Analyse algébrique effective en automatique linéaire

Alban Quadrat

University of Leeds,
School of Mathematics,
Leeds LS2 9JT,
United-Kingdom

quadrat@amsta.leeds.ac.uk

tél: 00-44-113-273-5129

Systèmes de contrôle multidimensionnels

I) **Systèmes de contrôle 1-D**:

- Système de Kalman:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)\, x(t) + B(t)\, u(t), \\ y(t) = C(t)\, x(t) + D(t)\, u(t). \end{cases}$$

- Système polynômial:

$$P\left(t, \frac{d}{dt}\right)\, y(t) - Q\left(t, \frac{d}{dt}\right)\, u(t) = 0,$$

II) **Systèmes de contrôle n-D**:

- Système à retards constants:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i(t)\, x(t - t_i) + \sum_{i=1}^{n} B_i(t)\, u(t - t_i), \\ y(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i(t)\, x(t - t_i) + \sum_{i=1}^{n} D_i(t)\, u(t - t_i). \end{cases}$$

$$P\left(\delta_{t_1}, ..., \delta_{t_n}, \frac{d}{dt}\right)\, y(t) - Q\left(\delta_{t_1}, ..., \delta_{t_n}, \frac{d}{dt}\right)\, u(t) = 0.$$

- Filtre n-D: $P\,(z_1, ..., z_n)\, y - Q\,(z_1, ..., z_n)\, u = 0$.

III) **Systèmes sous-determinés d'EDP**:

Système $P(d_1, \ldots, d_n)\, z(x_1, \ldots, x_n) = 0$ dépendant d'au moins une fonction arbitraire en $x_1, \ldots, x_n$.

$\Rightarrow$ élasticité, électromagnétisme, hydrodynamique...

Théorie des modules en automatique

1) Un **système de contrôle linéaire** est défini par une **matrice à coefficients dans un anneau** A.

-$A = \mathbb{R}[\frac{d}{dt}] \subseteq K[\frac{d}{dt}], \quad K = \mathbb{R},\ \mathbb{R}(t),\ C^{\infty}(I)$.

-$A = \mathbb{R}[\frac{d}{dt}, \delta_{t_1}, \ldots, \delta_{t_n}] \cong \mathbb{R}[\chi_1, \ldots, \chi_n]$.

-$K[\frac{d}{dt}] \ \subseteq \ K[d_1, \ldots, d_n] \ \supseteq \ \mathbb{R}[\chi_1, \ldots, \chi_n]$.

2) **Étude des propriétés** des systèmes

$\Rightarrow$ **algèbre linéaire sur l'anneau** A.

3) **Algèbre linéaire sur un anneau** A

= **théorie des modules sur** A.

4) **Utilisation de la théorie des modules** en **automatique linéaire** (Kalman, 1965).

a) On associe à un système de contrôle linéaire un A-module M.

b) Les propriétés du système sont alors des propriétés du module M.

c) Utilisation de la théorie des modules, de l'algèbre homologique et du calcul formel.

Analyse algébrique en automatique linéaire

1. Les systèmes multidimensionnels sont décrits par un **opérateur différentiel** $\mathcal{D}$ (Willems 1980) ou par un **système d'équations aux dérivées partielles**.

2. On associe à $\mathcal{D}$ un **module différentiel** M.

   Ce point de vue est appelé **analyse algébrique** (Malgrange, Palamodov, Kashiwara 1970).

   L'analyse algébrique a été introduite en théorie du contrôle en 1990 (Fliess, Oberst, Pommaret).

3. La **classification** des modules par des méthodes d'algèbre homologique donne une classification des systèmes suivant leurs propriétés algébriques.

4. Obtention de **tests effectifs** pour vérifier ces propriétés algébriques en terme de **modules** ou **d'opérateurs différentiels**.

5. Ces tests permettent de **vérifier les propriétés des systèmes de contrôle** (contrôlablité, observabilités, primalités, équivalences...).

Opérateurs différentiels

• Un **opérateur différentiel** d'ordre q est défini par

$$\begin{array}{cccl} E & \xrightarrow{\mathcal{D}} & F \\ \xi(x) & \longmapsto & \eta(x) = \left(\sum_{0\leq|\mu|\leq q} a_k^{\tau\mu}(x)\partial_\mu \right) \xi(x), \end{array}$$

avec:

$$\mu = (\mu_1, ..., \mu_n), \qquad |\mu| = \mu_1 + ... + \mu_n,$$

$$x = (x_1, ..., x_n), \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \partial_\mu = \partial_1^{\mu_1} ... \partial_n^{\mu_n}.$$

• Soit $\eta \in F$. Les **conditions nécessaires** à l'existence de $\xi \in E$ vérifiant

$$\mathcal{D}\,\xi = \eta$$

sont appelées **conditions de compatibilité** de $\mathcal{D}$. Elles prennent la forme d'un opérateur différentiel:

$$\mathcal{D}_1\,\eta = 0.$$

• Une suite d'opérateurs différentiels

$$E \xrightarrow{\mathcal{D}} F \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1$$

est dite **formellement exacte** si $\mathcal{D}_1$ engendre **toutes** les conditions de compatibilité de $\mathcal{D}$.

• Pour tout $\mathcal{D} : E \to F$, il existe une suite **formellement exacte**

$$0 \longrightarrow \Theta \longrightarrow E \xrightarrow{\mathcal{D}} F \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1 \xrightarrow{\mathcal{D}_2} \ldots$$

où Θ repésente les solutions de $\mathcal{D}$.

• Pour tout $\mathcal{D} : E \to F$, il existe une suite **canonique** de longueur au plus $n+1$,

$$0 \longrightarrow \Theta \longrightarrow E \xrightarrow{\mathcal{D}_0} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} \ldots \xrightarrow{\mathcal{D}_n} F_n \longrightarrow 0,$$

appelée **suite de Janet**, dans laquelle

$$\Theta = \ker \mathcal{D}_0 = \ker \mathcal{D}$$

et $\mathcal{D}_1, ..., \mathcal{D}_n$ sont d'ordre 1.

