

Statistique des évènements persistants : La mouche rattrapera-t-elle le coche ?

Avec Claude Godrèche et Jean-Marc Luck

Plan

- I** Le coche et la mouche
- II** Motivations
- III** Approche analytique
- IV** Approche combinatoire
- V** Limite continue

Modélisation de la fable

Chemin montant = Droite réelle

Mouche = Mobile aléatoire

Coche = Obstacle déterministe de vitesse
constante : v

Question : La mouche part vers l'arrière (par exemple), quelle est la probabilité qu'elle n'ait pas retrouvé le coche jusqu'au temps n , qu'elle ne retrouve jamais le coche ?

Persistance et grandes déviations

Stabilité des opinions électorales : fraction des gens qui votent pour le même parti depuis n scrutins ?

Dans un système magnétique, atomes \sim petits aimants qui interagissent entre eux et avec le milieu extérieur, et dont l'orientation, $\mathbf{M}_i(t)$, fluctue. La fraction des i tels que $\frac{1}{t} \int_0^t \mathbf{M}_i(\tau) d\tau \in \Omega$ pour $t \in [0, T]$ se comporte comme $t^{-\alpha(\Omega)}$

Cas limite : $\mathbf{M}_i(t)$ pointe dans une direction fixe, seule l'amplitude change, pas d'interactions entre atomes, pas de corrélations temporelles, le temps est discret. Question analogue : Probabilité que $\mathbf{M}_1 + \dots + \mathbf{M}_m < mv$ pour $m \in \{1, \dots, n\}$.

Reformulation

Soient $(Y_m)_{m=1,2,\dots}$ des v.a.i.i.d., et $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$ la $n^{\text{ième}}$ somme partielle.

On pense à Y_m comme $M_m - v$.

On définit

$$P_n = \text{Prob}(S_n < 0) \quad n \geq 1$$

$$F_n = \text{Prob}(S_1 < 0, \dots, S_n < 0) \quad n \geq 1$$

$$\tilde{P}_n = \text{Prob}(S_n \geq 0) \quad n \geq 1$$

$$\tilde{F}_n = \text{Prob}(S_1 \geq 0, \dots, S_n \geq 0) \quad n \geq 1$$

Formule de Sparre Andersen :

$$\sum_{n \geq 0} F_n z^n = \exp\left(\sum_{n \geq 1} \frac{P_n}{n} z^n\right)$$

Le cas binomial

$\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m, \dots$ v.a.i.i.d.

$$\text{Prob}(\varepsilon = -1) = p \quad \text{Prob}(\varepsilon = +1) = q = 1 - p$$

$$X_n = \sum_{m=1}^n \varepsilon_m \quad V_n = \frac{X_n}{n}$$

$$P_n = \text{Prob}(V_n < v) \quad n \geq 1$$

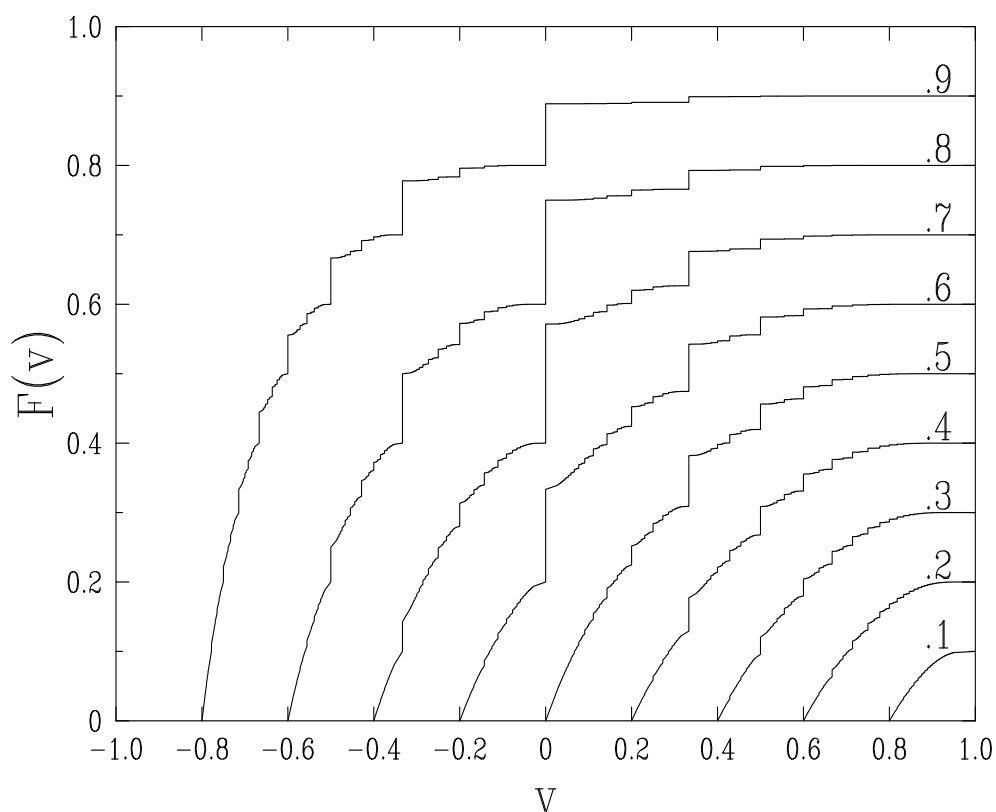
$$F_n = \text{Prob}(V_1 < v, \dots, V_n < v) \quad n \geq 1$$

$$\tilde{P}_n = \text{Prob}(V_n \geq v) \quad n \geq 1$$

$$\tilde{F}_n = \text{Prob}(V_1 \geq v, \dots, V_n \geq v) \quad n \geq 1$$

Résultats numériques

Pour $n \rightarrow \infty$, $F_n \rightarrow F$ donne la loi de la v.a. $\sup_m V_m$
et $\tilde{F}_n \rightarrow \tilde{F}$ celle de $\inf_m V_m$.



