Statistique des évènements persitants :
La mouche rattrapera-t-elle le coche ?

Avec Claude Godrèche et Jean-Marc Luck

Plan

I Le coche et la mouche

II Motivations

III Approche analytique

IV Approche combinatoire

V Limite continue

Modélisation de la fable

Chemin montant = Droite réelle

Mouche = Mobile aléatoire

Coche = Obstacle déterministe de vitesse constante : v

Question : La mouche part vers l'arrière (par exemple), quelle est la probabilité quelle n'ait pas retrouvé le coche jusqu'au temps n, qu'elle ne retrouve jamais le coche ?

Persistance et grandes déviations

Stabilité des opinions électorales : fraction des gens qui votent pour le même parti depuis n scrutins ?

Dans un système magnétique, atomes $\sim$ petits aimants qui interagissent entre eux et avec le mileu extérieur, et dont l'orientation, $\mathbf{M}_i(t)$, fluctue. La fraction des i tels que $\frac{1}{t}\int_0^t \mathbf{M}_i(\tau) d\tau \in \Omega$ pour $t \in [0, T]$ se comporte comme $t^{-\alpha(\Omega)}$

Cas limite : $\mathbf{M}_i(t)$ pointe dans une direction fixe, seule l'amplitude change, pas d'interactions entre atomes, pas de corrélations temporelles, le temps est discret. Question analogue : Probabilité que $\mathbf{M}_1 + \cdots \mathbf{M}_m < mv$ pour $m \in \{1, \cdots, n\}$.

Reformulation

Soient $(Y_m)_{m=1,2,\ldots}$ des v.a.i.i.d., et
$S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ la n^{ieme} somme partielle.
On pense à Y_m comme $\mathbf{M}_m - v$.

On définit

$$P_n = \mathrm{Prob}(S_n < 0) \qquad n \geq 1$$

$$F_n = \mathrm{Prob}(S_1 < 0, \cdots, S_n < 0) \qquad n \geq 1$$

$$\tilde{P}_n = \mathrm{Prob}(S_n \geq 0) \qquad n \geq 1$$

$$\tilde{F}_n = \mathrm{Prob}(S_1 \geq 0, \cdots, S_n \geq 0) \qquad n \geq 1$$

Formule de Sparre Andersen :

$$\sum_{n\geq 0} F_n z^n = \exp\left(\sum_{n\geq 1} \frac{P_n}{n} z^n\right)$$

Le cas binomial

$$\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m, \cdots \text{ v.a.i.i.d.}$$

$$\mathrm{Prob}(\varepsilon = -1) = p \qquad \mathrm{Prob}(\varepsilon = +1) = q = 1 - p$$

$$X_n = \sum_{m=1}^{n} \varepsilon_m \qquad V_n = \frac{X_n}{n}$$

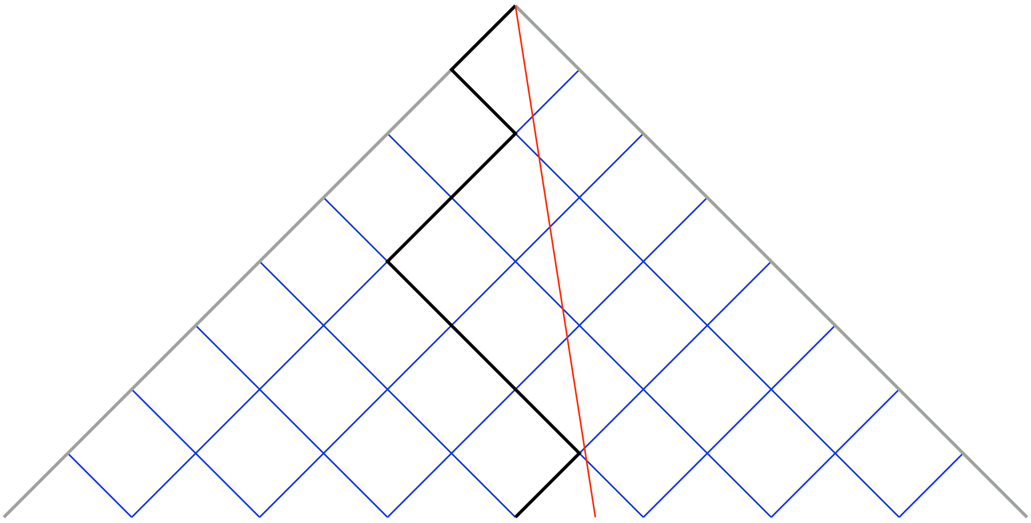
$$P_n = \mathrm{Prob}(V_n < v) \qquad n \geq 1$$

$$F_n = \mathrm{Prob}(V_1 < v, \cdots, V_n < v) \qquad n \geq 1$$

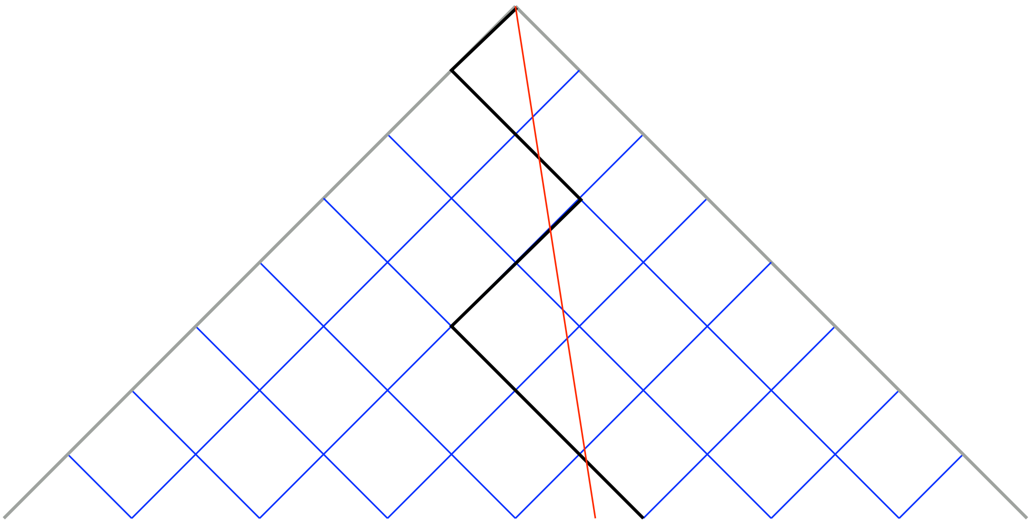
$$\tilde{P}_n = \mathrm{Prob}(V_n \geq v) \qquad n \geq 1$$