• **Exemple** La suite grad-rot-div dans $\mathbb{R}^3$ est formellement exacte:

$$\star\ \mathcal{D}_0\, \xi = \eta \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{D}_1\, \eta = 0$$

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_1 \xi = \eta_1 \\ \partial_2 \xi = \eta_2 \\ \partial_3 \xi = \eta_3 \end{array}\right. \qquad \Rightarrow \qquad \left\{\begin{array}{l} \partial_2 \eta_3 - \partial_3 \eta_2 = 0 \\ \partial_3 \eta_1 - \partial_1 \eta_3 = 0 \\ \partial_1 \eta_2 - \partial_2 \eta_1 = 0 \end{array}\right.$$

$$\star\ \mathcal{D}_1\, \eta = \zeta \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{D}_2\, \zeta = 0$$

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_2 \eta_3 - \partial_3 \eta_2 = \zeta_1 \\ \partial_3 \eta_1 - \partial_1 \eta_3 = \zeta_2 \\ \partial_1 \eta_2 - \partial_2 \eta_1 = \zeta_3 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \partial_1 \zeta_1 + \partial_2 \zeta_2 + \partial_3 \zeta_3 = 0$$

Anneaux des opérateurs différentiels

• Un **corps différentiel** K est un corps muni de dérivations $\partial_1, ..., \partial_n$ telles que:

- $\partial_i \, \partial_j = \partial_j \, \partial_i = \partial_{ij}$,
- $\partial_i(a+b) = \partial_i \, a + \partial_i \, b$,,
- $\partial_i(a \, b) = (\partial_i \, a) \, b + a \, \partial_i \, b$,,
- $\partial_i(a/b) = ((\partial_i a) \, b - a \, (\partial_i \, b))/b^2$.

• **Exemple** Nous avons les corps différentiels:

$$(\mathbb{R}(t), d/dt), \quad (\mathbb{R}(x_1, \ldots, x_n), \{\partial_1, \ldots, \partial_n\}).$$

• Soit $D = K[d_1, ..., d_n]$ l'anneau des **opérateurs différentiels scalaires** à coefficients dans K.

$$P = \sum_{0 \leq |\mu| < \infty} a^\mu \, d_\mu \in D,$$

avec

$$a^\mu \in K, \quad d_\mu = d_1^{\mu_1} ... \, d_n^{\mu_n}$$

et

$$d_i(a \, d_j) = a \, d_i \, d_j + (\partial_i a) \, d_j, \; a \in K$$

Modules différentiels

• On représente l'opérateur $\mathcal{D}$ par une matrice R et on définit le $D = K[d_1, ..., d_n]$-morphisme:

$$\begin{array}{ccc} D^l & \xrightarrow{.R} & D^m \\ (P_1 \; ... \; P_l) & \longmapsto & (P_1 \; ... \; P_l) \overbrace{\left(\; \sum_{0 \leq |\mu| \leq q} a_k^{\tau\mu} d_\mu \; \right)}^{R}, \end{array}$$

où les vecteurs de D^l et D^m sont vecteurs **lignes**.

• On définit alors le D-**module à gauche** M par

$$M = \mathrm{coker}(.R) = D^m / D^l \, R,$$

$\Rightarrow$ M est le quotient des combinaisons linéaires des inconnues et de leurs dérivées par les combinaisons linéaires des lignes de R et de leurs dérivées.

• Une suite $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ est **exacte** si:

$$\mathrm{im}\, f = \ker g.$$

• **Exemple** On associe à l'opérateur $\mathcal{D}$

$$\xi \to (\partial_3 \xi + \xi = \eta^1, \partial_2 \xi = \eta^2, \partial_1 \xi - \xi = \eta^3)^t,$$

le $D = \mathbb{R}[d_1, d_2, d_3]$-morphisme suivant:

$$\begin{array}{ccc} D^3 & \xrightarrow{.R} & D \\ (P_1 \ P_2 \ P_3) & \longmapsto & (P_1 \ P_2 \ P_3) \begin{pmatrix} d_3 + 1 \\ d_2 \\ d_1 - 1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Nous avons la suite exacte:

$$D^3 \xrightarrow{.R} D \xrightarrow{\pi} M = D/D^3 R \longrightarrow 0.$$

$\{e_1, e_2, e_3\}$:	la base canonique de D^3,
1 :	la base canonique de D,
$y = \pi(1)$:	la classe de 1 dans M.

Nous avons dans M les équations suivantes

$$\begin{cases} \pi(e_1 R) = \pi(d_3 + 1) = d_3 y + y = 0, \\ \pi(e_2 R) = \pi(d_2) = d_2 y = 0, \\ \pi(e_3 R) = \pi(d_1 - 1) = d_1 y - y = 0, \end{cases}$$

ainsi que leurs combinaisons D-linéaires.

Classification des modules

- **Définitions**

- M est **libre** si $M \cong D^r$, pour un certain $r \in \mathbb{N}$.

- M est **projectif** si $\exists\, N$ D-module et $r \in \mathbb{N}$:

$$D^r \cong M \oplus N.$$

- M est **réflexif** si le D-morphisme

$$\epsilon : M \longrightarrow \hom_D(\hom_D(M, D), D),$$

défini par $\epsilon(m)(f) = f(m)$, est un isomorphisme.

- Le sous-module de **torsion** de M est défini par:

$$t(M) = \{m \in M \mid \exists\, 0 \neq P \in D : P\, m = 0\}.$$

- M est **sans-torsion** si $t(M) = 0$.

- M est **de torsion** si $t(M) = M$.

- **Théorème:**

1. libre $\subseteq$ projectif $\subseteq$ ... $\subseteq$ réflexif $\subseteq$ sans-torsion.

