1 + y$.

$$\frac{(1+x)(1+y)(x+y)t - xy}{t(1+x)(1+y)} G(1+x, 1+y) = R(x) + R(y) - xy$$

avec $R(x) = xG(1+x, 1)$.

- Le noyau $K(x,y) = (1+x)(1+y)(x+y)t - xy$ a deux racines :

$$Y_{0,1}(x) = \frac{1 - t(1+x)(1+\bar{x}) \mp \sqrt{1 - 2t(1+x)(1+\bar{x}) - t^2(1-x^2)(1-\bar{x}^2)}}{2t(1+\bar{x})}$$

avec $\bar{x} = 1/x$. On a

$$Y_0 = (1+x)t + O(t^2) \qquad \text{et} \qquad Y_1 = \frac{x}{1+x}\frac{1}{t} + O(1).$$

- On peut remplacer y par Y_0 dans l'équation (mais pas par Y_1) :

$$R(x) + R(Y_0) = xY_0.$$

- Cette équation définit $R(x)$ de façon unique parmi les séries en t à coefficients dans $x\mathbb{Q}[x]$.

Étape 2 : un peu d'obstination !

Soit (X,Y) une paire de séries qui annule le noyau. On définit $\Phi(X,Y)=(X',Y)$, où X' est l'autre solution de l'équation $K(x,Y)=0$. De même on définit $\Psi(X,Y)=(X,Y')$, où Y' est l'autre solution de $K(X,y)=0$. Les transformations Φ and Ψ sont des involutions, et l'orbite de (x,Y_0) sous leur action est finie :

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{(x,Y_0)} \arrow[dl, "\Phi"'] \arrow[dr, "\Psi"] & \\
\boxed{(\bar{x}Y_0,Y_0)} \arrow[d, "\Psi"'] & & (x,Y_1) \arrow[d, "\Phi"] \\
\boxed{(\bar{x}Y_0,\bar{x})} \arrow[dr, "\Phi"'] & & (\bar{x}Y_1,Y_1) \arrow[dl, "\Psi"] \\
 & (\bar{x}Y_1,\bar{x}) &
\end{tikzcd}$$

$Y_0Y_1=x$

Noyau symétrique en x et y

Étape 3 : on joue avec les équations

On a désormais trois équations:

$$\begin{cases} R(x) + R(Y_0) & = & xY_0, \\ R(\bar{x}Y_0) + R(Y_0) & = & \bar{x}Y_0^2 \\ R(\bar{x}Y_0) + R(\bar{x}) & = & \bar{x}^2 Y_0. \end{cases}$$

Combinaisons linéaires :

$$R(x) + R(\bar{x}) = \bar{x}^2 Y_0 (1 + x^3 - xY_0).$$

La série $R(x) = xG(1+x, 1)$ ne contient que des puissances strictement positives de x, tandis que $R(\bar{x})$ ne contient que des puissances strictement négatives de x. Donc

$$R(x) = (\bar{x}^2 Y_0 (1 + x^3 - xY_0))^{>}$$

La série $R(x) = xG(1 + x, 1)$ est la partie strictement positive (en x) d'une série algébrique (en t, à coefficients dans $\mathbb{Q}[x, \bar{x}]$) : elle est donc D-finie [Lipshitz 88].

Et un petit coup d'inversion de Lagrange...

