# Un test effectif d'observabilité algébrique locale et ses applications en modélisation et en automatique

**Alexandre Sedoglavic**

Laboratoire GAGE, École polytechnique
F-91128 Palaiseau, France
http://medicis.polytechnique.fr/~sedoglav

# Plan

- Observabilité locale ;
- Un test effectif d'observabilité algébrique locale ;
- Observabilité algébrique locale et algèbre différentielle ;
- Techniques d'évaluation ;
- Observabilité globale ?

# Mécanisme de coagulation du sang

$$\left\{\begin{array}{lcl}
\dot{X} & = & -\frac{kcat_X \cdot X \cdot RVV}{km_X + X}, \\
\dot{X}_a & = & \frac{kcat_X \cdot X \cdot RVV}{km_X + X} - ki_{X_a} \cdot X_a \\
 & & -k_{PT} \cdot V_a \cdot X_a \cdot PL + k_{PL} \cdot PT, \\
\dot{V} & = & -\frac{kcat_V \cdot V \cdot II_a}{km_V + V}, \\
\dot{V}_a & = & \frac{kcat_V \cdot V \cdot II_a}{km_V + V} - k_{PT} \cdot V_a \cdot X_a \cdot PL + k_{PL} \cdot PT, \\
\dot{PL} & = & -k_{PT} \cdot V_a \cdot X_a \cdot PL + k_{PL} \cdot PT, \\
\dot{PT} & = & k_{PT} \cdot V_a \cdot X_a \cdot PL - k_{PL} \cdot PT, \\
\dot{II} & = & -\frac{kcat_{II} \cdot II \cdot PT}{km_{II} + II} - \frac{kcat_2 \cdot II \cdot X_a}{km_2 + II}, \\
\dot{II}_a & = & \frac{kcat_{II} \cdot II \cdot PT}{km_{II} + II} + \frac{kcat_2 \cdot II \cdot X_a}{km_2 + II} \\
 & & -ki_{IIaa2M} \cdot II_a - kiIIaATIII \cdot II_a, \\
II\dot{a}a2M & = & kiIIaATIII \cdot II_a, \\
y & = & II_a + \frac{556}{1000} IIaa2M.
\end{array}\right.$$

# Observabilité structurelle

Processus physique décrit par une *structure* $\Sigma$ avec des *paramètres* $\Theta$ non spécialisés.

$$\Sigma \quad \begin{cases} \dot{\Theta} &= 0, \\ \dot{X} &= F(X, U, \Theta), \\ Y &= G(X, U, \Theta). \end{cases}$$

$$F := (f_1, \ldots, f_n) \subset \mathbb{Q}(X, U, \Theta),$$
$$G := (g_1, \ldots, g_m) \subset \mathbb{Q}(X, U, \Theta).$$

Un *modèle* est défini par une spécialisation des paramètres d'une structure.

**Définition 1** *Les paramètres d'un modèle sont localement observables dans une structure*

$$\Leftrightarrow$$

*tout modèle ayant le même comportement entrée sortie, admet localement les mêmes paramètres.*

## Différentes approches

- R. Kalman, cas linéaire ;
- H. Sussman, S. Vajda, etc.
  “ similarity transformation approach ” ;
- Y. Lecourtier, A. Raksanyi, É. Walter, etc.
  séries génératrices ;

**Notre point de vue repose sur** :

- K.R. Godfrey, R. Hermann, H. Pohjanpalo, etc.
  tester le rang de la matrices jacobienne des coefficients de la série de Taylor des sorties ;
- M. Fliess, S.T. Glad, L. Ljung, etc.
  algèbre différentielle appliquée à l'automatique ;
- F. Boulier, É. Hubert, F. Ollivier, B. Sadik, etc.
  algèbre différentielle effective.

# Notations

$$
\Sigma \quad \left\{ \begin{array}{lcll} \dot{\Theta} & = & 0, & \#\Theta = \ell \\ \dot{X} & = & F(X, U, \Theta), & \#X = n,\ \#U = r \\ Y & = & G(X, U, \Theta). & \#Y = m \leq n. \end{array} \right.
$$

- $d$ est une borne supérieur sur le degré des numérateurs et des dénominateurs ;
- $h$ est une borne supérieur sur la *taille* des coefficients ;

- $\Sigma$ est représenté par un programme sans test constitué de $L$ opérations ;
- Par exemple, $\mathtt{e} := (\mathtt{x} + \mathtt{1})^5$ est représenté par $(\mathtt{t}_1 := \mathtt{x} + \mathtt{1}, \mathtt{t}_2 := {\mathtt{t}_1}^2, \mathtt{t}_3 := {\mathtt{t}_2}^2, \mathtt{e} := \mathtt{t}_3\mathtt{t}_1)$.