$$\tilde{F}_n = \mathrm{Prob}(V_1 \geq v, \cdots, V_n \geq v) \qquad n \geq 1$$

Exemples



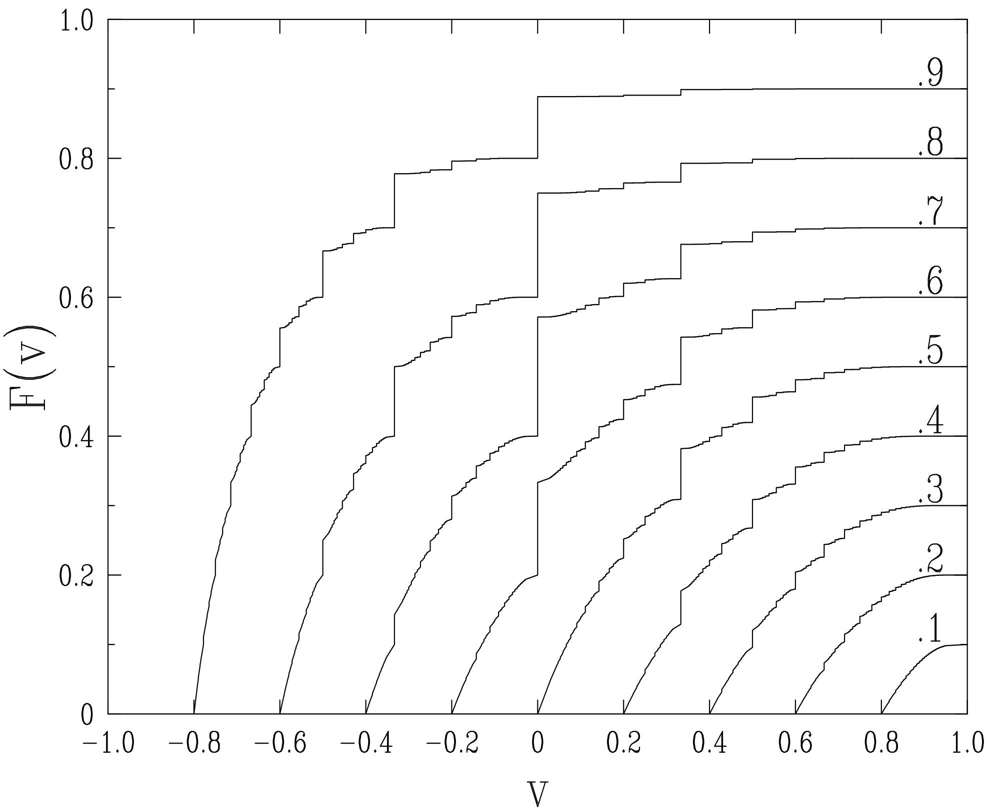
Pas de rencontre



Trois rencontres

Résultats numériques

Pour $n \to \infty$, $F_n \to F$ donne la loi de la v.a. $\sup_m V_m$ et $\tilde{F}_n \to \tilde{F}$ celle de $\inf_m V_m$.



Vitesse de dérive $1 - 2p$

Probabilité critique $v = 1 - 2p_c$

Quelques résultats

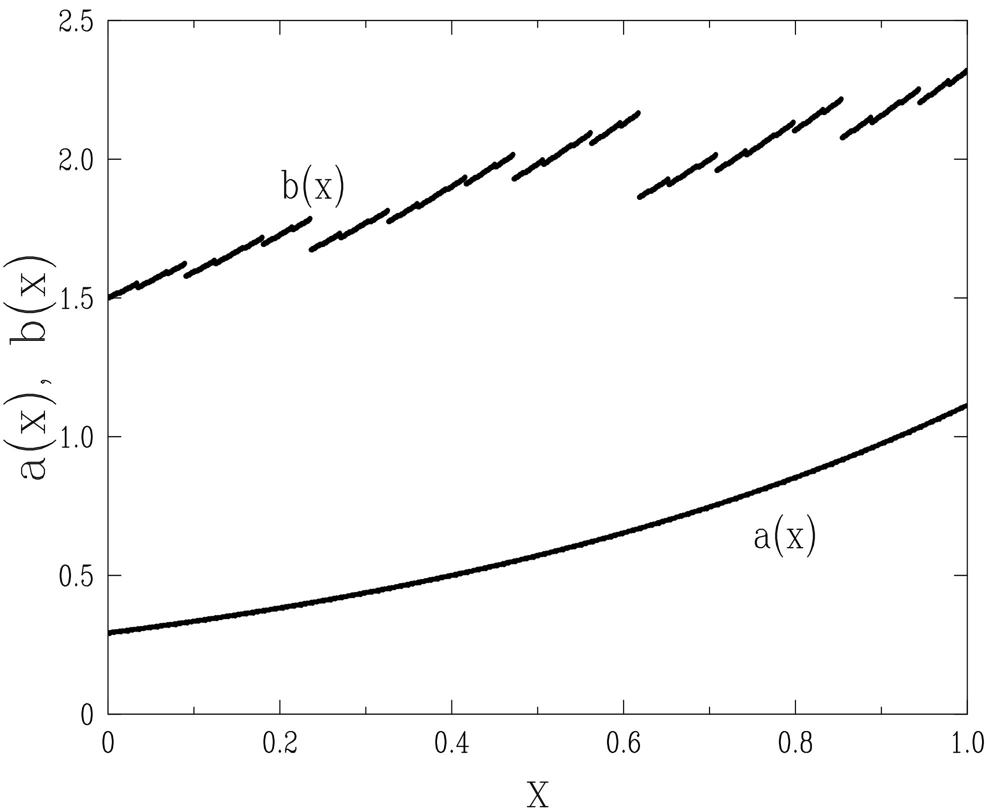
Entropie $S(v) = p_c \log p_c/p + q_c \log q_c/q$

Régime de grandes déviations : $p < p_c = (1-v)/2$

$$P_n \simeq a_n(v) n^{-1/2} e^{-nS(v)} \qquad F_n \simeq b_n(v) n^{-3/2} e^{-nS(v)}$$

$a_n(v) \sim a(np_c)$ fonction périodique de période 1, calcul analytique.

$b_n(v) \sim b(np_c)$ fonction périodique de période 1



Régime marginal : $p = p_c = (1 - v)/2$

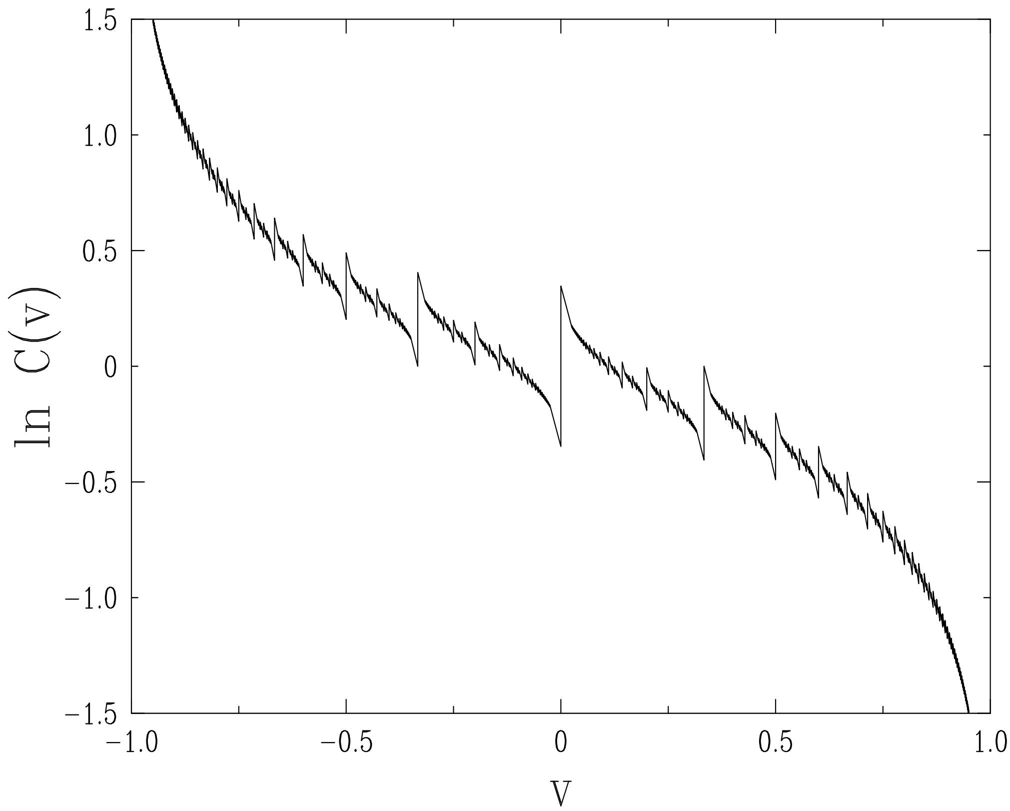
$$P_n \simeq 1/2 \qquad F_n \simeq \frac{C(v)}{(\pi n)^{1/2}}$$

$\tilde{C}(v) = C(-v)$ (symétrie)

$C(v)\tilde{C}(v) = 1$ (Sparre Andersen).