Vitesse de dérive $1 - 2p$

Probabilité critique $v = 1 - 2p_c$

Quelques résultats

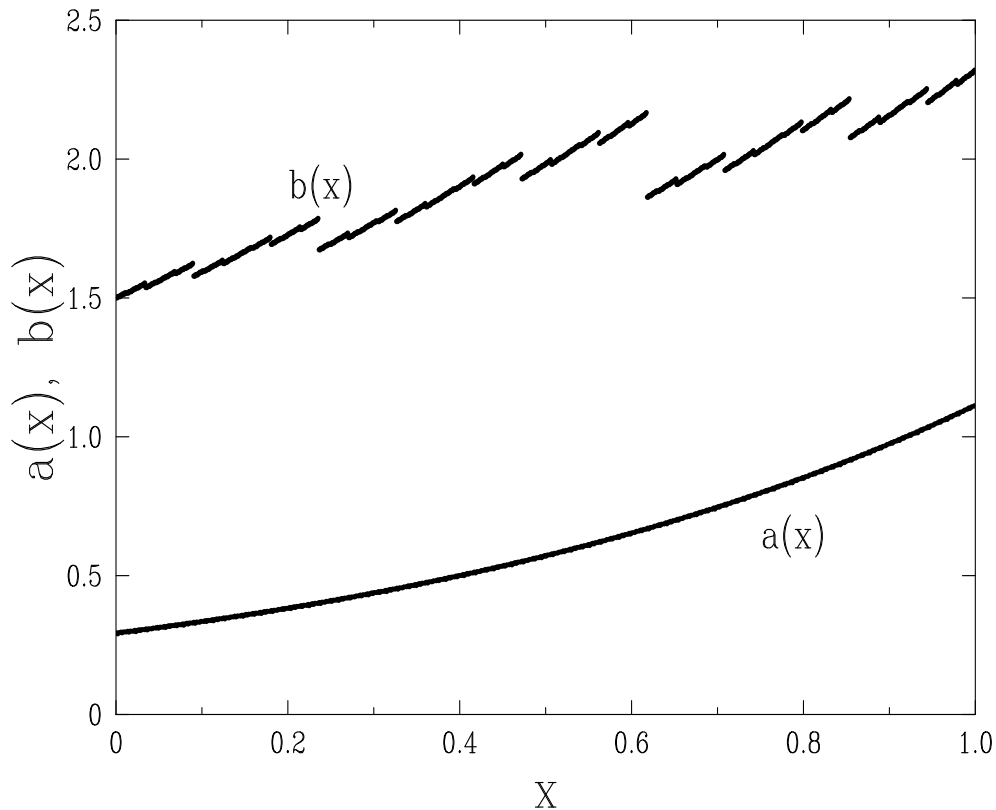
Entropie $S(v) = p_c \log p_c / p + q_c \log q_c / q$

Régime de **grandes déviations** : $p < p_c = (1 - v)/2$

$$P_n \simeq a_n(v) n^{-1/2} e^{-nS(v)} \quad F_n \simeq b_n(v) n^{-3/2} e^{-nS(v)}$$

$a_n(v) \sim a(np_c)$ fonction **périodique** de période 1, calcul **analytique**.

$b_n(v) \sim b(np_c)$ fonction **périodique** de période 1



Régime **marginal** : $p = p_c = (1 - \nu)/2$

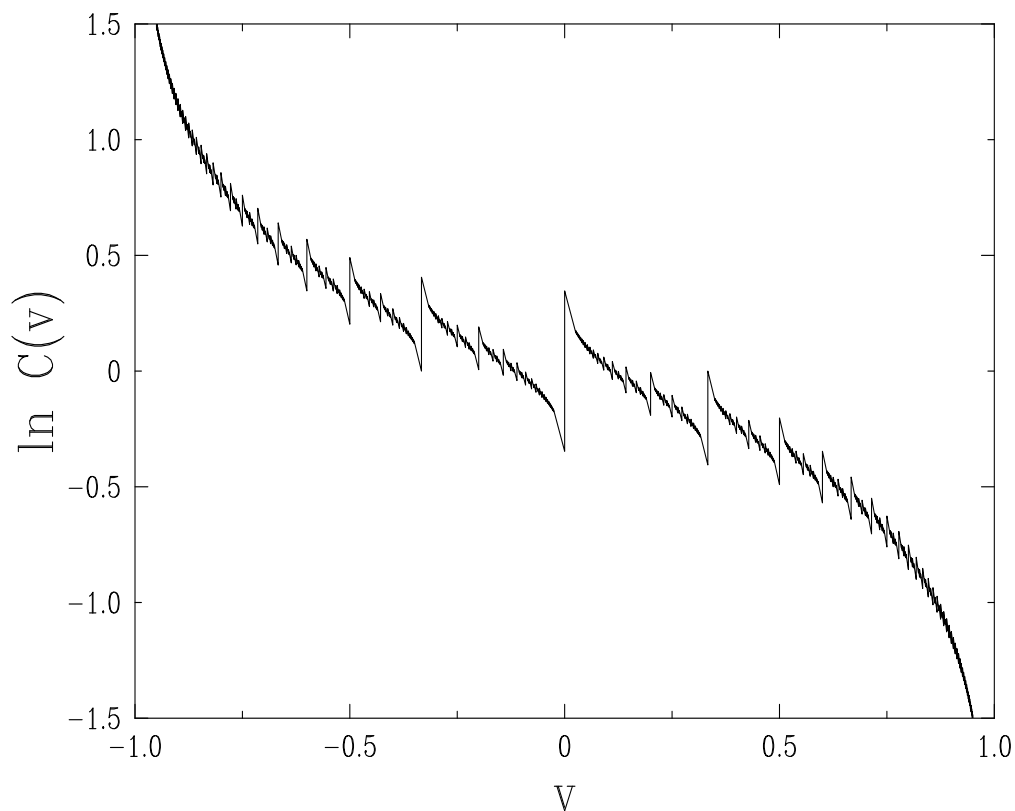
$$P_n \simeq 1/2 \quad F_n \simeq \frac{C(\nu)}{(\pi n)^{1/2}}$$

$\tilde{C}(\nu) = C(-\nu)$ (symétrie)

$C(\nu)\tilde{C}(\nu) = 1$ (Sparre Andersen).