# Principale contribution

*Il existe un algorithme qui*

- *détermine l'ensemble des variables observables ;*
- *indique le nombre de variables non observables devant être supposées connues pour obtenir un modèle observable ;*
- *nécessite un nombre d'opérations arithmétiques borné par*

$$\mathcal{O}((n+\ell)^5(n+m)L).$$

*Soit $\mu$ un entier positif arbitraire et $D := mrn\ell dh$.*
*Si les calculs sont fait modulo un premier*

$$p > 2\mu D^2 \ln(\mu D)$$

*alors la probabilité d'obtenir une réponse correcte est au moins $(1-1/\mu)^2$.*

- $L = 91,\ n = 9,\ \ell = 13,\ m = 1,\ d = 5,\ h = 4$ ;

- $\mu = 3000 \Rightarrow$ probabilité de succès $\geq .9993$ ;

- calculs modulo 10859887151 ;



- temps de calcul en Maple : 14 s ;

- les paramètres $\{kc_X, km_X, kc_V, km_V, k_{PT}, kc_{II}, kc_2\}$ et
  les variables $\{X, Xa, V, Va, PL, PT\}$ ne sont pas observables.

Symétries laissant invariants le champ de vecteurs, l'entrée et la sortie :

$$
\begin{array}{ccc}
X & \rightarrow & \lambda X \\
Xa & \rightarrow & \lambda Xa \\
V & \rightarrow & \lambda V \\
Va & \rightarrow & \lambda Va
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
PL & \rightarrow & \lambda PL \\
PT & \rightarrow & \lambda PT \\
kc_X & \rightarrow & \lambda kc_X \\
km_X & \rightarrow & \lambda km_X
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
kc_V & \rightarrow & \lambda kc_V \\
km_V & \rightarrow & \lambda km_V \\
k_{PT} & \rightarrow & k_{PT}/\lambda^2 \\
kc_{II} & \rightarrow & kc_{II}/\lambda \\
kc_2 & \rightarrow & kc_2/\lambda
\end{array}
$$

# Algèbre différentielle

$k\{U\}$ algèbre de polynômes sur un corps $k$

- un nombre $\infty$ d'indéterminées $\{U^{(j)} | j \in \mathbb{N}\}$ ;
- associée à une dérivation $\delta$ telle que $\delta u^{(j)} = u^{(j+1)}$.

$k\langle U\rangle$ représente son corps de fractions.

(J.F. Ritt, etc.)

On considère $\mathcal{K} := k\langle U\rangle(X, \Theta)$ muni de la dérivation de Lie :

$$\mathcal{L} := \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{r} {u_i}^{(j+1)} \frac{\partial}{\partial {u_i}^{(j)}}.$$

(R. Kalman, H. Sussman, etc.)

Ainsi, $Y := G(X, U, \Theta) \Rightarrow Y^{(j)} = \mathcal{L}^j G(X, U, \Theta)$.

# Observabilité algébrique locale

**Proposition :** (M. Fliess, S. Diop, T. Glad, L. Ljung)

$\Sigma$ *est observable* $\Leftrightarrow$ $k\langle U, Y\rangle \hookrightarrow \mathcal{K}$ *est purement algébrique.*

**Exemple :**

$$\begin{cases} \dot{x}_3 & = & \theta x_1, \\ \dot{x}_2 & = & x_3/x_2, \\ \dot{x}_1 & = & x_2/x_1, \\ y & = & x_1. \end{cases}$$

Les différentiations successives de la sortie montrent que :

$$x_1 = y,\ x_2 = y\dot{y},\ x_3 = y\dot{y}(\dot{y}^2 + y\ddot{y}),$$
$$\theta y = (\dot{y}^2 + y\ddot{y})^2 + y\dot{y}\big(3\dot{y}\ddot{y} + yy^{(3)}\big).$$

**Problème :**

Une borne supérieure sur l'ordre de dérivation ?

## Extension de corps

**Proposition :** $k\langle U, Y\rangle \simeq k\langle U\rangle\big(Y, \ldots, Y^{(n+\ell)}\big)$.

La théorie des différentielles de Kähler permet de calculer le degré de transcendance.