2. D anneau principal $\Rightarrow$ sans-torsion=libre.

3. $D = k[d_1, \ldots, d_n]$, $k = \{a \in K | \partial_i a = 0, \forall\, i\}$

$\Rightarrow$ projectif=libre (Quillen-Suslin 1976).

Adjoint formel

• **L'adjoint formel** de $\mathcal{D} : E \to F$ est l'opérateur

$$\tilde{\mathcal{D}} : \tilde{F} \longrightarrow \tilde{E}$$

défini par:

$$< \mu, \mathcal{D}\, \xi > = < \tilde{\mathcal{D}}\, \mu, \xi > + d(\cdot),$$

où $d(\cdot)$ est une différentielle totale.

• $\tilde{\mathcal{D}}$ se calcule en utilisant les trois règles:

1. Si A est une matrice d'opérateurs d'ordre 0, alors $\widetilde{A} = A^t$,

2. $\widetilde{\partial_i} = -\partial_i$,

3. $\widetilde{P \circ Q} = \tilde{Q} \circ \tilde{P}$.

• Nous avons la relation:

$$\widetilde{(\tilde{\mathcal{D}})} = \mathcal{D}.$$

E'

• **Exemple** Soit l'opérateur $\mathcal{D} : \xi \to \eta$ défini par:

$$\partial_1 \xi_1 + \partial_2 \xi_2 + x_2 \xi_1 = \eta.$$

Nous avons alors:

$$\begin{aligned}\lambda \left(\partial_1 \xi_1 + \partial_2 \xi_2 + x_2 \xi_1\right) &= \left(-\partial_1 \lambda + x_2 \lambda\right) \xi_1 \\ &\quad + \left(-\partial_2 \lambda\right) \xi_2 + \ldots\end{aligned}$$

L'opérateur $\tilde{\mathcal{D}} : \lambda \to \mu$ est alors défini par:

$$\left\{\begin{array}{l} -\partial_1 \lambda + x_2 \lambda = \mu_1, \\ -\partial_2 \lambda = \mu_2. \end{array}\right.$$

• **La suite duale d'une suite formellement exacte n'est en général pas formellement exacte.**

$$\begin{array}{lcl|lcl} E & \xrightarrow{\mathcal{D}} & F_0 & & \xrightarrow{\mathcal{D}_1} & F_1 \\ & & & & & \\ \xi & \longrightarrow & & \begin{array}{l} \partial_{22} \xi = \eta_1, \\ \partial_{12} \xi = \eta_2, \end{array} & \longrightarrow & \partial_1 \eta_1 - \partial_2 \eta_2 = 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl|lcl} \tilde{E} & \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}} & \tilde{F}_0 & & \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_1} & \tilde{F}_1 \\ & & & & & \\ 0 = \partial_{22} \mu_1 + \partial_{12} \mu_2 & \longleftarrow & & \begin{array}{l} \mu_1 = -\partial_1 \lambda, \\ \mu_2 = \partial_2 \lambda \end{array} & \longleftarrow & \lambda \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl|l} \tilde{E}' & \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}'} & & \\ & & & \\ 0 = \partial_2 \mu_1 + \partial_1 \mu_2 & \longleftarrow & & \begin{array}{l} \mu_1 \\ \mu_2 \end{array} \end{array}$$

$\boxed{\textbf{Tests formels}}$

• **Sans-torsion**

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & & \xrightarrow{\mathcal{D}'} & F' & 5 \\
4 & E_{-1} & \xrightarrow{\mathcal{D}_{-1}} & E & \xrightarrow{\mathcal{D}} & F & 1 \\
3 & \tilde{E}_{-1} & \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_{-1}} & \tilde{E} & \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}} & \tilde{F} & 2
\end{array}
$$

Nous suivons les étapes $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5$

$\Rightarrow$ opérateur $\mathcal{D}'$ conditions de compatibilité de $\mathcal{D}_{-1}$.

- $\star$ $\mathcal{D}' = \mathcal{D} \Leftrightarrow M$ est sans-torsion et $\mathcal{D}_{-1}$ est une **paramétrisation** de $\mathcal{D}$.

- $\star$ $\mathcal{D}' > \mathcal{D} \Rightarrow t(M) = \{$nouvelles équations de $\mathcal{D}'$ modulo $\mathcal{D}\,\xi = 0\}$.

• **Réflexif**

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & \xrightarrow{\mathcal{D}'_{-1}} & & \xrightarrow{\mathcal{D}'} & F' \\
E_{-2} & \xrightarrow{\mathcal{D}_{-2}} & E_{-1} & \xrightarrow{\mathcal{D}_{-1}} & E & \xrightarrow{\mathcal{D}} & F \\
\tilde{E}_{-2} & \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_{-2}} & \tilde{E}_{-1} & \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_{-1}} & \tilde{E} & \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}} & \tilde{F}
\end{array}
$$

- $\star$ $\mathcal{D}' = \mathcal{D}, \quad \mathcal{D}'_{-1} = \mathcal{D}_{-1} \Leftrightarrow M$ réflexif.

• Projectif

i) cas général:

$$
\begin{array}{l}
\dots \longrightarrow E_{-n} \xrightarrow{\mathcal{D}_{-n}} E_{-n+1} \overset{\xrightarrow{\mathcal{D}'_{-n+1}}}{\xrightarrow{\mathcal{D}_{-n+1}}} \dots \overset{\xrightarrow{\mathcal{D}'_{-1}}}{\xrightarrow{\mathcal{D}_{-1}}} E \overset{\xrightarrow{\mathcal{D}'}}{\xrightarrow{\mathcal{D}}} F \\
\dots \longleftarrow \tilde{E}_{-n} \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_{-n}} \tilde{E}_{-n+1} \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_{-n+1}} \dots \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_{-1}} \tilde{E} \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}} \tilde{F}
\end{array}
$$

$\mathcal{D}'_{-i} = \mathcal{D}_{-i}, i = 0, ..., n-1 \Leftrightarrow M$ est projectif.