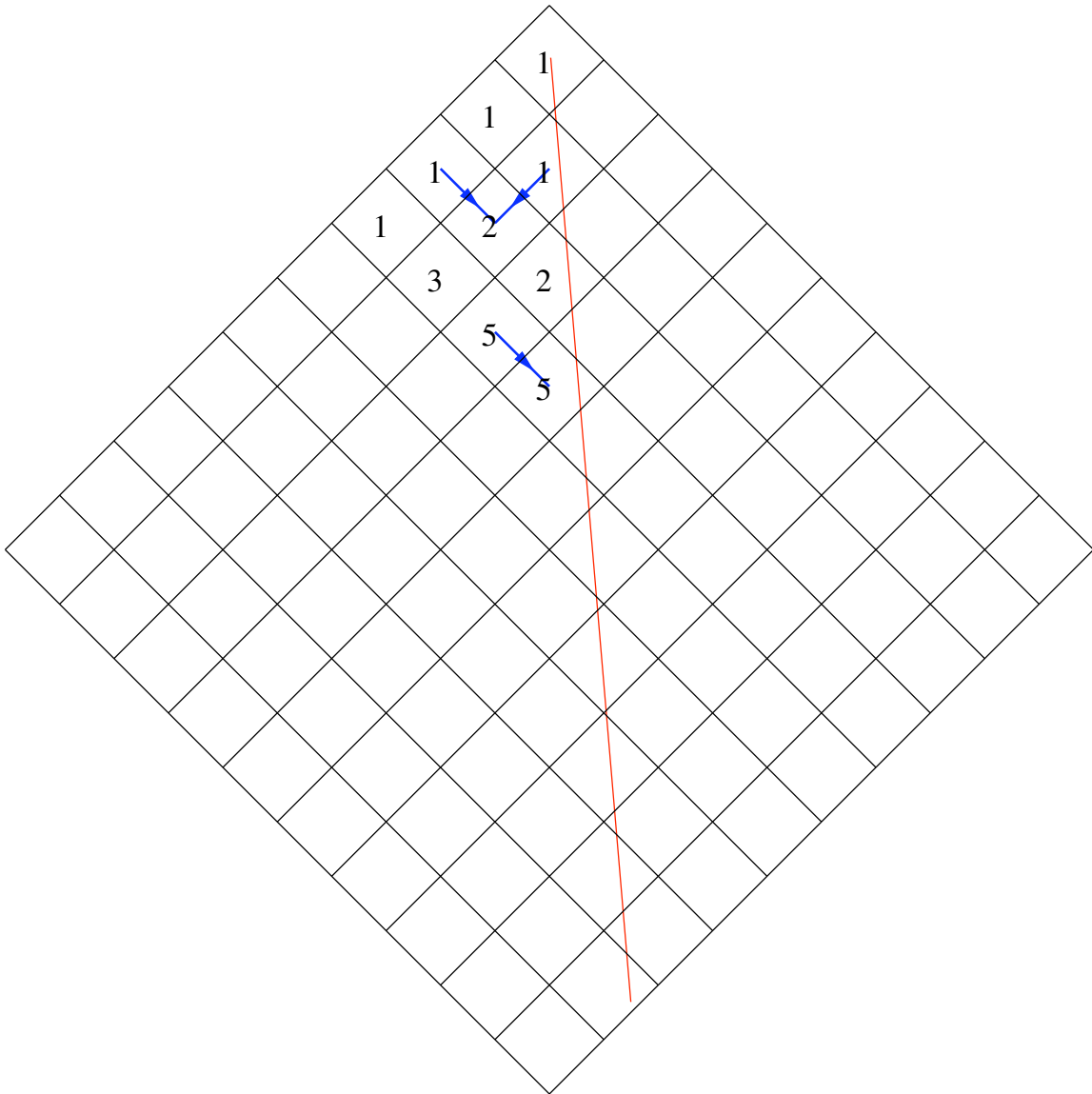
Régime **convergent** : $p > p_c = (1 - \nu)/2$

$$F(\nu) > p - p_c \quad F(\nu) \simeq C(\nu) \left(\frac{2}{p_c q_c} \right)^{1/2} (p - p_c)$$