La série Y_0 est définie par

$$Y_0 = t(1+\bar{x})(1+Y_0)(x+Y_0).$$

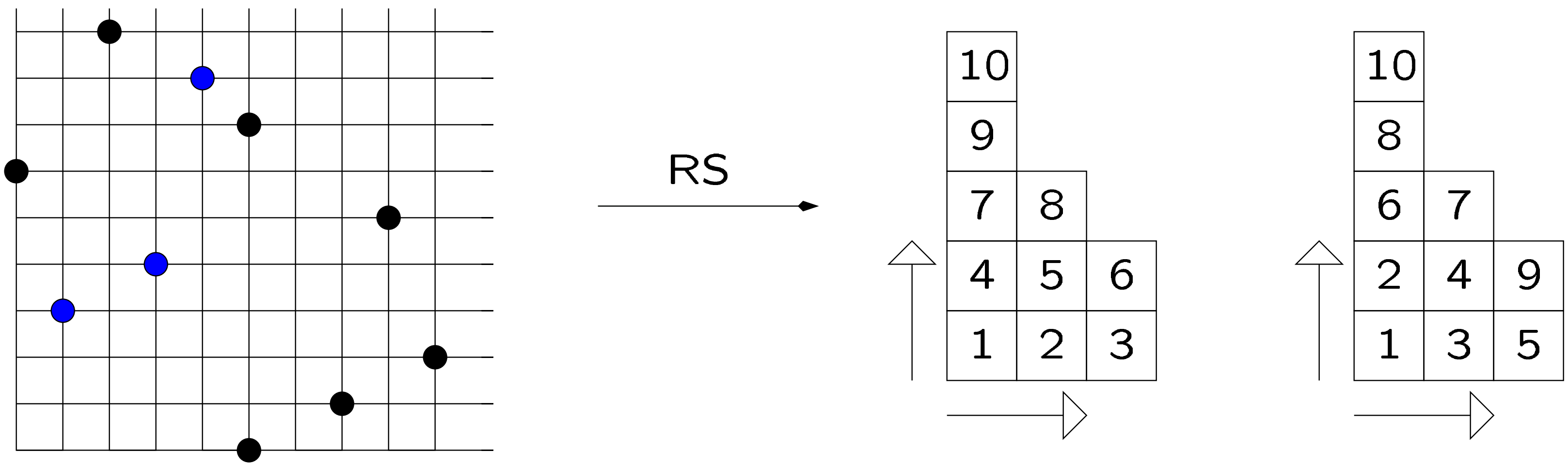
On a

$$R(x) = xG(1+x,1) = (\bar{x}^2 Y_0(1+x^3 - xY_0))^{>}.$$

Extraction du coefficient de x :

$$G(1,1) = \sum_{n\geqslant 1} t^n \frac{2}{n(n+1)^2} \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k-1}\binom{n+1}{k}\binom{n+1}{k+1}.$$

Ex. 2 : Permutations évitant 1234



Robinson-Schensted : $a_n(1234)$ est le nombre de paires de tableaux de Young de même forme et de largeur au plus 3.

Fonctions symétriques $\rightarrow$ formule déterminantale [Gessel 90, Stanley 99]

Interprétation combinatoire (chemins dans $\mathbb{Z}^d$) [Gessel-Weinstein-Wilf 98]

À voir :

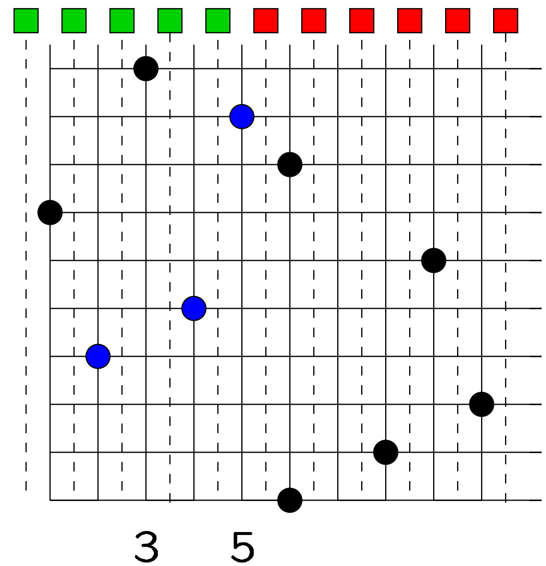
$$a_n(1234) = \frac{1}{(n+1)^2(n+2)} \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{n+1}{k+1}\binom{n+2}{k+1}.$$

Construction des permutations évitant 1234

■ insertion possible

■ insertion interdite

$q = 5,\ p = 3$



Insertion avant la fin de la première sous-suite croissante de longueur 3 (position q).

Si p désigne la position de la première montée :

$$(p,q) \rightarrow \begin{cases} (p+1,q+1),(2,q+1),\ldots,(p,q+1) \\ (p,p+1),(p,p+2),\ldots,(p,q). \end{cases}$$

Équation fonctionnelle pour les permutations évitant 1234

Série génératrice :

$$G(t;u,v) \equiv G(u,v) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(1234)} t^{\ell(\sigma)} u^{p(\sigma)} v^{q(\sigma)}$$

$$(p,q) \to \begin{cases} (p+1,q+1),(2,q+1),\ldots,(p,q+1) \\ (p,p+1),(p,p+2),\ldots,(p,q). \end{cases}$$

$$\left(1+\frac{tu^2v}{1-u}+\frac{tv}{1-v}\right)G(u,v) = uv + \frac{tv}{1-v}G(uv,1) + \frac{tu^2v}{1-u}G(1,v).$$

Remarque. Même équation pour l'énumération des permutations évitant 1243 et celles évitant 2143 [West 95]. Bijection avec les permutations évitant 4123 [Stankova 96].