ii) cas $\mathcal{D}$ surjectif:

$$
\begin{array}{ccccc}
E & \overset{\xleftarrow{\mathcal{P}}}{\xrightarrow{\mathcal{D}}} & F & \longrightarrow & 0 \\
\tilde{E} & \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}} & \tilde{F} & \longleftarrow & 0
\end{array}
$$

M est projectif $\Leftrightarrow \tilde{\mathcal{D}}$ injectif $(\tilde{\mathcal{D}}\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0)$

$$\Leftrightarrow \exists\, \tilde{\mathcal{P}} : \tilde{E} \to \tilde{F},\ \ \tilde{\mathcal{P}} \circ \tilde{\mathcal{D}} = \mathrm{id}_{\tilde{F}}$$
$$\Leftrightarrow \exists\, \mathcal{P} : F \to E,\ \ \mathcal{D} \circ \mathcal{P} = \mathrm{id}_{F}.$$

• Cas $n = 1 \Rightarrow D$ anneau principal

$\Rightarrow M$ est D-module sans-torsion $\Leftrightarrow \tilde{\mathcal{D}}$ injectif.

Equivalence modules/opérateurs

• **Proposition** A toute suite **formellement exacte**

$$0 \longrightarrow \Theta \longrightarrow E \xrightarrow{\mathcal{D}_0} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1 \xrightarrow{\mathcal{D}_2} \ldots \xrightarrow{\mathcal{D}_n} F_n \longrightarrow 0,$$

correspond la suite **exacte** de D-modules

$$0 \longleftarrow M \xleftarrow{\pi} D^m \xleftarrow{.R_0} D^{l_0} \xleftarrow{.R_1} \ldots \xleftarrow{.R_n} D^{l_n} \longleftarrow 0,$$

appelée **résolution libre** de M, où la matrice R_i correspond à l'opérateur $\mathcal{D}_i$.

• A tout opérateur $\mathcal{D}$, nous avions associé un D-module M défini par:

$$M = \text{coker}\,(.R) = D^m / D^l\, R,$$

où R est la matrice correspondant à $\mathcal{D}$.

$$\begin{array}{cccc} D^l & \xrightarrow{.R} & D^m & \longrightarrow \; M \longrightarrow 0 \\ (P_1 \ldots P_l) & \longrightarrow & (P_1 \ldots P_l)\, R, & \end{array}$$

• **Pour étudier les propriétés algébriques** de M, on définit le D-module à gauche N défini par:

$$N = \text{coker}\,(.\tilde{R}) = D^l / D^m \tilde{R},$$

où $\tilde{R}$ est la matrice correspondant à $\tilde{\mathcal{D}}$.

$$\begin{array}{cccc} 0 \longleftarrow N \longleftarrow & D^l & \xleftarrow{.\tilde{R}} & D^m \\ & (P_1, \ldots, P_m)\, \tilde{R} & \longleftarrow & (P_1, \ldots, P_m) \end{array}$$

$\boxed{\textbf{Foncteur extension}}$

• **Définition** Pour toute résolution libre de M

$$\ldots \longrightarrow D^{l_2} \xrightarrow{.R_1} D^{l_1} \xrightarrow{.R} D^{l_0} \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

on considère la suite **tronquée**:

$$\ldots \longrightarrow D^{l_2} \xrightarrow{.R_1} D^{l_1} \xrightarrow{.R} D^{l_0} \longrightarrow 0$$

En dualisant cette suite exacte, nous obtenons la suite **non généralement exacte**:

$$\ldots \longleftarrow D^{l_3} \xleftarrow{.\tilde{R}_2} D^{l_2} \xleftarrow{.\tilde{R}_1} D^{l_1} \xleftarrow{.\tilde{R}} D^{l_0} \longleftarrow 0,$$

où $\tilde{R}_i$ est la matrice associée à $\tilde{\mathcal{D}}_i$.

Nous appelons alors les **défauts d'exactitude**:

$- \operatorname{ext}^0_D(M, D) = \hom_D(M, D) \cong \ker(.\tilde{R}),$

$- \operatorname{ext}^i_D(M, D) \cong \ker(.\tilde{R}_i)/\operatorname{im}(.\tilde{R}_{i-1}),\ i \geq 1.$

• Les $\operatorname{ext}^i_D(M, D)$ **ne dépendent que de** M et **non de la résolution libre** de M.

Résultats d'analyse algébrique

• **Théorème** (Palamodov/Kashiwara) Soient M et N les deux D-modules à gauche définis par:

$$D^l \xrightarrow{.R} D^m \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

$$0 \longleftarrow N \longleftarrow D^l \xleftarrow{.\tilde{R}} D^m$$

Nous avons:

1. M est sans-torsion $\Leftrightarrow \text{ext}^1_D(N, D) = 0$,

2. M est réflexif $\Leftrightarrow \text{ext}^i_D(N, D) = 0,\ i = 1, 2$,

3. M est projectif $\Leftrightarrow \text{ext}^i_D(N, D) = 0, 1 \leq i \leq n$.

• **Théorème** Il existe une suite exacte

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow D^{l-1} \xrightarrow{.R_{-2}} D^{l-2} \xrightarrow{.R_{-3}} \ldots \xrightarrow{.R_{-r}} D^{l-r}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{ext}^i_D(N, D) = 0,\ i = 1, \ldots, r.$$

• **Exemple** Considérons la suite grad, rot, div.

Nous avons la suite formellement exacte

$$0 \longrightarrow \Theta \longrightarrow E \xrightarrow{\text{grad}} F_0 \xrightarrow{\text{rot}} F_1 \xrightarrow{\text{div}} F_2 \longrightarrow 0,$$

où Θ est l'ensemble des fonctions constantes.