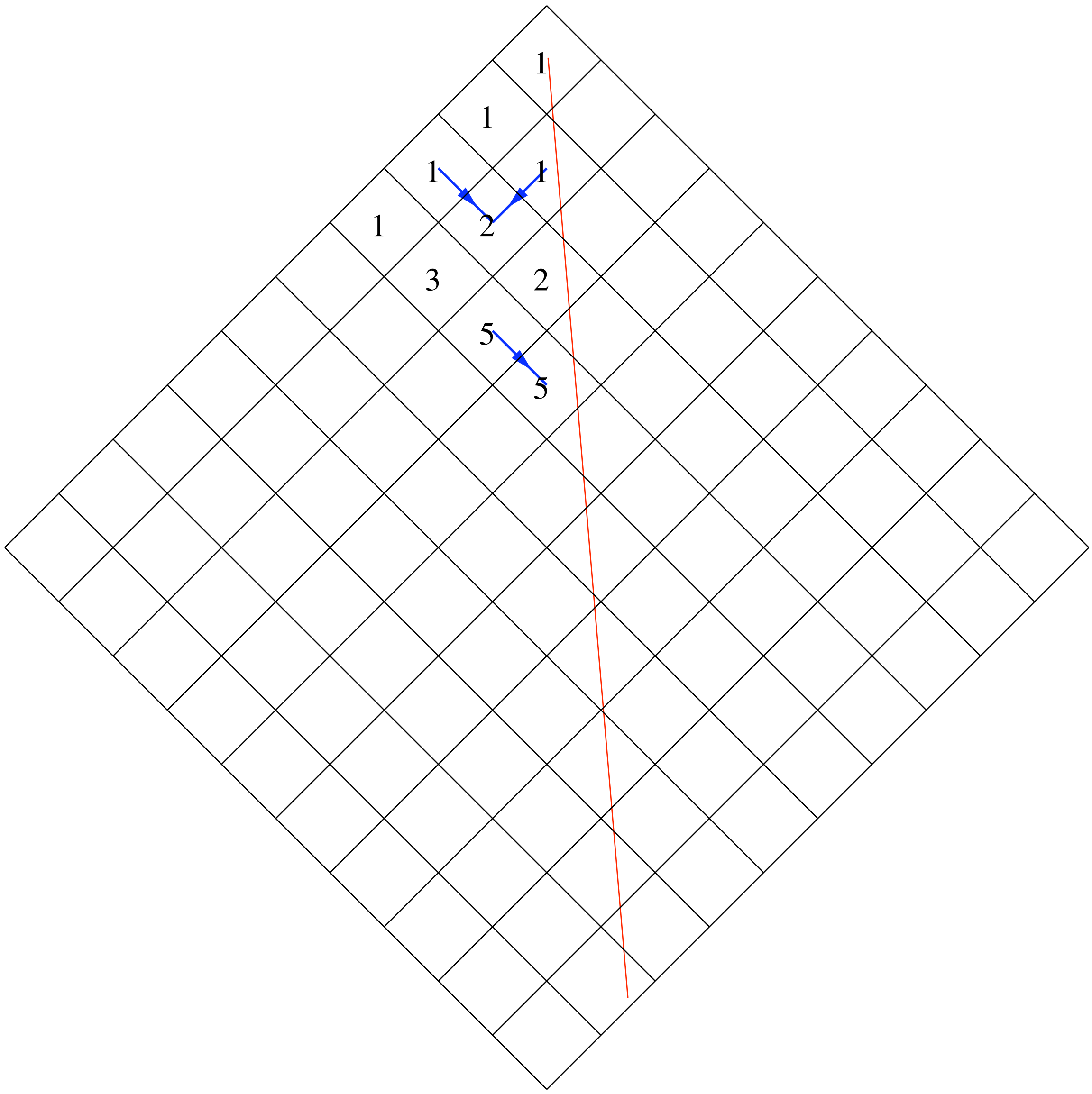
Régime convergent : $p > p_c = (1 - v)/2$

$$F(v) > p - p_c \qquad F(v) \simeq C(v)\left(\frac{2}{p_c q_c}\right)^{1/2}(p - p_c)$$



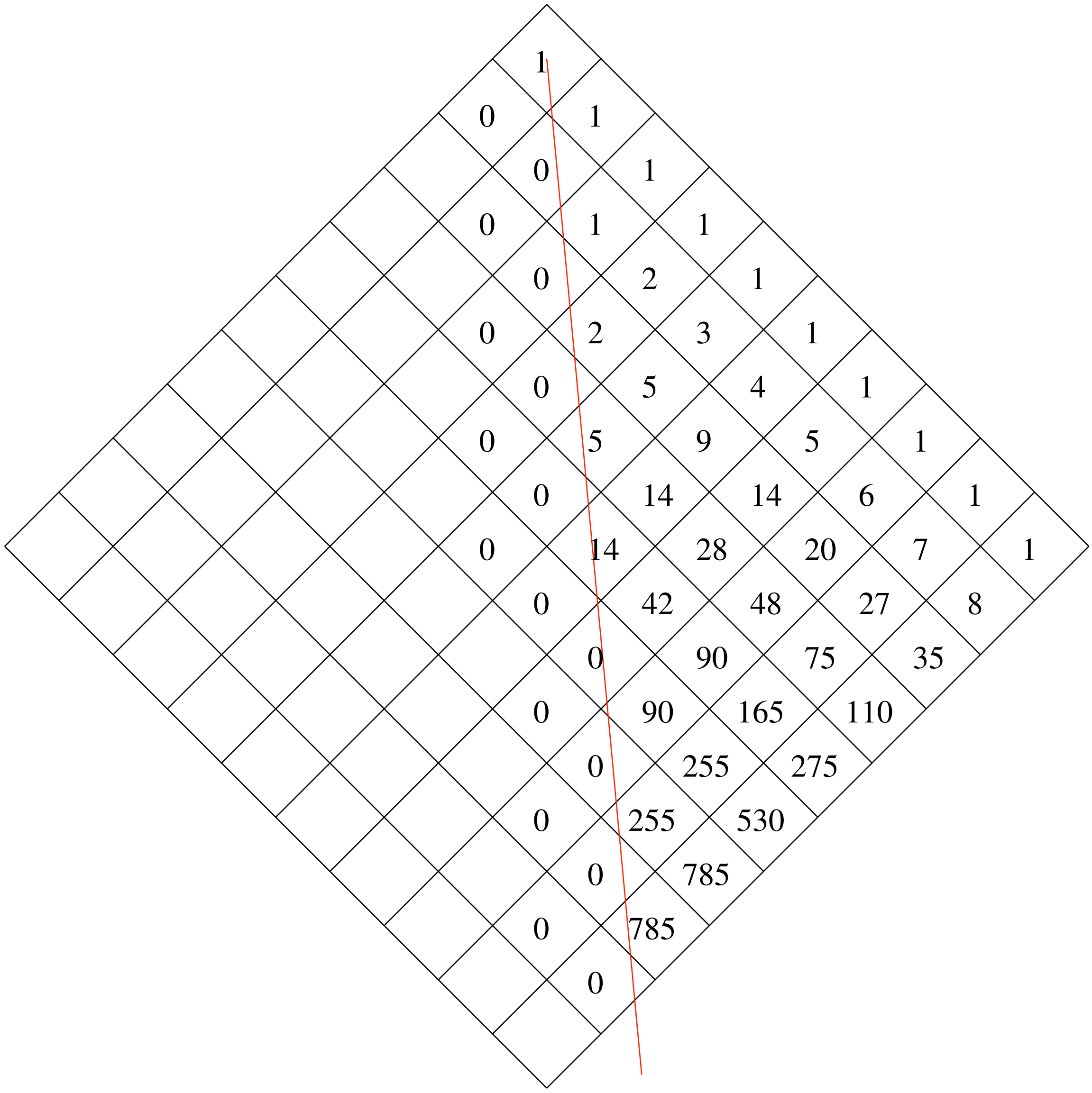
Reformulation combinatoire

Le poids d'un chemin ne dépend que de son point final.