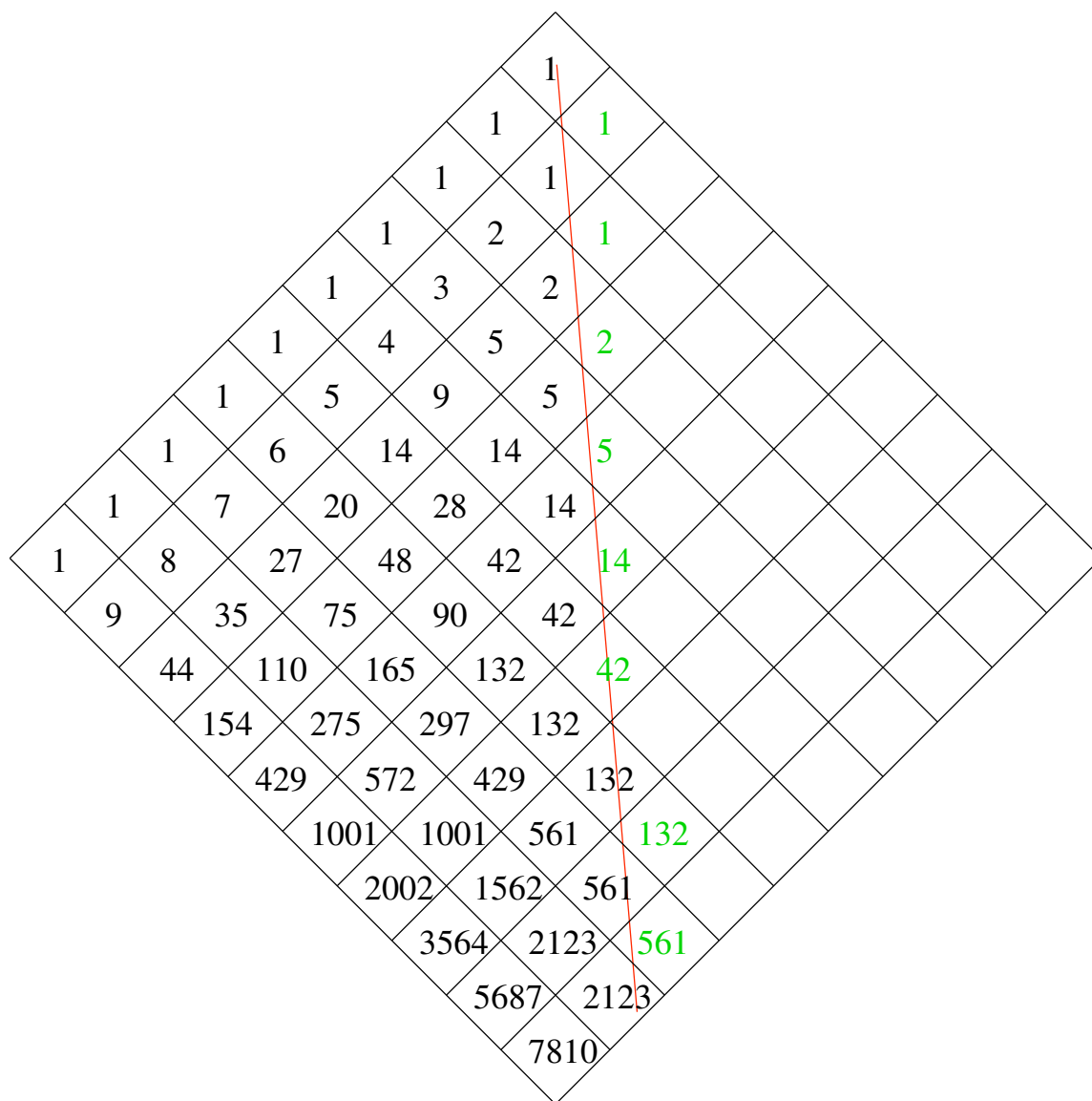


Reformulation combinatoire

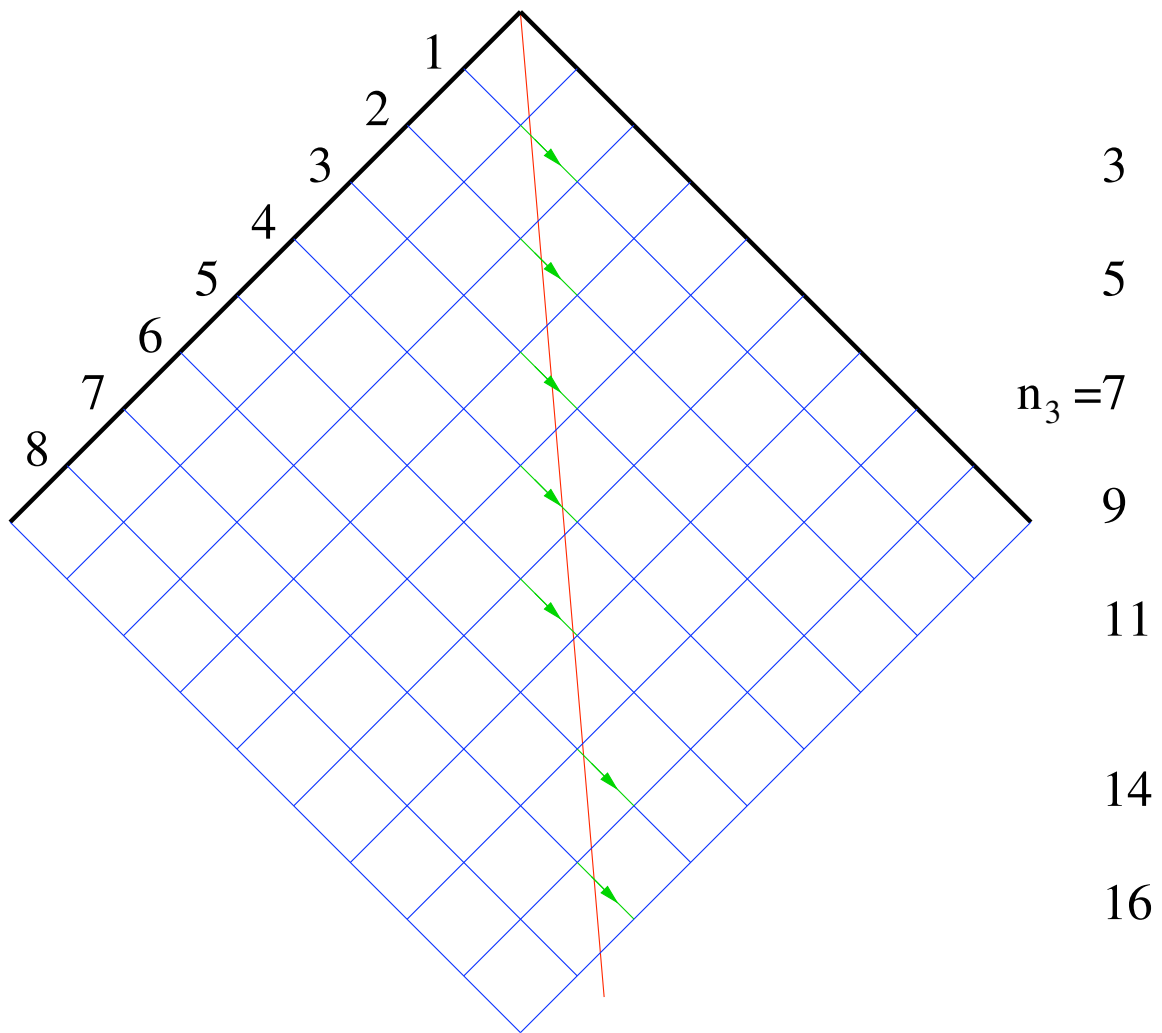
Le poids d'un chemin ne dépend que de son point final.



Sauts interdits



Fuite de probabilité



Sur chaque lien qui croise la trajectoire du mobile,
fuite d'une probabilité $\mathcal{A}_k p^k (1-p)^{n_k-k}$

Formule cruciale

$$F = p - \sum_k \mathcal{A}_k p^k (1-p)^{n_k-k}$$

Si $p < p_c$, $F = 0$ i.e.

Loi des grands nombres :

$$p = \sum_k \mathcal{A}_k p^k (1-p)^{n_k-k} \quad p < p_c$$

Calcul récursif des \mathcal{A}_k : toute intégrale de contour bien choisie donne une relation linéaire entre eux.

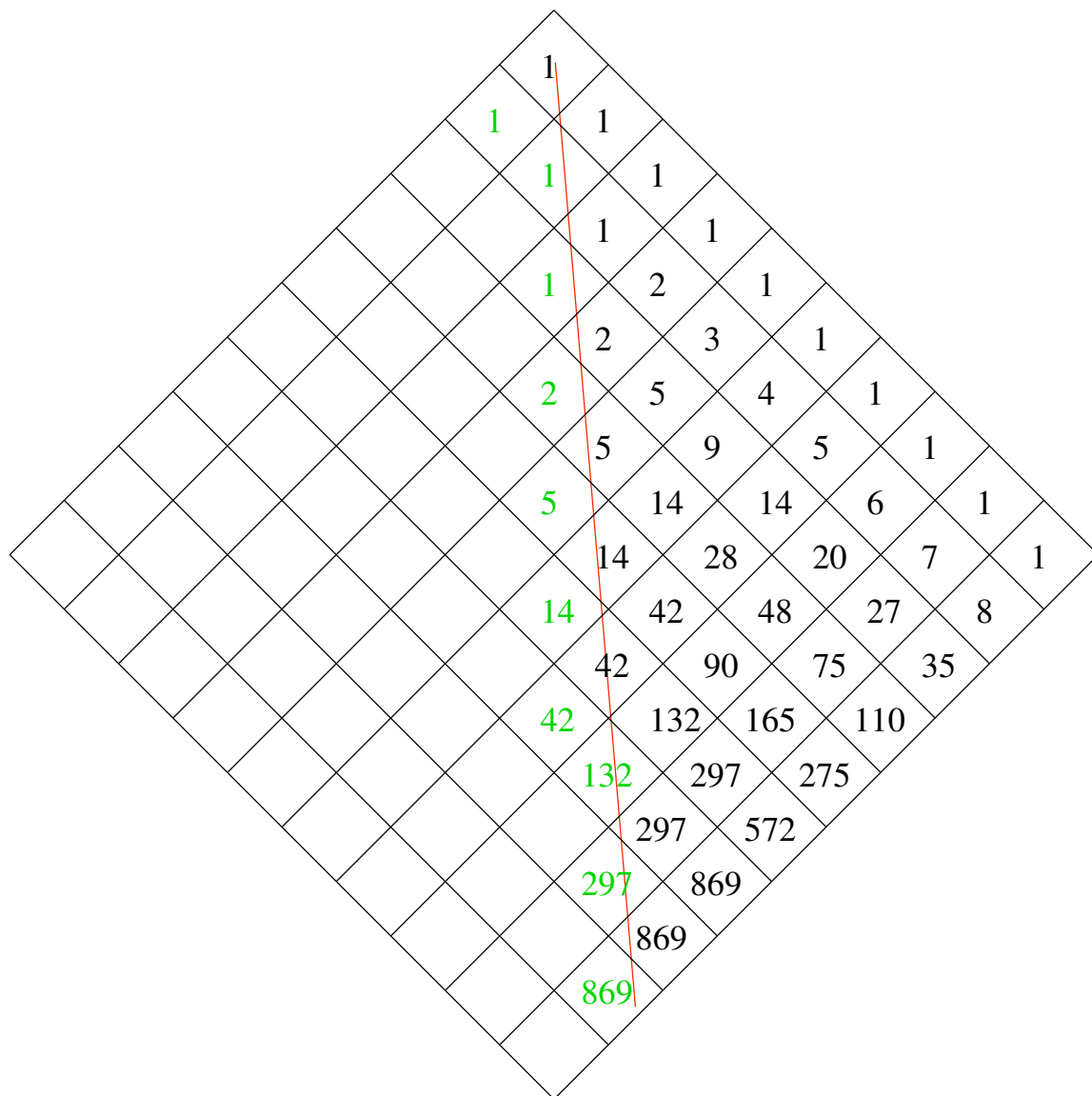
$$\delta_{k,1} = \mathcal{A}_k + \sum_l \mathcal{A}_l \binom{n_l - l}{k - l} (-1)^{k-l}$$