Nous avons alors la suite duale (au signe près):

$$0 \longleftarrow \tilde{E} \xleftarrow{\text{div}} \tilde{F}_0 \xleftarrow{\text{rot}} \tilde{F}_1 \xleftarrow{\text{grad}} \tilde{F}_2 \longleftarrow \Theta \longleftarrow 0.$$

• On en déduit donc:

- **div** engendre un $D = \mathbb{R}[d_1, d_2, d_3]$-module **réflexif** mais pas **projectif** car $\Theta \neq 0$,

- **rot** engendre un D-module **sans-torsion** qui n'est **pas réflexif**,

- **grad** engendre un D**-module de torsion**.

• **Exemple** Considérons le système suivant:

$$d_1\, y_1 + d_2\, y_2 + x_2\, y_1 = 0.$$

• Nous avons l'opérateur $\mathcal{D} : \zeta \to \pi$ défini par:

$$\partial_1\, \zeta_1 + \partial_2\, \zeta_2 + x_2\, \zeta_1 = \pi.$$

• L'opérateur adjoint $\tilde{\mathcal{D}} : \lambda \to \mu$ est défini par:

$$\begin{cases} -\partial_1\, \lambda + x_2\, \lambda = \mu_1, \\ -\partial_2\, \lambda = \mu_2. \end{cases}$$

• L'intégrabilité formelle de ce système donne:

$$\lambda = \partial_2\, \mu_1 - \partial_1\, \mu_2 + x_2 \mu_2 = \tilde{\mathcal{P}}\, \mu.$$

$\Rightarrow \tilde{\mathcal{D}}$ est injectif et $\tilde{\mathcal{P}} \circ \tilde{\mathcal{D}} = \mathrm{id}_\lambda \Rightarrow \mathcal{D} \circ \mathcal{P} = \mathrm{id}_\pi$,
où $\mathcal{P} : \pi \to \zeta$ est défini par:

$$\begin{cases} -\partial_2\, \pi = \zeta_1, \\ \partial_1\, \pi + x_2 \pi = \zeta_2. \end{cases}$$

• Si l'on note $R = (d_1 + x_2 \;\; d_2)$, alors:

$M = D^2/D\, R$ est un D-**module projectif**.

Les conditions de compatibilité de $\tilde{\mathcal{D}}$ sont données par l'opérateur $\tilde{\mathcal{D}}_{-1}$: $\mu \to \nu$ défini par:

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_{12}\,\mu_1 - \partial_{11}\,\mu_2 + 2\,x_2\,\partial_1\,\mu_2 - x_2\,\partial_2\,\mu_1 - x_2^2\mu_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \mu_1 = \nu_1, \\ \\ \partial_{22}\,\mu_1 - \partial_{12}\,\mu_2 + x_2\,\partial_2\,\mu_2 + 2\,\mu_2 = \nu_2. \end{array}\right.$$

L'opérateur adjoint $\mathcal{D}_{-1}$: $\eta \to \zeta$, défini par

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_{22}\,\eta_2 + \partial_{12}\,\eta_1 + x_2\,\partial_2\,\eta_1 + 2\,\eta_1 = \zeta_1, \\ \\ -\partial_{12}\,\eta_2 - \partial_{11}\,\eta_1 - 2\,x_2\,\partial_1\,\eta_1 - x_2\,\partial_2\,\eta_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - x_2^2\,\eta_1 + \eta_2 = \zeta_2, \end{array}\right.$$

est alors une **paramétrisation** de $\mathcal{D}$.

Les conditions de compatibilité de $\tilde{\mathcal{D}}_{-1}$ sont définies par l'opérateur $\tilde{\mathcal{D}}_{-2}$: $\mu \to \theta$:

$$\partial_2\nu_1 - \partial_1\nu_2 + x_2\,\nu_2 = \theta.$$

Nous obtenons alors une **paramétrisation injective** $\mathcal{D}_{-2}$: $\xi \to \eta$ de $\mathcal{D}_{-1}$, définie par:

$$\left\{\begin{array}{l} -\partial_2\,\xi = \eta_1, \\ \partial_1\,\xi + x_2\,\xi = \eta_2, \end{array}\right. \quad (\Rightarrow \xi = \partial_1\eta_1 + \partial_2\eta_2 + x_2\eta_1).$$

• **Théorème** Tout opérateur $\mathcal{D} : E \rightarrow F$ parametrisable admet une **paramétrisation minimale**, c-à-d une paramétrisation ayant un **nombre minimal de fonctions arbitraires**.

• L'opérateur $\tilde{\mathcal{D}}_{-1} : \mu \rightarrow \nu$ est défini par:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_{12}\,\mu_1 - \partial_{11}\,\mu_2 + 2\,x_2\partial_1\,\mu_2 - x_2\,\partial_2\,\mu_1 - x_2^2\,\mu_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \mu_1 = \nu_1, \\ \\ \partial_{22}\,\mu_1 - \partial_{12}\,\mu_2 + x_2\,\partial_2\,\mu_2 + 2\,\mu_2 = \nu_2. \end{array} \right.$$

• $\tilde{\mathcal{D}}_{-1}$ a une seule condition de compatibilité:

$$\partial_2\,\nu_1 - \partial_1\,\nu_2 + x_2\,\nu_2 = 0.$$

• En dualisant ν_1 de $\tilde{\mathcal{D}}_{-1}$, nous obtenons une **paramétrisation minimale** de $\mathcal{D}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_{12}\,\eta + x_2\,\partial_2\,\eta + 2\,\eta = \zeta_1, \\ -\partial_{11}\,\eta - 2\,x_2\,\partial_1\,\eta - x_2^2\,\eta = \zeta_2. \end{array} \right.$$

• En dualisant ν_2 de $\tilde{\mathcal{D}}_{-1}$, nous obtenons une **paramétrisation minimale** de $\mathcal{D}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_{22}\,\eta = \zeta_1, \\ -\partial_{12}\,\eta - x_2\,\partial_2\,\eta + \eta = \zeta_2. \end{array} \right.$$

• **Exemple** Considérons le système suivant:

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_2\, y_1 - \partial_1\, y_1 + 2\, y_1 + 2\, y_2 - 2\, \partial_1 y_3 = 0, \\ \partial_2\, y_1 + \partial_2\, y_2 - \partial_1 y_3 = 0. \end{array}\right.$$