Changement de variables

$$\left(1+\frac{tu^2v}{1-u}+\frac{tv}{1-v}\right)G(u,v)=uv+\frac{tv}{1-v}G(uv,1)+\frac{tu^2v}{1-u}G(1,v).$$

Poser $uv = w$

$$\left(1+\frac{tw^2}{v-w}+\frac{tv}{1-v}\right)G(w/v,v)=w+\frac{tv}{1-v}G(w,1)+\frac{tw^2}{v-w}G(1,v),$$

puis $w = 1+\bar{x}$ et $v = 1+y$:

$$\left(xy(1-xy)-t(x+y+3xy-x^2y^2)\right)G\left(\frac{1+\bar{x}}{1+y},1+y\right)$$

$$=y(1+x)(1-xy)-t(1+y)(1-xy)R(\bar{x})-t(x+1)^2S(y)$$

avec $R(\bar{x}) = xG(1+\bar{x},1)$ et $S(y) = yG(1,1+y)$.

Le noyau et ses racines

Le noyau $K(x,y) = xy(1-xy) - t(x+y+3xy-x^2y^2)$ est symétrique en x et y, et admet deux racines :

$$\begin{aligned} Y_0(x) &= \frac{1-t\bar{x}-3t-\sqrt{(1-t-t\bar{x})(1-5t-4tx-t\bar{x})}}{2x(1-t)}, \\ &= t+(\bar{x}+3+x)t^2+O(t^3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_1(x) &= \frac{1-t\bar{x}-3t+\sqrt{(1-t-t\bar{x})(1-5t-4tx-t\bar{x})}}{2x(1-t)}, \\ &= \bar{x}-(1+\bar{x})^2t+O(t^2). \end{aligned}$$

Les fonctions symétriques de Y_0 et Y_1 sont des polynômes en $\bar{x} = 1/x$:

$$Y_0+Y_1 = \frac{\bar{x}(1-t\bar{x}-3t)}{1-t} \qquad \text{et} \qquad Y_0Y_1 = \frac{t\bar{x}}{1-t}.$$

Le diagramme des racines

$$
\begin{tikzcd}
 & \boxed{(x,Y_0)} \arrow[dl, "\Phi"'] \arrow[dr, "\Psi"] & \\
\boxed{(Y_1,Y_0)} \arrow[d, "\Psi"'] & & \boxed{(x,Y_1)} \arrow[d, "\Phi"] \\
\boxed{(Y_1,x)} \arrow[dr, "\Phi"'] & & (Y_0,Y_1) \arrow[dl, "\Psi"] \\
 & (Y_0,x) &
\end{tikzcd}
$$

$$K(x,y) = K(y,x)$$

Les quatre équations

$$\left\{\begin{array}{rcrcl}
t(1+Y_0)(1-xY_0)R(\bar{x}) & + & t(1+x)^2S(Y_0) & = & Y_0(1+x)(1-xY_0), \\
t(1+Y_1)(1-xY_1)R(\bar{x}) & + & t(1+x)^2S(Y_1) & = & Y_1(1+x)(1-xY_1), \\
t(1+Y_0)(1-Y_1Y_0)R(\bar{Y}_1) & + & t(Y_1+1)^2S(Y_0) & = & Y_0(1+Y_1)(1-Y_1Y_0), \\
t(1+x)(1-Y_1x)R(\bar{Y}_1) & + & t(Y_1+1)^2S(x) & = & x(1+Y_1)(1-Y_1x).
\end{array}\right.$$

Élimination de $R(\bar{x})$ et $R(\bar{Y}_1)$ $\to$ deux équations liant $S(x), S(Y_0)$ et $S(Y_1)$.

Les fonctions symétriques de Y_0 et Y_1 ne contiennent que des puissances négatives de x :

$$Y_0 + Y_1 = \frac{\bar{x}(1 - t\bar{x} - 3t)}{1 - t} \qquad \text{et} \qquad Y_0 Y_1 = \frac{t\bar{x}}{1 - t}.$$

⇒ Par combinaison linéaire, on forme des équations où Y_0 et Y_1 jouent des rôles symétriques : une différence divisée,

$$\frac{(1 + Y_1)(1 - xY_1)S(Y_0) - (1 + Y_0)(1 - xY_0)S(Y_1)}{Y_0 - Y_1} = \frac{1 + \bar{x}}{1 - t}$$

et une brave somme,

$$t(x+1)((1+Y_1)(1-xY_1)S(Y_0)+(1+Y_0)(1-xY_0)S(Y_1)) =$$

$$2t(1+Y_0)(1+Y_1)(1-Y_0Y_1)S(x)-(1-xY_1)(2x-Y_0-Y_1-Y_0Y_1x-xY_0^2+2Y_0^2Y_1).$$

⇒ Extraction de la partie positive en x.