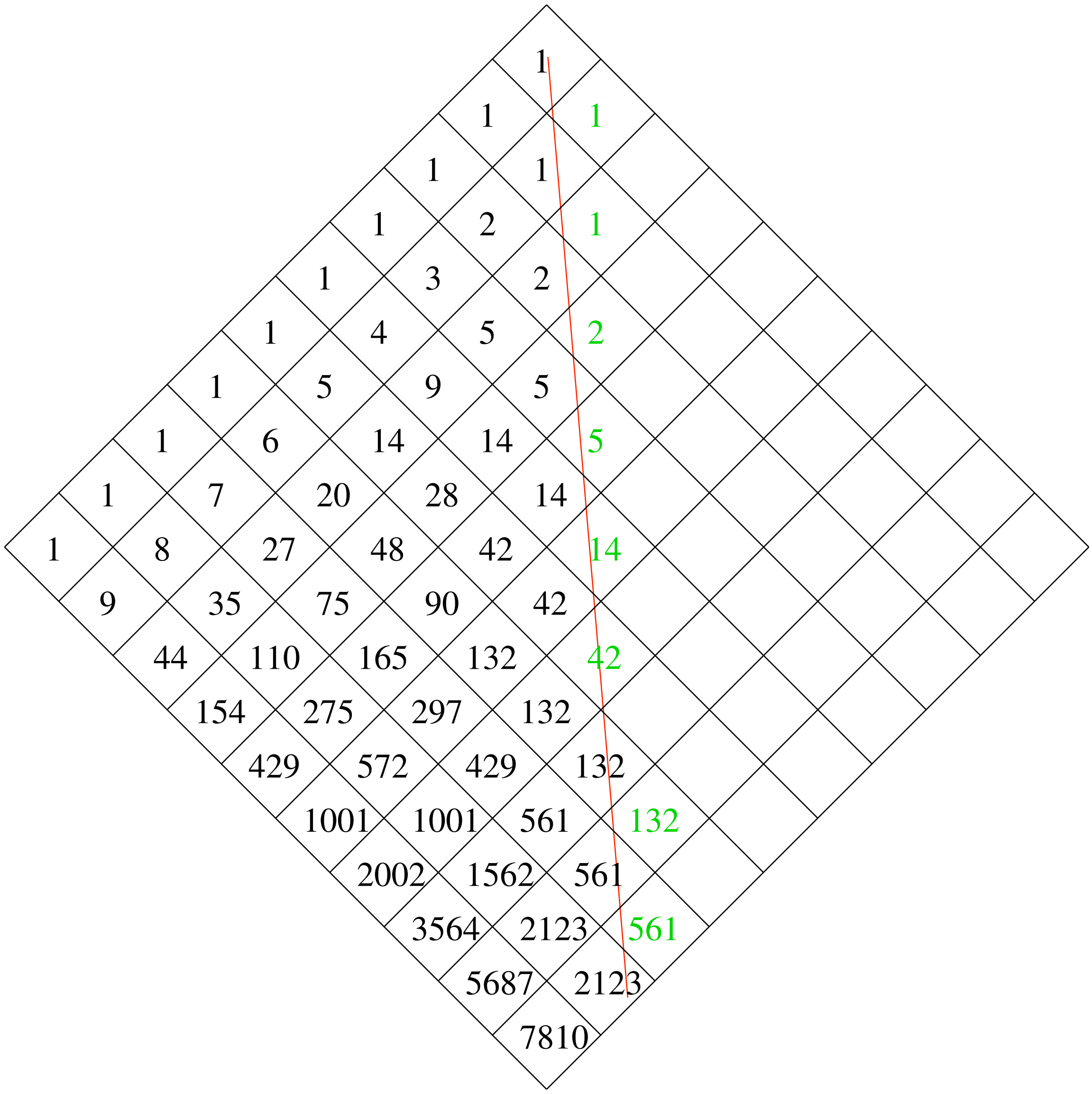


Cette remarque réduit le problème à un comptage de chemins, dans un triangle de Pascal tronqué.

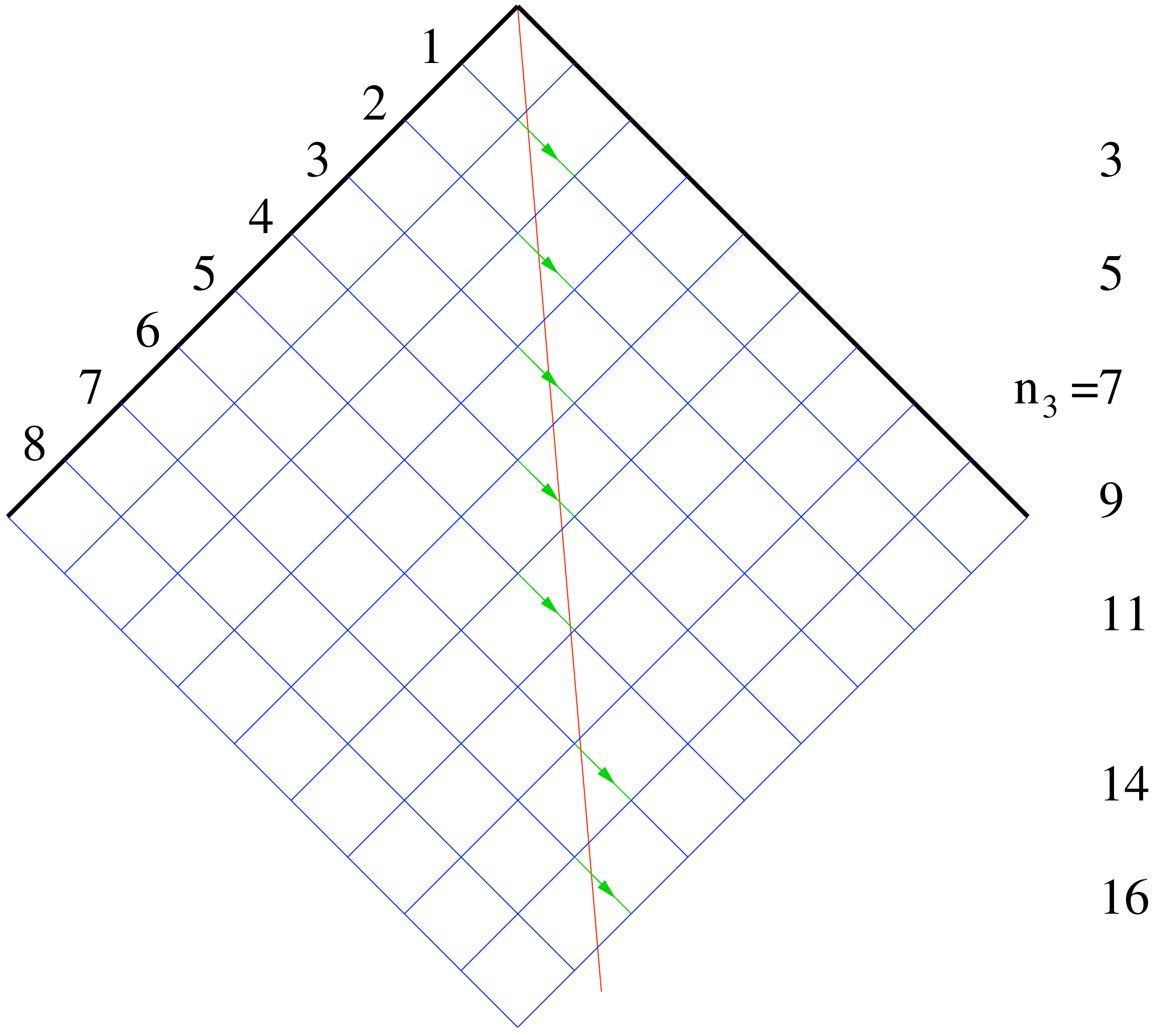
Conditions aux limites



Sauts interdits



Fuite de probabilité



Sur chaque lien qui croise la trajectoire du mobile,
fuite d'une probabilité $\mathcal{A}_k p^k (1-p)^{n_k - k}$