- $\big(Y, \ldots, Y^{(n+\ell)}\big)$ contient une base de transcendance de $k\langle U, Y\rangle$ sur $k\langle U\rangle$ ;
- $Y^{(j)} = \mathcal{L}^j G(X, U, \Theta)$ ;

$\Rightarrow$ le degré de transcendance de $k\langle U, Y\rangle \hookrightarrow \mathcal{K}$ est égal à :

$$(n+\ell) - \mathrm{rank}_{\mathcal{K}} \frac{\partial \mathcal{L}^j G_{j=0,\ldots,n+\ell}}{\partial(X, \Theta)}.$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\Sigma \arrow[r, "\text{calcul formel}"] \arrow[d] & \left( \dfrac{\partial \big(\mathcal{L}^i G\big)_{0 \le i \le \nu}}{\partial (X, \Theta)} \right) \arrow[d, "\left\{ \begin{array}{ccl} X & \leftarrow & X_0 \in \mathbb{Z}^n, \\ \Theta & \leftarrow & \widetilde{\Theta} \in \mathbb{Z}^{\ell}, \\ U & \leftarrow & \widetilde{U} \in (\mathbb{Z}[t])^r. \end{array} \right."] \\
\mathbf{\Psi}_{\widetilde{\Theta}}(X_0, \widetilde{U}) \arrow[r, "\text{calcul numérique}"] & \left( \dfrac{\partial \big(\mathcal{L}^i G\big)_{0 \le i \le \nu}}{\partial (X, \Theta)} \right) \big(X_0, \widetilde{\Theta}, \widetilde{U}\big)
\end{tikzcd}
$$

# Aspects probabilistes

Un polynôme non nul prend probablement une valeur non nulle en un point pris au hasard.

**Théorème :**

- *R. Zippel, J. Schwartz :* $q \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_s]$, $D := \deg q$ *et* $\Omega \subset \mathbb{N}$. *Un point dans* $\Omega^s$ *est un zéro de* $q$ *avec une probabilité* $\leq D/\#\Omega$ *;*
- *"version arithmétique" :* $\forall (a, b) \in \mathbb{N}^2$, $b < a < c$, *soit* $p$ *un nombre premier*
  $b + 1 < p < 2b$.
  $p$ *divise* $a$ *avec une probabilité* $\leq 2 \ln c/b$.

**Proposition :** *Si les calculs sont fait modulo un nombre premier*

$$p > 2\mu(mrn\ell dh)^2 \log(\mu mrn\ell dh),$$

*la probabilité de succès est* $> (1 - 1/\mu)^2$.

# Matrice jacobienne

$$\Phi(X,t) := X + \sum_{j\in\mathbb{N}^\star} \mathcal{L}^j F(X,U,\Theta)\, t^j \text{ associé avec } \dot{X} = F(X,U,\Theta).$$

$$Y(t) := G\big(\Phi(X,t),U,\Theta\big) = G(X,U,\Theta) + \sum_{j\in\mathbb{N}^\star} \mathcal{L}^j G(X,U,\Theta)\, t^j.$$

$$\frac{\partial\big(\mathrm{coeffs}\big(Y(t)\big)\big)}{\partial(X,\Theta)} = \frac{\partial(\mathcal{L}^j G)_{0\le j\le n+\ell}}{\partial(X,\Theta)} = \mathrm{coeffs}\left(\frac{\partial G}{\partial X}\frac{\partial\Phi(X,t)}{\partial X}, \frac{\partial G}{\partial X}\frac{\partial\Phi(X,t)}{\partial\Theta} + \frac{\partial G}{\partial\Theta}\right).$$

**Problème :** calcul de $\Phi(X,t)$,

$\Gamma(t) := \partial\Phi(X,t)/\partial X$ et

$\Lambda(t) := \partial\Phi(X,t)/\partial\Theta$.