• L'opérateur $\mathcal{D} : \eta \to \zeta$ est défini par:

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_2\, \eta_1 - \partial_1\, \eta_1 - 2\, \partial_1\, \eta_3 + 2\, \eta_1 + 2\, \eta_2 = \zeta_1, \\ \partial_2\, \eta_1 + \partial_2\, \eta_2 - \partial_1\, \eta_3 = \zeta_2. \end{array}\right.$$

• L'opérateur $\tilde{\mathcal{D}} : \lambda \to \mu$ est défini par:

$$\left\{\begin{array}{l} -\partial_2\, \lambda_1 + \partial_1\, \lambda_1 - \partial_2\, \lambda_2 + 2\, \lambda_1 = \mu_1, \\ -\partial_2\, \lambda_2 + 2\, \lambda_1 = \mu_2, \\ 2\, \partial_1\, \lambda_1 + \partial_1\, \lambda_2 = \mu_3. \end{array}\right.$$

• L'opérateur $\tilde{\mathcal{D}}_{-1} : \mu \to \nu$ est alors défini par:

$$\begin{array}{r} \partial_{22}\, \mu_3 - \partial_{12}\, \mu_3 - \partial_{12}\, \mu_2 \; + 2\, \partial_{12}\, \mu_1 - \partial_{11}\, \mu_2 \\ + 2\, \partial_1\, \mu_1 - 2\, \partial_1\, \mu_2 = \nu. \end{array}$$

• L'opérateur adjoint $\mathcal{D}_{-1} : \xi \to \eta$ est donné par:

$$\left\{\begin{array}{l} 2\, \partial_{12}\, \xi - 2\, \partial_1\, \xi = \eta_1, \\ -\partial_{12}\, \xi - \partial_{11}\, \xi + 2\, \partial_1\, \xi = \eta_2, \\ \partial_{22}\, \xi - \partial_{12}\, \xi = \eta_3. \end{array}\right.$$

• Toutes les conditions de compatibilités de $\mathcal{D}_{-1}$ sont engendrées par $\mathcal{D} \Rightarrow M = D^3/D^2 R$ est un D-module **sans-torsion** et $\mathcal{D}_{-1}$ est une **paramétrisation** de $\mathcal{D}$.

• **Exemple** Considérons le système suivant:

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_2 y_1 - \partial_1 y_1 + 2\, y_1 + 2\, y_2 - 2\, \partial_1 y_3 = 0, \\ \partial_2 y_1 + \partial_2 y_2 - \partial_{12} y_3 = 0. \end{array}\right.$$

• L'opérateur $\mathcal{D} : \eta \to \zeta$ est défini par:

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_2 \eta_1 - \partial_1 \eta_1 + 2\, \eta_1 + 2\, \eta_2 - 2\, \partial_1 \eta_3 = \zeta_1, \\ \partial_2 \eta_1 + \partial_2 \eta_2 - \partial_{12} \eta_3 = \zeta_2. \end{array}\right.$$

• L'opérateur adjoint $\tilde{\mathcal{D}} : \lambda \to \mu$ est défini par:

$$\left\{\begin{array}{l} -\partial_2 \lambda_1 + \partial_1 \lambda_1 - \partial_2 \lambda_2 + 2\, \lambda_1 = \mu_1, \\ -\partial_2 \lambda_2 + 2\, \lambda_1 = \mu_2, \\ 2\, \partial_1 \lambda_1 - \partial_{12} \lambda_2 = \mu_3. \end{array}\right.$$

• Les conditions de compatibilité de $\tilde{\mathcal{D}}$ sont engendrées par $\tilde{\mathcal{D}}_{-1} : \mu \to \nu = -\partial_1 \mu_2 + \mu_3 = \nu$.

• L'opérateur adjoint $\mathcal{D}_{-1} : \xi \to \eta$ est défini par:

$$\left\{\begin{array}{l} 0 = \eta_1, \\ \partial_1 \xi = \eta_2, \\ \xi = \eta_3. \end{array}\right.$$

• Les conditions de compatibilité de $\mathcal{D}_{-1}$ sont alors données par l'opérateur $\mathcal{D}' : \eta \to \zeta'$:

$$\left\{\begin{array}{l} \eta_1 = \zeta'_1, \\ \partial_1 \eta_3 - \eta_2 = \zeta'_2. \end{array}\right. \Rightarrow M = D^3/D^2\mathcal{D} \text{ a de la torsion.}$$

1. Calcul du premier élément de torsion:

$$\left\{\begin{array}{l} \eta_1 = \zeta_1', \\ \partial_2\,\eta_1 - \partial_1\,\eta_1 - 2\,\partial_1\eta_3 + 2\,\eta_1 + 2\,\eta_2 = 0, \\ \partial_{12}\,\eta_3 - \partial_2\,\eta_1 - \partial_2\,\eta_2 = 0, \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \zeta_1' = \eta_1, \\ \partial_{22}\,\zeta_1' - \partial_{12}\,\zeta_1' = 0. \end{array}\right.$$

Donc, $z_1 = y_1$ satisfait l'équation:

$$\partial_{22}\,z_1 - \partial_{12}\,z_1 = 0.$$

2. Calcul du deuxième élément de torsion:

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_1\,\eta_3 - \eta_2 = \zeta_2', \\ \partial_2\,\eta_1 - \partial_1\,\eta_1 - 2\,\partial_1\,\eta_3 + 2\,\eta_1 + 2\,\eta_2 = 0, \\ \partial_{12}\,\eta_3 - \partial_2\,\eta_1 - \partial_2\,\eta_2 = 0, \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \zeta_2' = \partial_1\,\eta_3 - \eta_2, \\ \partial_{22}\,\zeta_2' - \partial_{12}\,\zeta_2' = 0. \end{array}\right.$$