Formule cruciale

$$F = p - \sum_k \mathcal{A}_k p^k (1-p)^{n_k - k}$$

Si $p < p_c$, $F = 0$ i.e.

Loi des grands nombres :

$$p = \sum_k \mathcal{A}_k p^k (1-p)^{n_k - k} \qquad p < p_c$$

Calcul récursif des $\mathcal{A}_k$: toute intégrale de contour bien choise donne une relation linéaire entre eux.

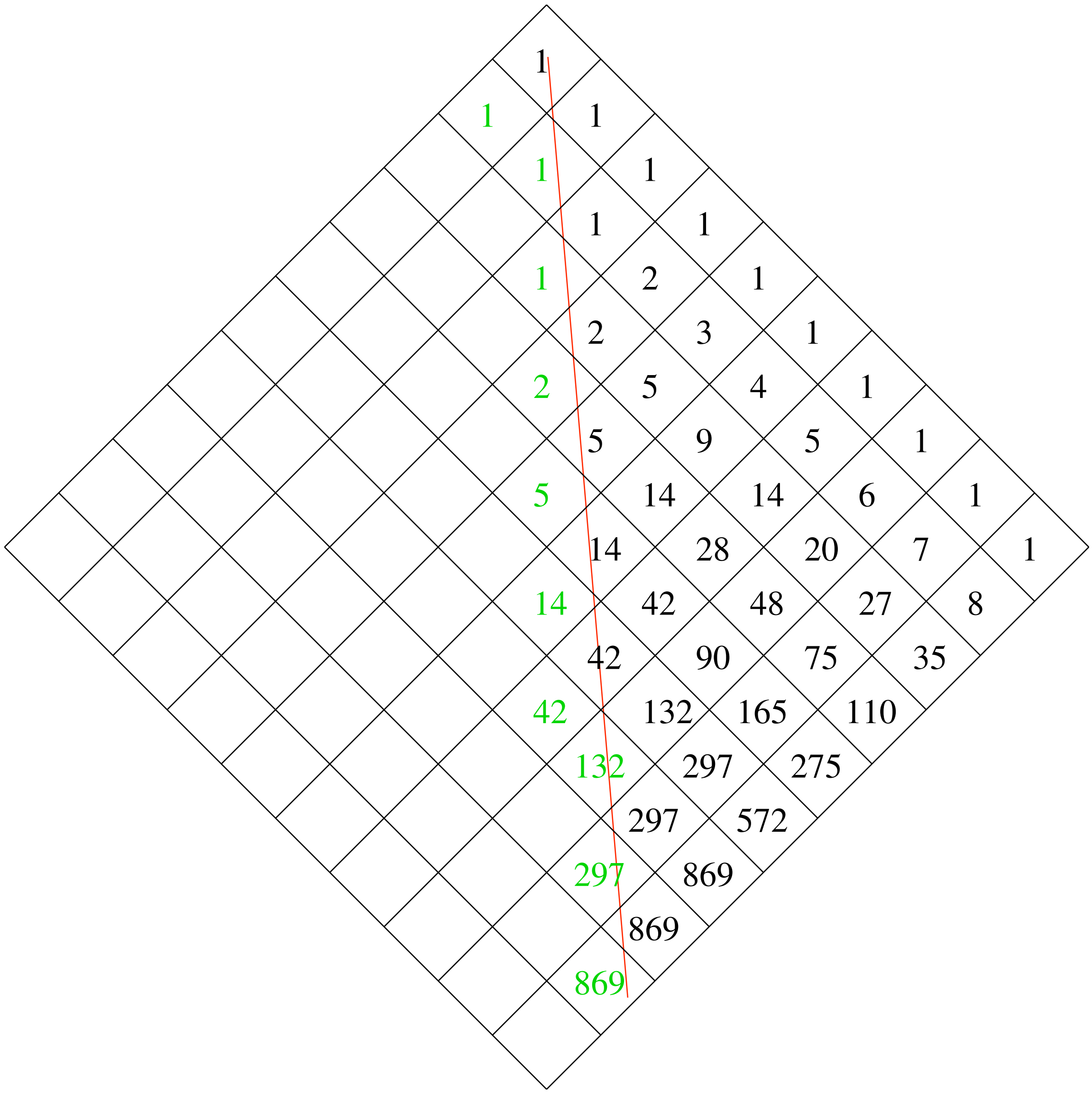
$$\delta_{k,1} = \mathcal{A}_k + \sum_l \mathcal{A}_l \binom{n_l - l}{k - l} (-1)^{k-l}$$

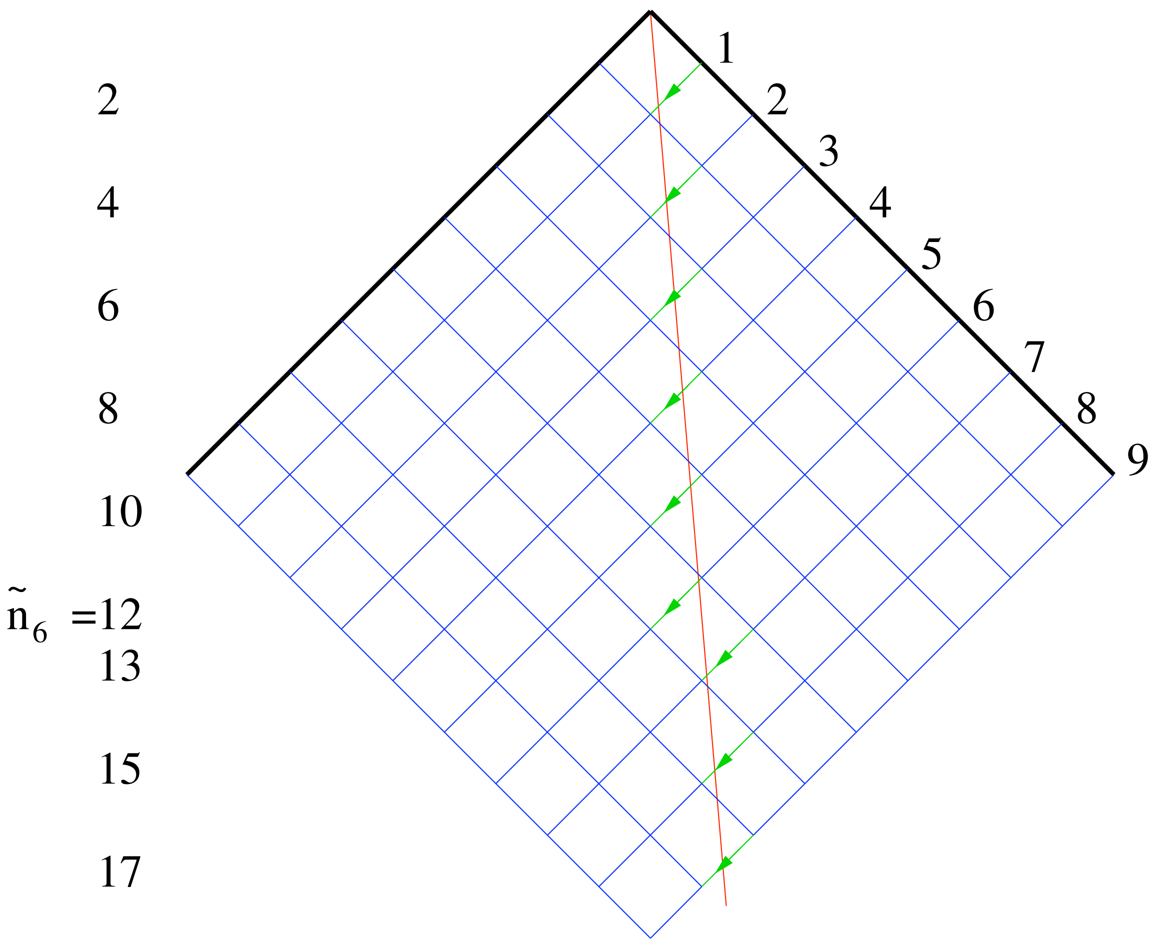
$$\binom{n_k - 1}{k - 1} = \mathcal{A}_k + \sum_{l=1}^{k-1} \mathcal{A}_l \binom{n_k - n_l}{k - l}$$