# Système variationnel linéaire

$$P(\dot{X}, X, U, \Theta) := \text{ numérateurs de } \dot{X} - F(X, U, \Theta).$$

$\Phi(X,t)$, $\Gamma(t) := \partial\Phi(X,t)/\partial X$ et $\Lambda(t) := \partial\Phi(X,t)/\partial\Theta$ sont solutions du système suivant :

$$\mathbf{\Psi_\Theta} \quad \left\{ \begin{array}{c} P(\dot{\Phi}, \Phi, U, \Theta) = 0, \\ \frac{\partial P}{\partial \dot{X}}\big(\Phi, \Theta\big)\dot{\Gamma} + \frac{\partial P}{\partial X}\big(\dot{\Phi}, \Phi, \Theta\big)\Gamma = 0, \\ \frac{\partial P}{\partial \dot{X}}\big(\Phi, \Theta\big)\dot{\Lambda} + \frac{\partial P}{\partial X}\big(\dot{\Phi}, \Phi, \Theta\big)\Lambda + \frac{\partial P}{\partial \Theta}\big(\dot{\Phi}, \Phi, \Theta\big) = 0. \end{array} \right.$$

avec les conditions initiales $\Phi(X, 0) := X$,
$\Gamma(0) := \mathrm{Id}_{n\times n}$ et $\Lambda(0) := 0_{n\times \ell}$.

# Un opérateur de Newton



$M(n+\ell)$ coût de la multiplication de 2 séries à l'ordre $n+\ell$ ;

$N(n+\ell)$ coût de la multiplication de 2 matrices carrées de taille $n+\ell$ ;

**Proposition :** *Le calcul de la matrice jacobienne spécialisée nécessite au plus :*

$$\mathcal{O}(M(n+\ell)\big(N(n+\ell)+(n+m)L\big))$$

*opérations arithmétiques.*

R.P. Brent, H.T Kung, etc. :

$$\begin{aligned}\mathbf{\Psi}_{\mathbf{\Theta}}(\Phi,\Gamma,\Lambda) = \;& \mathbf{\Psi}_{\mathbf{\Theta}}(\Phi \bmod t^{2^j}, \Gamma \bmod t^{2^j}, \Lambda \bmod t^{2^j}) + \\ & \tfrac{\partial \Psi_{\Theta}}{\partial(\dot\Phi,\dot\Gamma,\dot\Lambda)} \dot E_{j+1} + \tfrac{\partial \Psi_{\Theta}}{\partial(\Phi,\Gamma,\Lambda)} E_{j+1} \; + \ldots\end{aligned}$$

avec

$$E_{j+1} = \big(\Phi - (\Phi \bmod t^{2^j}), \Gamma - (\Gamma \bmod t^{2^j}), \Lambda - (\Lambda \bmod t^{2^j})\big) \bmod t^{2^{j+1}}.$$



$$\Downarrow$$

$$X_0 \in \mathbb{Z},\;\; \Gamma_0 := \mathrm{Id}_{n\times n},\;\; \Lambda_0 := 0_{n\times \ell}.$$

$$\frac{\partial P}{\partial \dot X}\big(X_j, \widetilde{\Theta}\big)\dot E_{j+1} + \frac{\partial P}{\partial X}\big(\dot X_j, X_j, \widetilde{\Theta}\big) E_{j+1} + \mathbf{\Psi}_{\widetilde{\mathbf{\Theta}}}\big(\dot X_j, \dot\Gamma_j, \dot\Lambda_j, X_j, \Gamma_j, \Lambda_j\big) = 0 \bmod t^{2^{j+1}}$$

$$\big(X_{j+1}, \Gamma_{j+1}, \Lambda_{j+1}\big) = \big(X_j, \Gamma_j, \Lambda_j\big) + E_{j+1}.$$

Contrôlabilité linéaire : forme de Brunovsky

$$H_n \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{\theta}_1 & = & (\theta_2 - \theta_1) n^2, \\ \dot{\theta}_2 & = & (\theta_3 - 2\theta_2 + \theta_1) n^2, \\ & \vdots & \\ \dot{\theta}_{n-1} & = & (\theta_n - 2\theta_{n-1} + \theta_{n-2}) n^2. \end{array} \right.$$

$\theta_i$ est *paramétrisable* par $\theta_1$ et ses dérivées :

$$\begin{array}{lcl} \theta_2 & = & \theta_1 + \frac{1}{n^2}\,\dot{\theta}_1, \\ \theta_3 & = & \theta_1 + \frac{3}{n^2}\,\dot{\theta}_1 + \frac{1}{n^4}\,\ddot{\theta}_1, \\ \theta_4 & = & \theta_1 + \frac{6}{n^2}\,\dot{\theta}_1 + \frac{5}{n^4}\,\ddot{\theta}_1 + \frac{1}{n^6}\,{\theta_1}^{(3)}. \end{array}$$