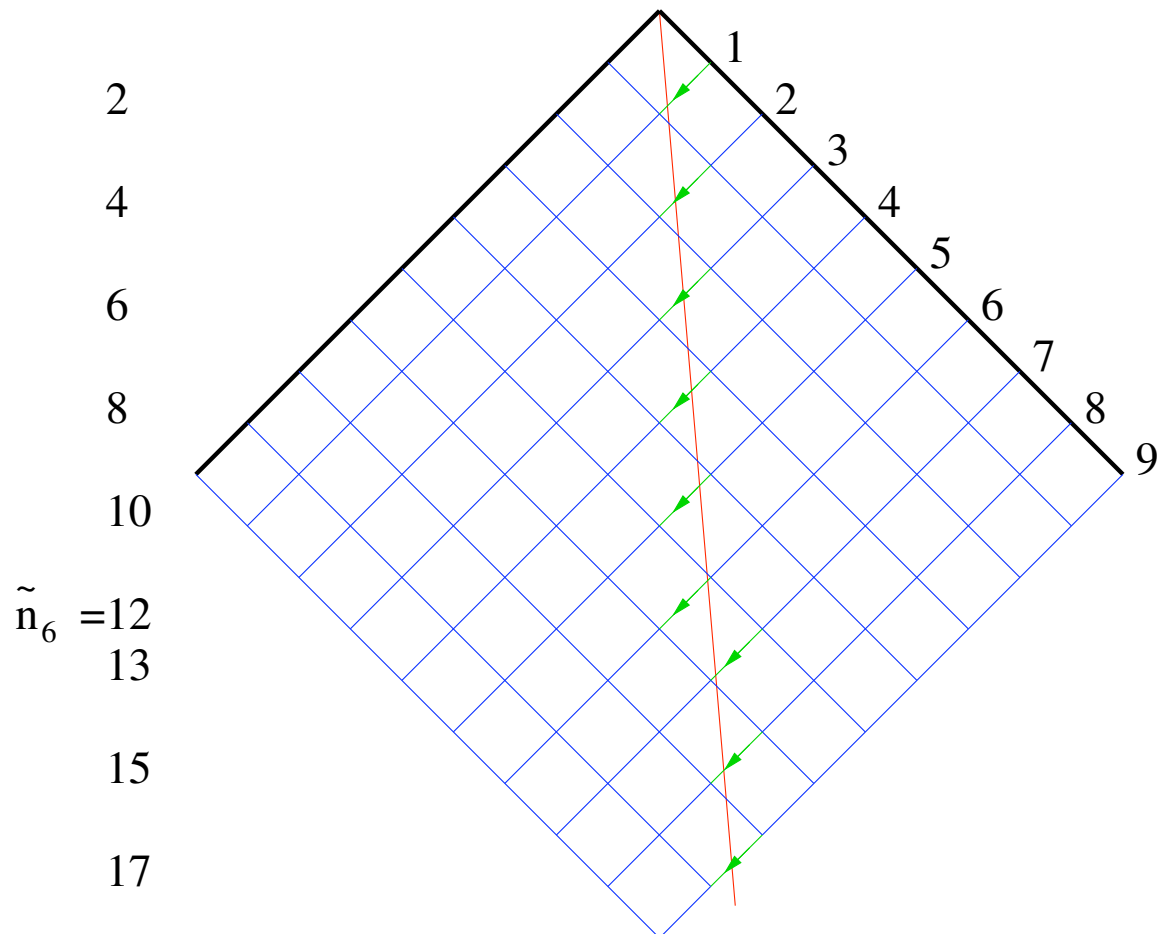
$$\binom{n_k - 1}{k - 1} = \mathcal{A}_k + \sum_{l=1}^{k-1} \mathcal{A}_l \binom{n_k - n_l}{k - l}$$

(combinatoire, convolution pour v rationnel).

$$\frac{\Gamma(k/p_c - 1)}{k! \Gamma(k/p_c - k)} \leq \mathcal{A}_k \leq \frac{\Gamma(k/p_c + 1)}{k! \Gamma(k/p_c - k + 2)}$$