Donc, $z_2 = \partial_1\,y_3 - y_2$ satisfait l'équation:

$$\partial_{22}\,z_2 - \partial_{12}\,z_2 = 0.$$

Contrôlabilité des systèmes de Kalman

$$\dot{x} = A(t)\, x + B(t)\, u. \qquad (1)$$

• On considère l'opérateur $\mathcal{D}$: $\eta \to \zeta$ défini par:

$$-\dot{\eta}_1 + A(t)\,\eta_1 + B(t)\,\eta_2 = \zeta.$$

Nous avons:

$$\lambda(-\dot{\eta}_1 + A\,\eta_1 + B\,\eta_2) = (\dot{\lambda} + \lambda\, A)\,\eta_1 + (\lambda\, B)\,\eta_2 + \frac{d}{dt}(\cdot).$$

• L'adjoint formel $\tilde{\mathcal{D}}$: $\lambda \to \mu$ de $\mathcal{D}$ est défini par:

$$\begin{cases} \dot{\lambda} + \lambda\, A(t) = \mu_1, \\ \lambda\, B(t) = \mu_2. \end{cases} \qquad (2)$$

• Le système (1) est **contrôlable** ssi $\tilde{\mathcal{D}}$ est **injectif**.

• L'intégrabilité formelle de (2) donne:

$$\dot{\lambda}\, B(t) + \lambda\, \dot{B}(t) = 0 \Rightarrow \lambda\,(A(t)B(t) - \dot{B}(t)) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda\,(A^2 B - \dot{A}B - 2A\dot{B} + \ddot{B}) = 0 \ldots$$

• Le système (1) est **contrôlable** si:

$$\text{rk}\ (B \mid AB - \dot{B} \mid A^2 B + \ldots \mid A^{n-1}B + \ldots \mid \ldots) = n.$$

Généricité de la contrôlabilité

• Considérons le système suivant

$$\ddot{y} + \alpha(t)\,\dot{y} + \dot{\alpha}(t)\,y = \ddot{u} - \beta\,u, \qquad (3)$$

où α et β sont deux **paramètres constants** ou **variables**.

• On cherche les **conditions sur les paramètres** α et β pour que le **système** (3) **soit contrôlable**.

• L'opérateur $\mathcal{D}_1 : \eta \to \zeta$ est défini par:

$$\ddot{\eta}^1 + \alpha(t)\,\dot{\eta}^1 + \dot{\alpha}(t)\,\eta^1 - \ddot{\eta}^2 + \beta\,\eta^2 = \zeta.$$

• L'opérateur adjoint $\tilde{\mathcal{D}}_1 : \lambda \to \mu$ est donné par:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\lambda} - \alpha(t)\,\dot{\lambda} = \mu_1, \\ -\ddot{\lambda} + \beta\,\lambda = \mu_2. \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$ **étude de l'intégratibilité formelle** du système:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\lambda} - \beta\,\lambda = 0, \\ \alpha(t)\dot{\lambda} - \beta\lambda = 0. \end{array} \right.$$

1. Si $\alpha(t) = 0$, nous avons alors:

$$\begin{cases} \ddot{\lambda} - \beta\,\lambda = 0, \\ \beta\,\lambda = 0. \end{cases} \tag{4}$$

   (a) Si $\beta = 0$, alors $(4) \Leftrightarrow \ddot{\lambda} = 0 \Rightarrow \tilde{\mathcal{D}}_1$ non injectif $\Rightarrow$ système non contrôlable.

   (b) Si $\beta \neq 0$, alors $(4) \Leftrightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \tilde{\mathcal{D}}_1$ injectif $\Rightarrow$ système contrôlable.

2. Si $\alpha(t) \neq 0$, nous avons alors:

$$\begin{cases} \ddot{\lambda} - \beta\,\lambda = 0, \\ \alpha(t)\,\dot{\lambda} - \beta\,\lambda = 0, \\ \beta\,(\dot{\alpha}(t) + \alpha(t)^2 - \beta)\,\lambda = 0. \end{cases} \tag{5}$$

   (a) Si $\beta = 0$, alors $(5) \Leftrightarrow \dot{\lambda} = 0 \Rightarrow \tilde{\mathcal{D}}_1$ non injectif $\Rightarrow$ système non contrôlable.

   (b) Si $\beta \neq 0$, alors:

      i. Si $\dot{\alpha}(t) + \alpha(t)^2 - \beta = 0$, alors $(5) \Leftrightarrow \alpha(t)\dot{\lambda} - \beta\lambda = 0 \Rightarrow \tilde{\mathcal{D}}_1$ non injectif $\Rightarrow$ système non contrôlable.

      ii. Si $\dot{\alpha}(t) + \alpha(t)^2 - \beta \neq 0$, alors $(5) \Leftrightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \tilde{\mathcal{D}}_1$ injectif $\Rightarrow$ système contrôlable.