Plus précisément :

$$\theta_i = 2\theta_{i-1} - \theta_{i-2} + \frac{\ddot{\theta}_{i-1}}{n^2}, \text{ pour } 2 \leq i \leq n,$$

Si $nx$ est un entier pour $x \in ]1/n, 1[$, on a :

$$Q(p,q) = \frac{p!}{(p-q)!\,p^{\,q}},$$

$$\theta_{nx} = \sum_{j=0}^{nx-1} Q(nx+j-1, 2j) \frac{{\theta_1}^{(j)}}{(2j)!} \left( x + \frac{j-1}{n} \right)^{2j}.$$

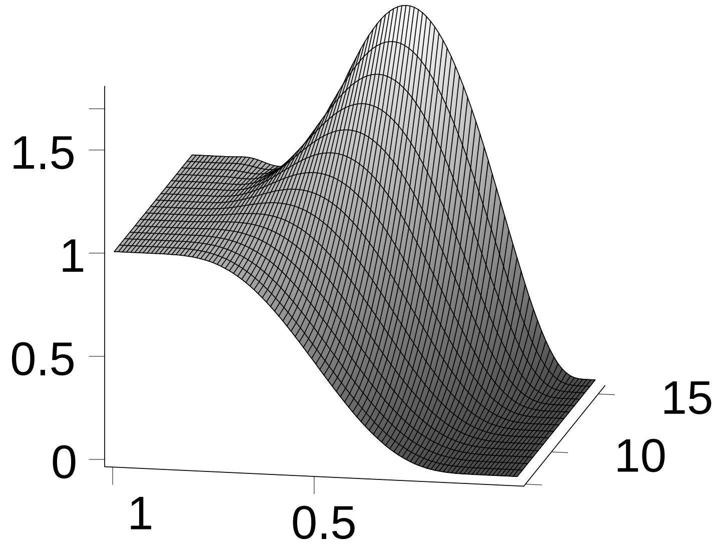
$$H \quad \begin{cases} \partial_t \theta - \partial_{x^2}\theta = 0, \\ \partial_x \theta(t,0) = 0, \\ \theta(t,1) = u(t). \end{cases}$$

Méthode numérique des différences finies :

$$\theta(t,x+h)-\theta(t,x)=h\partial_x\theta(t,x)+\frac{h^2}{2!}\partial_{x^2}\theta(t,x)+\mathcal{O}(h^3)$$

$$\partial_{x^2}\theta_i = \frac{\theta_{i+1}-2\theta_i+\theta_{i-1}}{h^2}+\mathcal{O}(h^3).$$

$H_n$ *semidiscrétisation* de $H$ pour $h = 1/n$.



# Modèle d'un moteur à induction

Systèmes plats : Fliess, Lévine, Martin, Mounier, Rouchon etc.

Un exemple de R. Marino et al :

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
\sigma & = & L_s - \frac{M^2}{L_r}, \qquad \gamma_N \quad = \quad \frac{M^2 R_r + {L_r}^2 R_s}{\sigma {L_r}^2}, \\
 & & \\
\dot{\omega} & = & \frac{n_p M}{J L_r}(\Psi_x I_y - \Psi_y I_x) - \frac{T_L}{J}, \\
\dot{\Psi}_x & = & -\frac{R_r}{L_r}\Psi_x - n_p \omega \Psi_y + \frac{R_r}{L_r} M I_x, \\
\dot{\Psi}_y & = & n_p \omega \Psi_x - \frac{R_r}{L_r}\Psi_y + \frac{R_r}{L_r} M I_y, \\
\dot{I}_x & = & \frac{M R_r}{\sigma {L_r}^2}\Psi_x + \frac{n_p M}{\sigma L_r}\omega \Psi_y - \gamma_N I_x + \frac{u_x}{\sigma}, \\
\dot{I}_y & = & -\frac{n_p M}{\sigma L_r}\omega \Psi_x + \frac{M R_r}{\sigma {L_r}^2}\Psi_y - \gamma_N I_y + \frac{u_y}{\sigma}, \\
 & & \\
y_1 & = & \omega, \\
y_2 & = & {\Psi_x}^2 + {\Psi_y}^2.
\end{array}
\right.
$$

# Références

Page personnelle :
http://medicis.polytechnique.fr/~sedoglav

Site web de **TERA** (Turbo Evaluation and Rapid Algorithms) :
http://tera.medicis.polytechnique.fr

Site web de **MEDICIS** (centre de ressources) :
http://www.medicis.polytechnique.fr