Le résultat

Soit $A(t;x)$ la série formelle en t suivante :

$$A(t;x) \equiv A(x) = \frac{\bar{x}^2(1-2t\bar{x}-t-x+xt)}{2(1-t-t\bar{x})}\sqrt{\frac{1-t\bar{x}-5t-4xt}{1-t-t\bar{x}}}.$$

Ses coefficients sont dans $\mathbb{Q}[x,\bar{x}]$, avec $\bar{x}=1/x$.
La série $G(t;1,v)$ qui compte les permutations évitant 1234 selon la longueur et la position du premier motif 123 satisfait

$$G(t;1,1+x) = 1+[x^0]A(x)+\frac{x}{t}A^{\geqslant}(x).$$

En particulier, $G(t;1,1) = 1+[x^0]A(x)$.

Inversion de Lagrange :

$$a_n(1234) = \frac{1}{(n+1)^2(n+2)}\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{n+1}{k+1}\binom{n+2}{k+1}.$$

Ex. 3 : Involutions vexillaires (évitant 2143)

- Équation fonctionnelle

$$\left(1+\frac{t^2u^2v}{1-u}+\frac{t^2v}{1-v}\right)G(u,v)=\frac{uv(1-t)}{1-uvt}+t\left(1+\frac{tv}{1-v}\right)G(uv,1)+\frac{t^2u^2v}{1-u}G(1,v).$$

cf. permutations évitant 1234

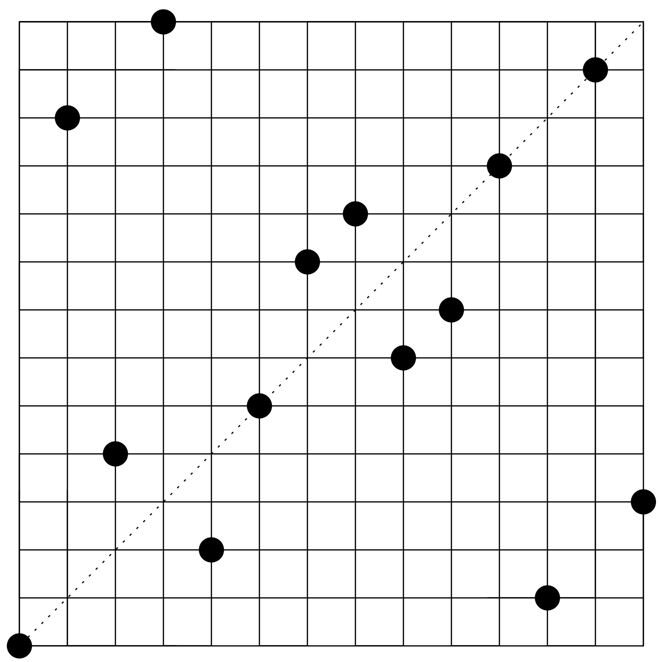
$$\left(1+\frac{tu^2v}{1-u}+\frac{tv}{1-v}\right)G(u,v)=uv+\frac{tv}{1-v}G(uv,1)+\frac{tu^2v}{1-u}G(1,v).$$

- Solution très simple : $G(u,v)$ est algébrique de degré 2

$$G(1,1)=\sum_{n\geqslant 0}t^n\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\binom{n}{k}.$$

Nombres de Motzkin [Guibert-Pergola-Pinzani 01]

Ex. 4 : Involutions évitant 54321



$\sigma = 1.12.5.14.3.6.9.10.7.8.11.2.13.4$

12	14					
5	9					
3	6	10				
1	2	4	7	8	11	13

Robinson-Schensted : tableaux de Young de hauteur au plus 4.
Solution combinatoire [Gouyou-Beauchamps 89]
Fonctions symétriques [Gessel 90, Stanley 99]

- Équation fonctionnelle

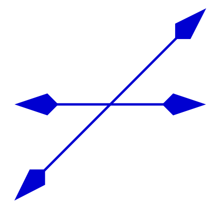
$$\left(1+\frac{t^2u^2v^2}{1-u}+\frac{t^2uv^2}{1-v}\right)G(u,v)=uv+\frac{t^2uv^2}{1-v}G(uv,1)+tuv\left(1+\frac{tuv}{1-u}\right)G(1,v).$$

Méthode du noyau “obstinée” + extraction d’une partie positive :

$$G(1,1) = \sum_{n \geqslant 0} t^n C_{\lceil n/2 \rceil} C_{1+\lfloor n/2 \rfloor}$$

Série génératrice des involutions sans sous-suite croissante de longueur 5.