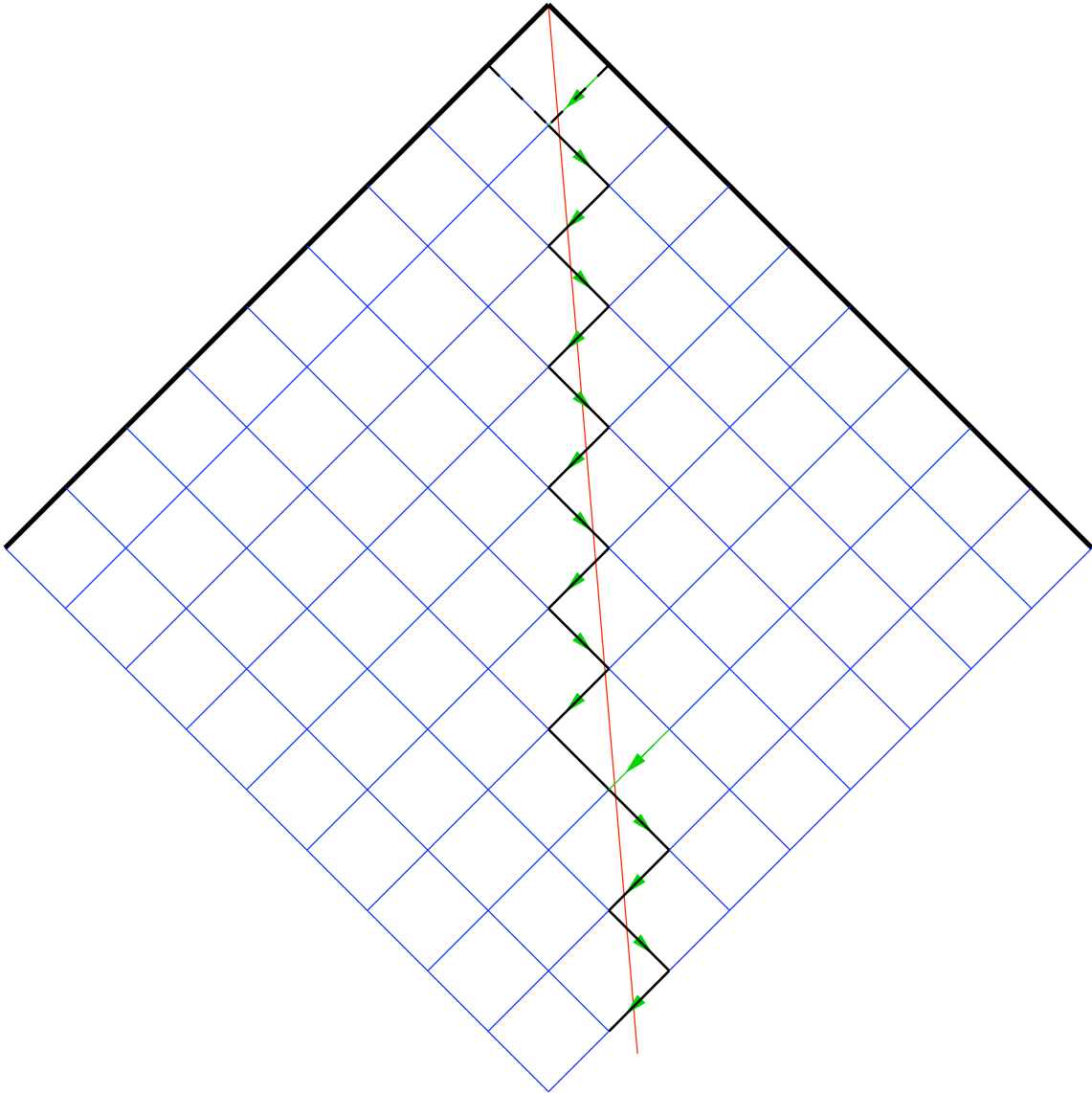
Combinatoire du coté droit





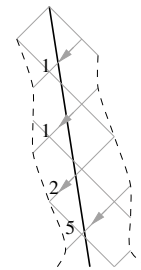
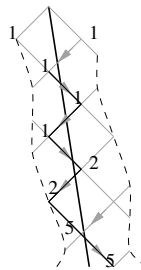
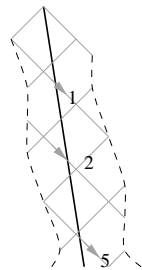
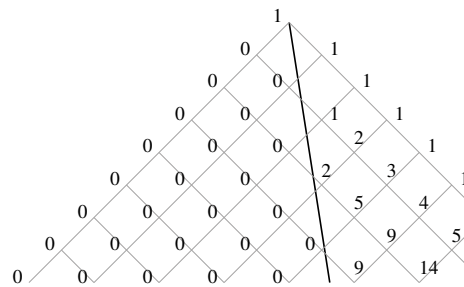
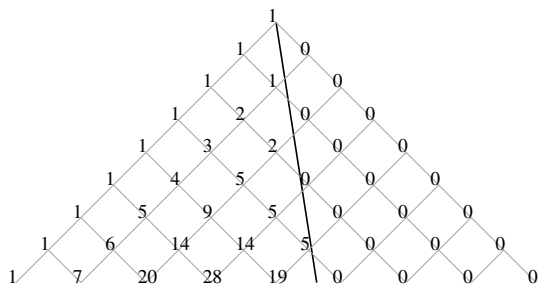
La suite des **longueurs des marches** qui traversent par la **droite** est **complémentaire** de celle des **longueurs des marches** qui traversent par la **gauche**.

Marche canonique



On va à **droite** si le mur est à **droite** et à **gauche** si le mur est à **gauche**.

Fusion de la droite et de la gauche

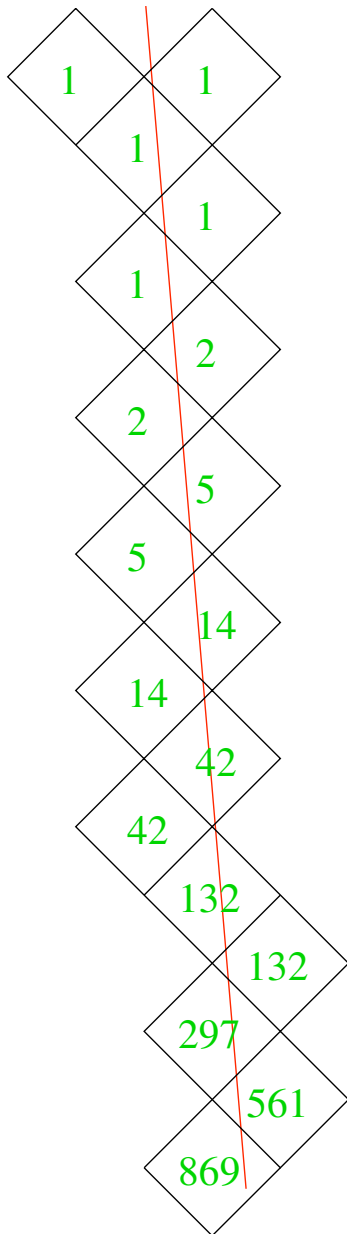


$$\{\mathcal{A}_k\} \text{ et } \{\tilde{\mathcal{A}}_k\} \Leftrightarrow \{\bar{\mathcal{A}}_n\}$$

$$\text{Si } 0 \leq p \leq p_c, p - \sum_k \mathcal{A}_k p^k q^{n_k - k} = 0$$

$$\text{Si } 1 \geq p \geq p_c, q - \sum_k \tilde{\mathcal{A}}_k q^k p^{\tilde{n}_k - k} = 0$$