(combinatoire, convolution pour ν rationnel).

$$\frac{\Gamma(k/p_c - 1)}{k!\Gamma(k/p_c - k)} \leq \mathcal{A}_k \leq \frac{\Gamma(k/p_c + 1)}{k!\Gamma(k/p_c - k + 2)}$$

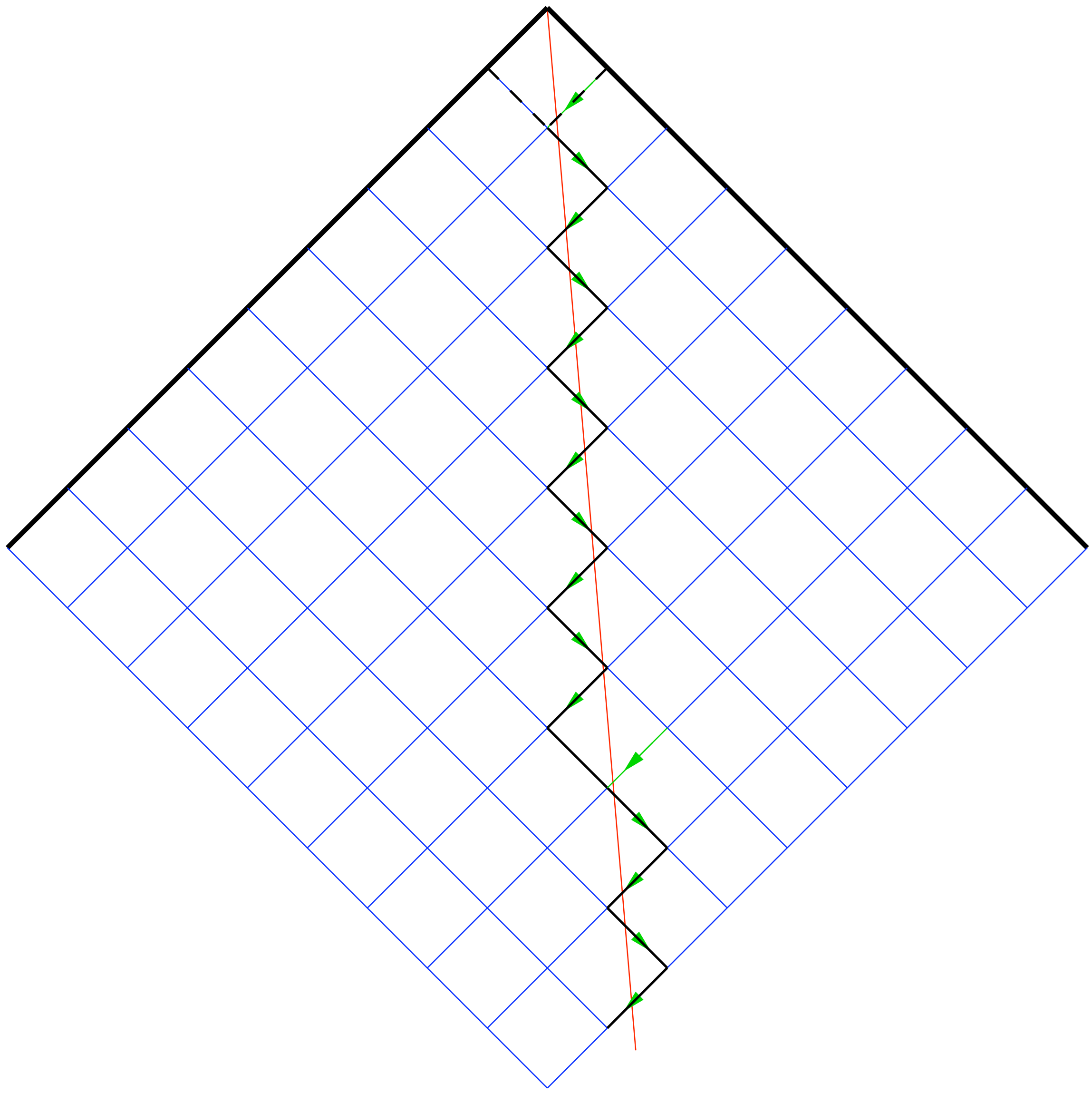
Combinatoire du coté droit





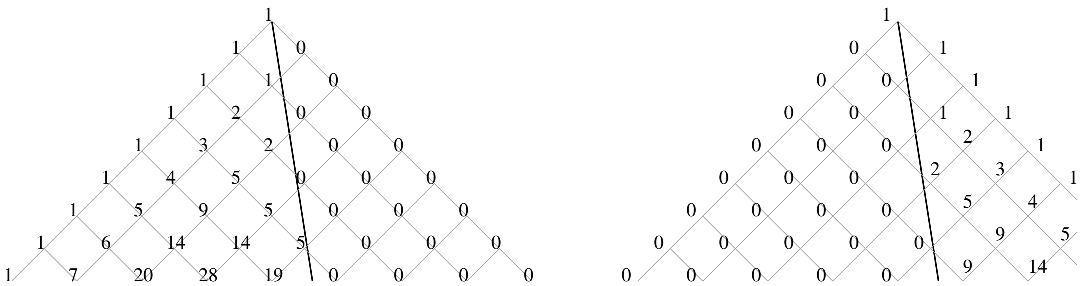
La suite des longueurs des marches qui traversent par la droite est complémentaire de celle des longueurs des marches qui traversent par la gauche.

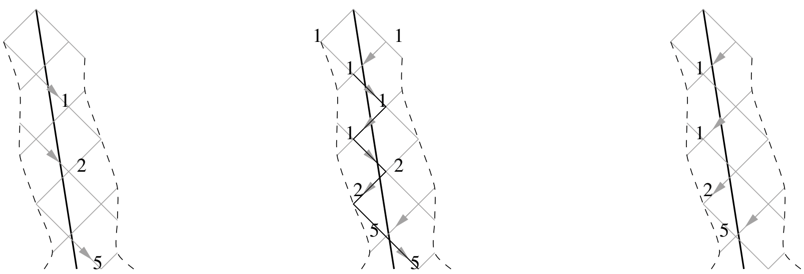
Marche canonique



On va a droite si le mur est à droite et à gauche si le mur est à gauche.