D'autres jolies équations



$(1,0),(1,1)$

$(-1,0),(-1,-1)$

- Chemins dans un quart de plan

$$(uv-t(1+u)(1+v))Q(u,v) = uv-tQ(u,0)-t(1+v)Q(0,v)+tQ(0,0)$$

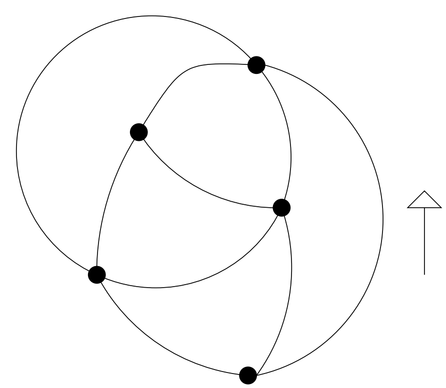
- Nombre de chemins finissant à l'origine :

$$\begin{aligned} a_{2n}(0,0) &= 4^n \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{(n+1)!} \frac{5.11\ldots(6n-1)}{5.8\ldots(3n-1)(3n+2)} \\ &= 4^{2n} \frac{\Gamma(5/3)}{\Gamma(1/2)\Gamma(5/6)} \frac{\Gamma(n+1/2)\Gamma(n+5/6)}{\Gamma(n+5/3)\Gamma(n+2)} \end{aligned}$$

D'autres jolies équations (suite)

- Le polynôme chromatique des triangulations

$$G(u,v) = \lambda(\lambda-1)v+\lambda^{-1}tuvG(u,1)G(u,v)+tv\,\frac{G(u,v)-G(0,v)}{u}$$
$$-tuv^2\,\frac{G(u,v)-G(u,1)}{v-1}$$



$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)^2$$

- Solution par Tutte (73-82) : soit $H(t)=t^2G(0,1)$; alors

$$H''(\lambda t+10H-6tH')+\lambda(4-\lambda)(20H+9t^2H''-18tH')+2\lambda^2t(1-\lambda) = 0.$$

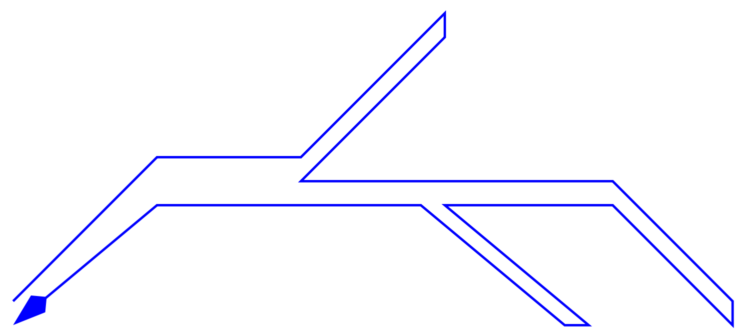
Série différentiellement algébrique

D'autres jolies équations (suite)

- Serpent brownien discret positif (ou cartes, ou arbres bien étiquetés)

$$S(u,v) = u + tuS(u,1)^2 + tuS(v,1)S(u,1) + tvS(u,1)\,\frac{S(u,v)-S(u,1)}{v-1}.$$

Solution algébrique



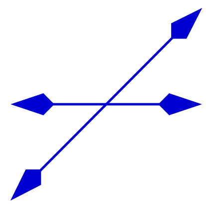
- q-analogue : somme des ordonnées de pas (distance cumulée à la racine, somme des étiquettes) :

$$S(t;u,v) = u + tuS(t;u,1)^2 + qtuS(tq;v,1)S(t;u,1) + tvS(t;u,1)\,\frac{S(t;u,v)-S(t;u,1)}{v-1}.$$

C'est fini

- Faut sys-té-ma-ti-ser (le cas linéaire ? le cas linéaire où le noyau est de degré au plus 2 ?)

- ... et d'abord, savoir traiter *tous* les exemples, cf.



$(1,0),(1,1)$

$(-1,0),(-1,-1)$

- d'autres exemples ?