Récurrance linéaire



t		
1	1	1
2	1	
3		1
4	1	
5		2
6	2	
7		5
8	5	
9		14
10	14	
11		42
12	42	
13	132	
14		132
15	297	
16		561
17	869	

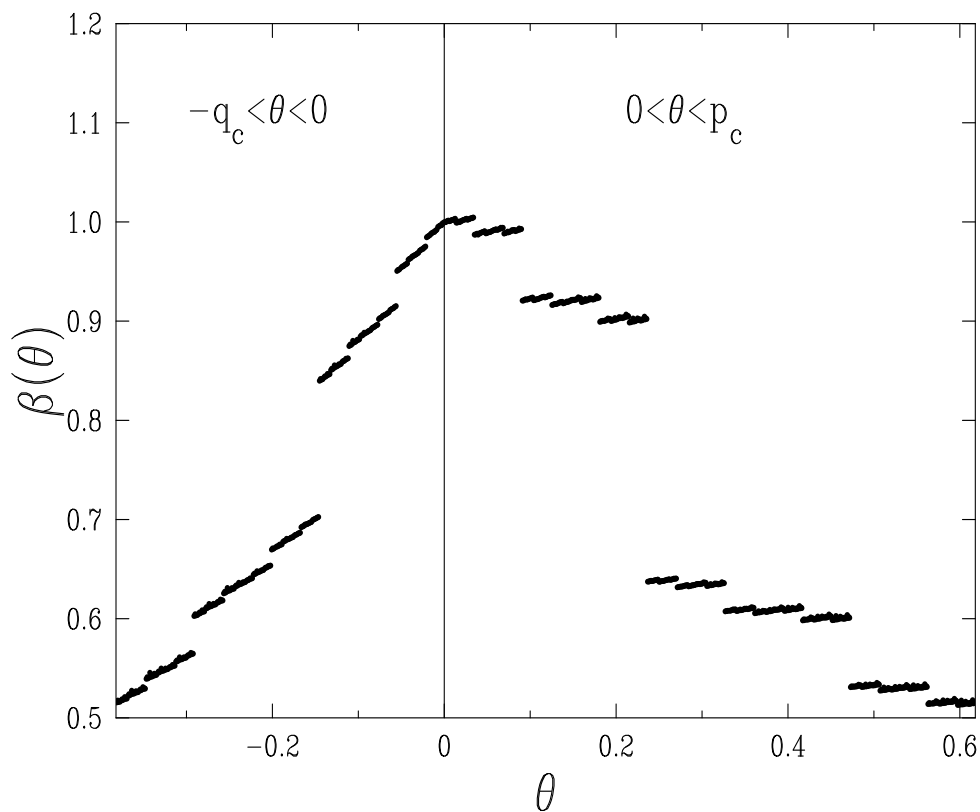
$$17 = 1 + 16 = 6 + 11 = 8 + 9 = 10 + 7 = 12 + 5$$

$$869 = 1 \cdot 561 + 2 \cdot 42 + 5 \cdot 14 + 14 \cdot 5 + 42 \cdot 2$$

Asymptotique des $\overline{\mathcal{A}}_n$

$n \mapsto k_n$ tel que $\theta_n = np_c - k_n \in]-q_c, p_c[$

$$\overline{\mathcal{A}}_n \simeq \beta(\theta_n) \frac{1}{(2\pi p_c q_c n^3)^{1/2}} (p_c^{p_c} q_c^{q_c})^{-n}$$

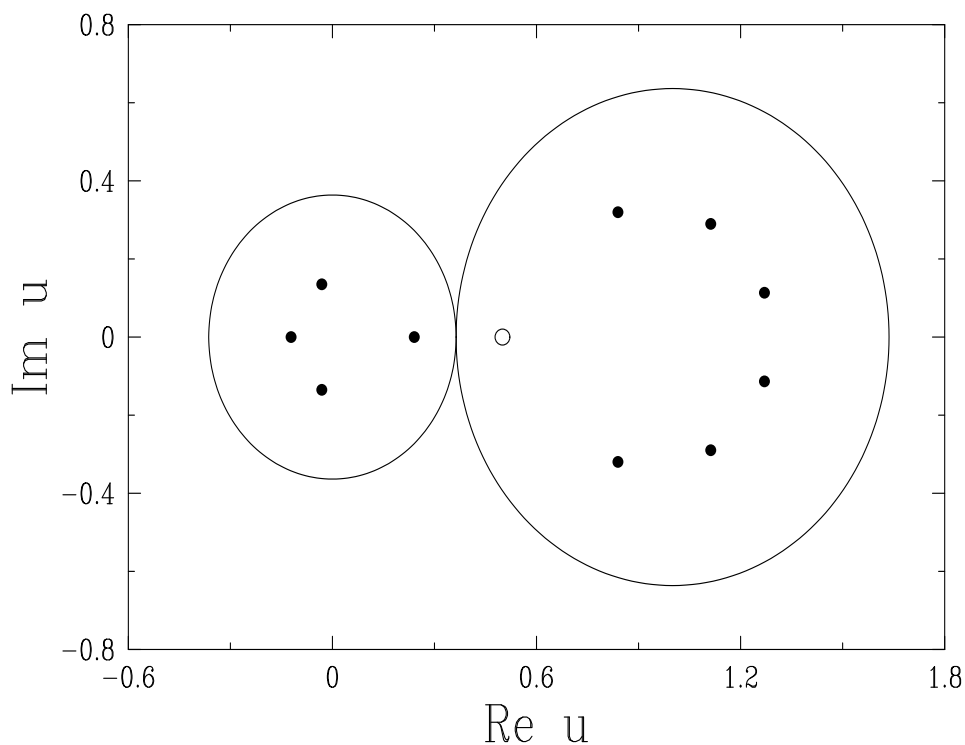


Cas rationnel $p_c = M/N < p$

Périodicité $n_{k+M} = n_k + N$

$$t \equiv p^M (1-p)^{N-M}$$

L'équation $t = u^M (1-u)^{N-M}$ a M petites racines u_α , $\alpha = 1, \dots, M$



Par analyticité $0 = u_\alpha - \sum_{k \geq 1} \mathcal{A}_k u_\alpha^k (1-u_\alpha)^{n_k - k}$.

Méthode 1 : On regroupe

$$F = p - \sum_k \mathcal{A}_k p^k (1 - p)^{n_k - k} \text{ en}$$

$$F = p - \sum_{k=1}^M p^k (1 - p)^{n_k - k} F_k(t)$$

$$0 = u_\alpha - \sum_{k=1}^M u_\alpha^k (1 - u_\alpha)^{n_k - k} F_k(t).$$

On résoud pour les F_k . On en déduit F .