Fusion de la droite et de la gauche



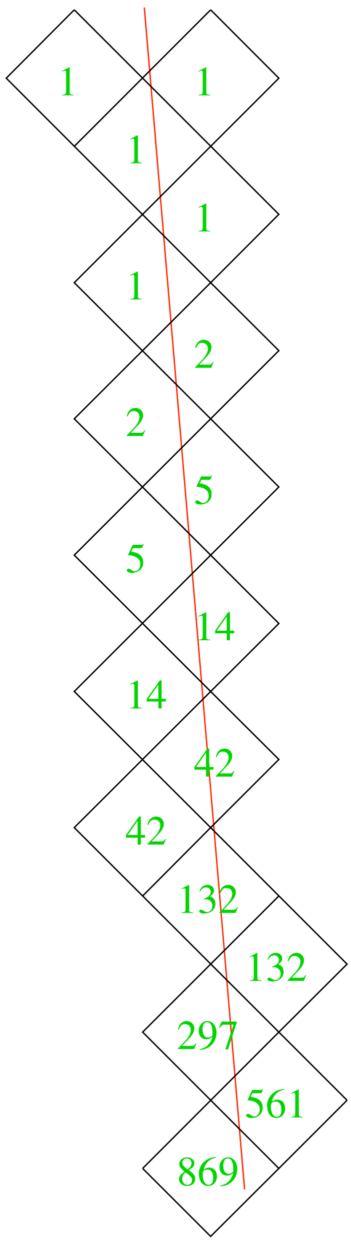


$$\{\mathcal{A}_k\} \text{ et } \{\tilde{\mathcal{A}}_k\} \Leftrightarrow \{\overline{\mathcal{A}}_n\}$$

$$\text{Si } 0 \leq p \leq p_c,\ p - \sum_k \mathcal{A}_k p^k q^{n_k - k} = 0$$

$$\text{Si } 1 \geq p \geq p_c,\ q - \sum_k \tilde{\mathcal{A}}_k q^k p^{\tilde{n}_k - k} = 0$$

Récurrence linéaire



t		
1	1	1
2	1	
3		1
4	1	
5		2
6	2	
7		5
8	5	
9		14
10	14	
11		42
12	42	
13	132	
14		132
15	297	
16		561
17	869	

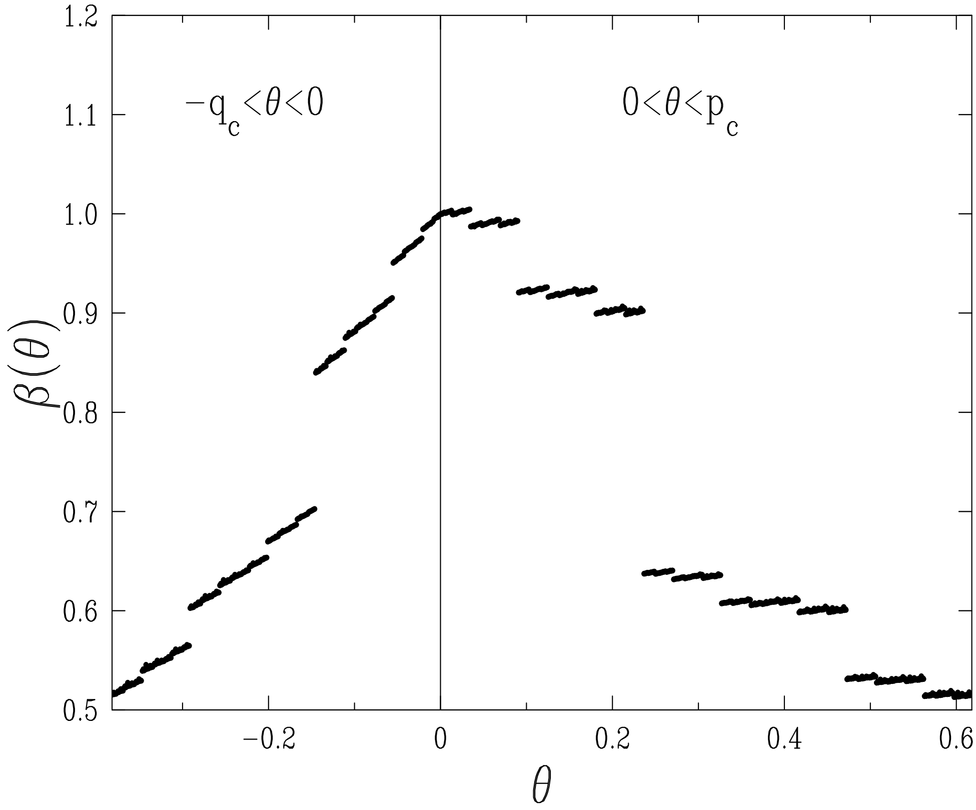
$$17 = 1 + 16 = 6 + 11 = 8 + 9 = 10 + 7 = 12 + 5$$

$$869 = 1 \,.\, 561 + 2 \,.\, 42 + 5 \,.\, 14 + 14 \,.\, 5 + 42 \,.\, 2$$

Asymptotique des $\overline{\mathcal{A}}_n$

$n \mapsto k_n$ tel que $\theta_n = np_c - k_n \in]-q_c, p_c[$

$$\overline{\mathcal{A}}_n \simeq \beta(\theta_n) \frac{1}{(2\pi p_c q_c n^3)^{1/2}} ({p_c}^{p_c} {q_c}^{q_c})^{-n}$$

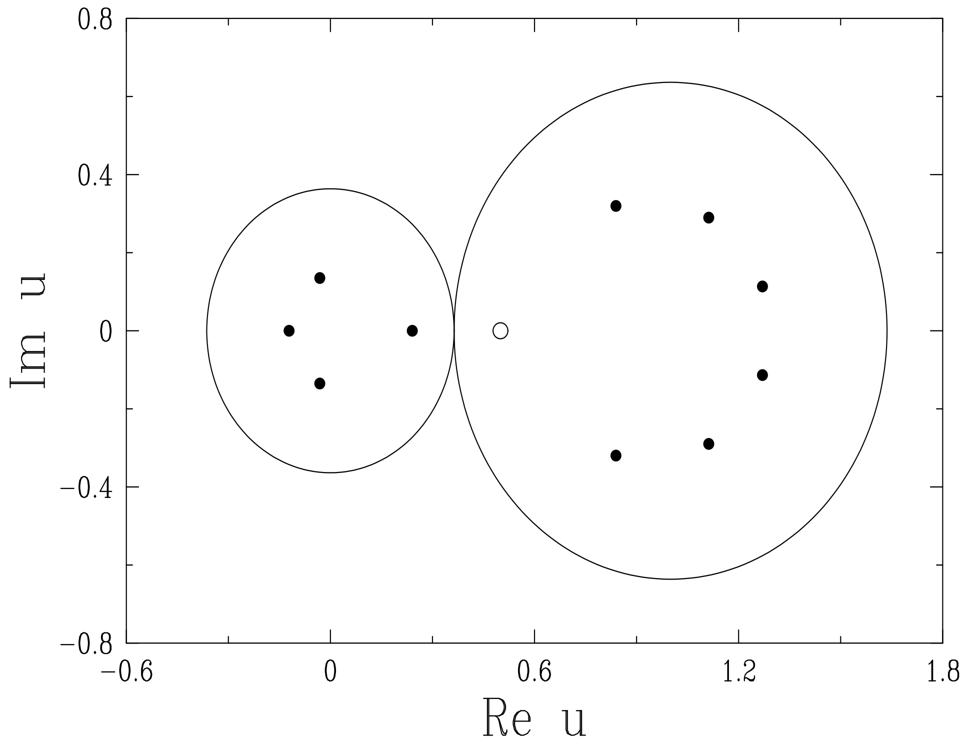


Cas rationnel $p_c = M/N < p$

Périodicité $n_{k+M} = n_k + N$

$$t \equiv p^M (1-p)^{N-M}$$

L'équation $t = u^M (1-u)^{N-M}$ a M petites racines u_α, $\alpha = 1, \cdots, M$



Par analyticité $0 = u_\alpha - \sum_{k\geq 1} \mathcal{A}_k u_\alpha^k (1-u_\alpha)^{n_k - k}$.