Méthode 2 : On définit D_α par

$$\sum_1^M D_\alpha u_\alpha^k (1 - u_\alpha)^{n_k - k} = p^k (1 - p)^{n_k - k}$$

pour $k = 1, \dots, M$. Alors c'est vrai pour tous les k .

$$F = p - \sum_{\alpha=1}^M D_\alpha \sum_k \mathcal{A}_k u_\alpha^k (1 - u_\alpha)^{n_k - k} = p - \sum_1^M D_\alpha u_\alpha$$

Méthode 3 : La dualité donne des équation

quadratiques qui lient les $F_k(t)$ et les $\tilde{F}_k(t)$

Remarque : $F = \text{Prob}(V_1 < v, \dots, V_n < v, \dots) \equiv F^-$

mais $F^+ = \text{Prob}(V_1 \leq v, \dots, V_n \leq v, \dots)$ se traite

par les mêmes méthodes. $1 - F^-/F^+$ est la

probabilité que $V_1 = -1$ et $v \in \{V_1, V_2, \dots\}$.

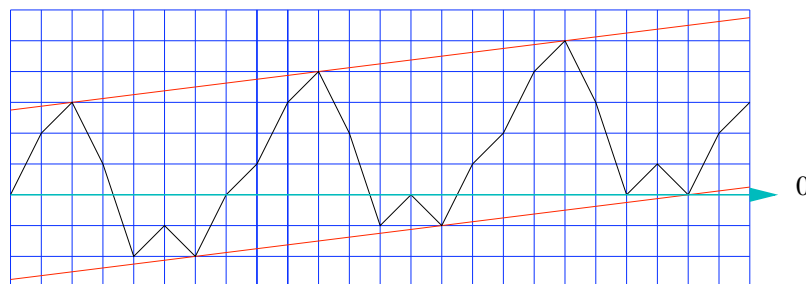
Exemples

La fonction F et les \tilde{F}_k sont des fonctions algébriques de p et t .

Les cas $M = 1$ et $M = N - 1$ sont très simples.

$M = 1$: combinatoire

$$\mathcal{A}_k^- = \frac{(Nk - 2)!}{k!(Nk - k - 1)!}, \quad \mathcal{A}_k^+ = \frac{(Nk)!}{k!(Nk - k + 1)!}$$

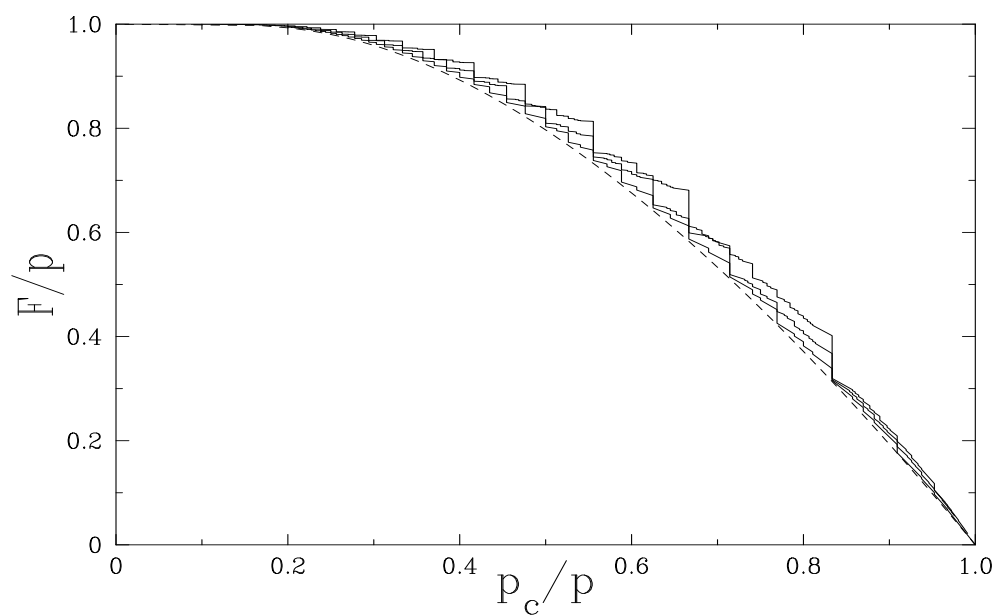
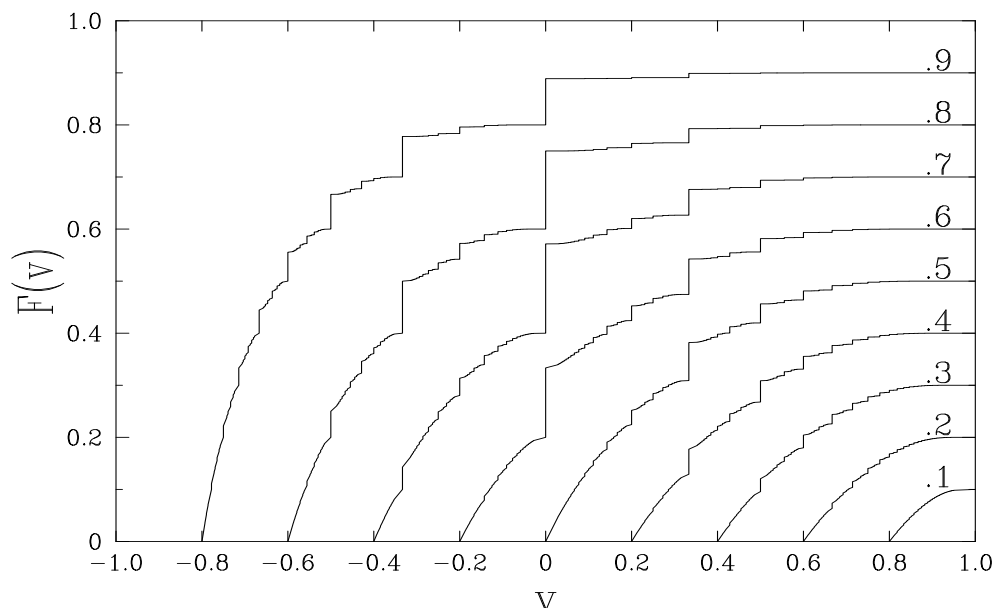


$M = N - 1$: probabilités

$$F^- = 1 - Nq \quad F^+ = (1 - Nq)/p \quad Q = q$$

$M = 2$ et $N = 5$ est encore de genre 0, revêtement de degré 10 de t .

Limite continue $p \rightarrow 0$



$$F/p \equiv 1 - \mu^* \quad p_c/p \equiv 1/\mu$$

$$\mu e^\mu = \mu^* e^{-\mu^*} \quad p \rightarrow 0 \quad \mu \text{ fixé}$$