Méthode 1 : On regroupe
$F = p - \sum_k \mathcal{A}_k p^k (1-p)^{n_k - k}$ en
$F = p - \sum_{k=1}^{M} p^k (1-p)^{n_k - k} F_k(t)$

$0 = u_\alpha - \sum_{k=1}^{M} u_\alpha^k (1-u_\alpha)^{n_k-k} F_k(t)$.

On resoud pour les F_k. On en déduit F.

Méthode 2 : On définit D_α par
$\sum_1^M D_\alpha u_\alpha^k (1-u_\alpha)^{n_k-k} = p^k (1-p)^{n_k-k}$

pour $k = 1, \cdots, M$. Alors c'est vrai pour tous les k.

$$F = p - \sum_{\alpha=1}^{M} D_\alpha \sum_k \mathcal{A}_k u_\alpha^k (1-u_\alpha)^{n_k-k} = p - \sum_1^M D_\alpha u_\alpha$$

Méthode 3 : La dualité donne des équation quadratiques qui lient les $F_k(t)$ et les $\tilde{F}_k(t)$

Remarque : $F = \mathrm{Prob}(V_1 < v, \cdots, V_n < v, \cdots) \equiv F^-$ mais $F^+ = \mathrm{Prob}(V_1 \leq v, \cdots, V_n \leq v, \cdots))$ se traite par les mêmes méthodes. $1 - F^-/F^+$ est la probabilité que $V_1 = -1$ et $v \in \{V_1, V_2, \cdots\}$.

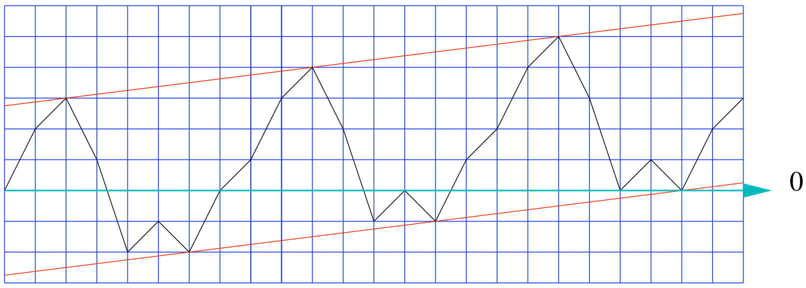
Exemples

La fonction F et les $\tilde{F}_k$ sont des fonctions algébriques de p et t.

Les cas $M = 1$ et $M = N - 1$ sont très simples.

$M = 1$: combinatoire

$$\mathcal{A}_k^- = \frac{(Nk-2)!}{k!\,(Nk-k-1)!}, \qquad \mathcal{A}_k^+ = \frac{(Nk)!}{k!\,(Nk-k+1)!}$$

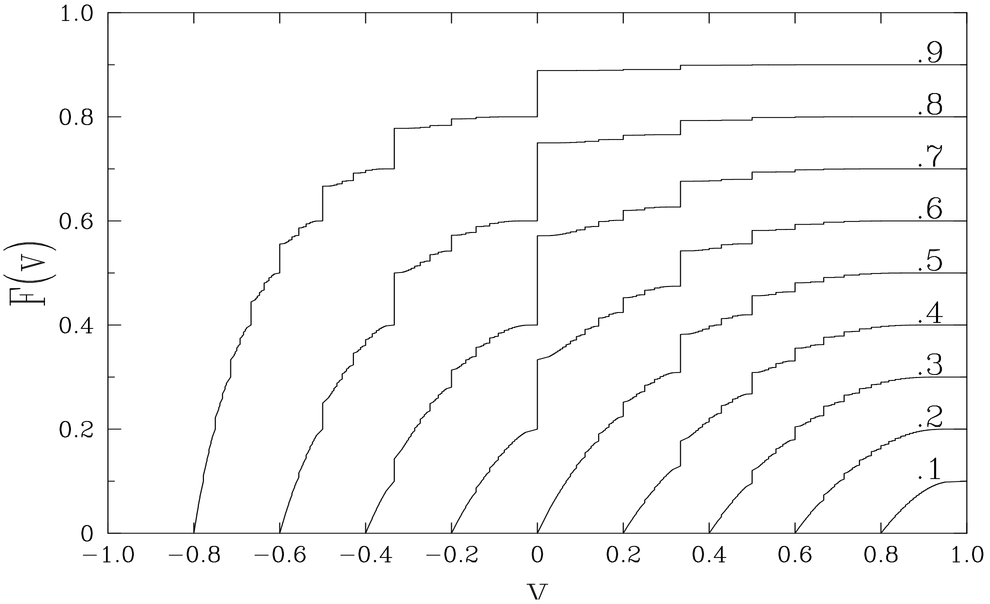


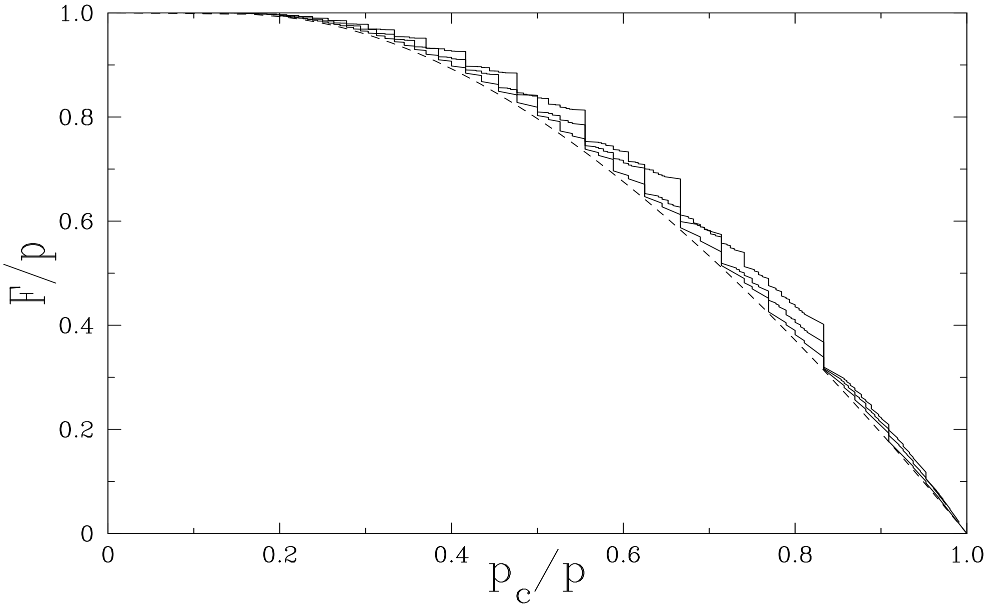
$M = N - 1$: probabilités

$$F^- = 1 - Nq \qquad F^+ = (1-Nq)/p \qquad Q = q$$

$M = 2$ et $N = 5$ est encore de genre 0, revètement de degré 10 de t.

Limite continue $p \to 0$





$$F/p \equiv 1 - \mu^* \qquad p_c/p \equiv 1/\mu$$

$$\mu e^{\mu} = \mu^* e^{-\mu^*} \qquad p \to 0 \quad \mu \text{ fixé}$$