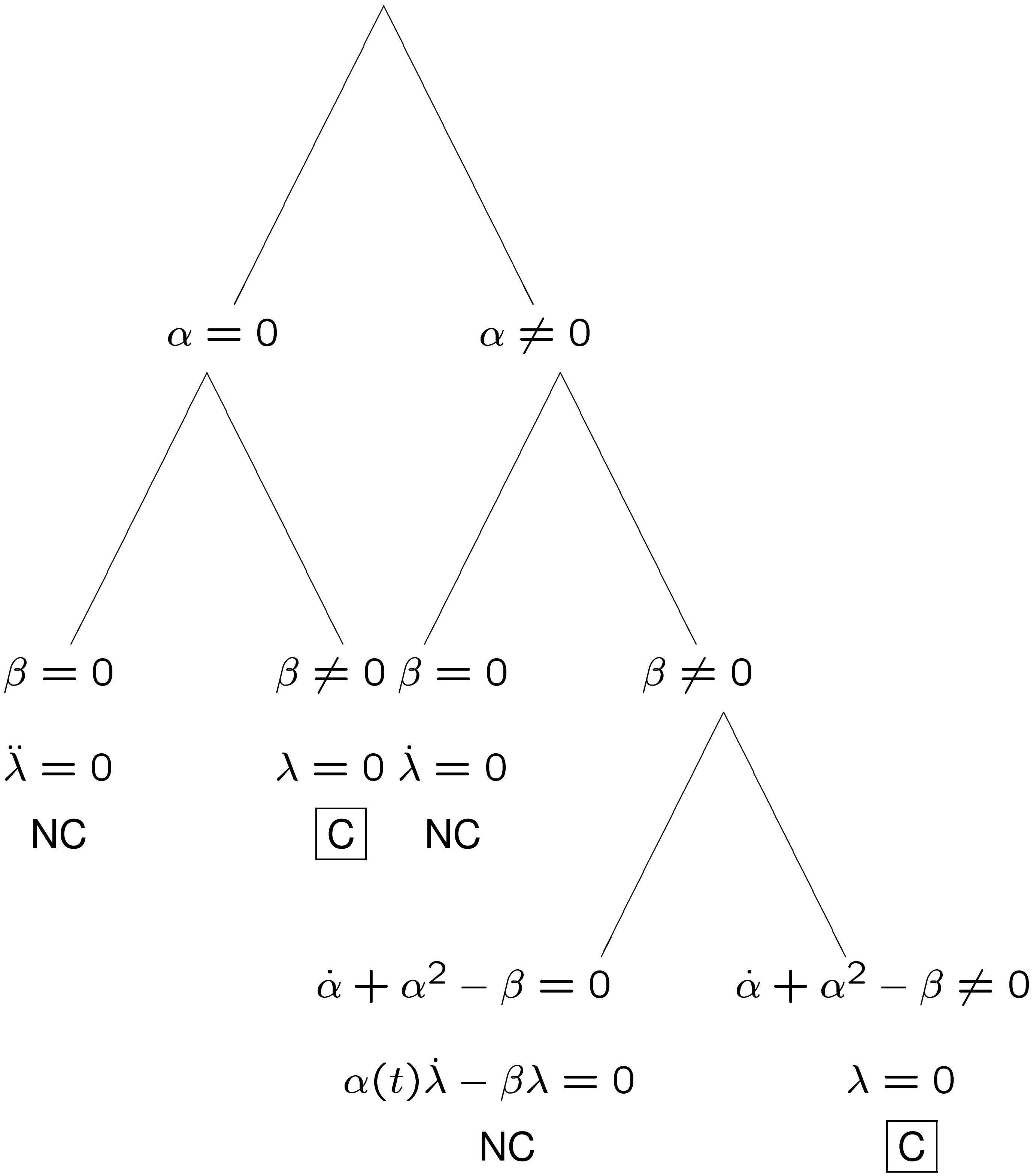

Fig. **Arbre de conditions d'intégrabilités**

C=contrôlable NC=non contrôlable

$\boxed{\textbf{Primalités des systèmes } n-D}$

• **Définitions** Soit R une matrice $l \times m$, de rang générique l, à coefficients dans $D = \mathbb{C}[\chi_1, ..., \chi_n]$.

- R est **première à gauche au sens des mineurs** s'il n'existe pas de facteur commun entre les mineurs de R d'ordre l.

- R est **faiblement première à gauche au sens des zéros** si les mineurs de R d'ordre l s'annulent tous seulement en un nombre fini de points.

- R est **première à gauche au sens des zéros** s'il n'y a aucun zéro commun entre les mineurs de R d'ordre l.

• Primalité au sens des zéros $\Rightarrow$ Primalité faible au sens des zéros $\Rightarrow$ Primalité au sens des mineurs.

• Cette classification a été étudiée par Youla (79), Oberst (90), Rocha-Willems (91), Zerz (95)...

• Wood-Rogers-Owens (98) ont **conjecturé** que ces définitions étaient des **cas particuliers d'une chaine de n définitions successives**.

• Soit $d(N)$ le **plus grand nombre d'arguments** des fonctions arbitraires nécessaires pour déterminer une solution générale de $\tilde{\mathcal{D}}\,\lambda = 0$.

• **Théorème** (Palamodov, Kashiwara 1970).

$$d(N) = n - \min\,\{i \mid \mathrm{ext}^i_D(N, D) \neq 0\}.$$

• Si $\mathcal{D} : E \to F$ un opérateur surjectif, alors:

$$\mathrm{hom}_D(N, D) = \mathrm{ext}^0_D(N, D) = 0 \Rightarrow d(N) \leq n - 1.$$

1. $\dim d(N) = n - 1 \Leftrightarrow \mathrm{ext}^1_D(N, D) \neq 0 \Leftrightarrow t(M) \neq 0$,

2. $\dim d(N) = n - 2 \Leftrightarrow \mathrm{ext}^1_D(N, D) = 0 \Leftrightarrow \exists\ \mathcal{D}_{-1} \Leftrightarrow M$ sans-torsion $\Leftrightarrow$ primalité au sens des mineurs (cas commutatif),

3. $\dim d(N) = n - 3 \Leftrightarrow \mathrm{ext}^1_D(N, D) = 0$, $\mathrm{ext}^2_D(N, D) = 0 \Leftrightarrow \exists\ \mathcal{D}_{-1}, \mathcal{D}_{-2} \Leftrightarrow M$ réflexif...

4. $\dim d(N) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{ext}^i_D(N, D) = 0$, $i = 1 \ldots n - 1 \Leftrightarrow \exists\ \mathcal{D}_{-i},\ i = 1 \ldots n - 1 \Leftrightarrow$ primalité faible au sens des zéros (cas commutatif),

5. $\dim d(N) = -1 \Leftrightarrow \mathrm{ext}^i_D(N, D) = 0$ pour $i = 1 \ldots n \Leftrightarrow M$ projectif $\Leftrightarrow \exists\, \mathcal{D}_{-i},\ i = 1, ..., n$ $\Leftrightarrow$ primalité au sens des mineurs (cas commutatif).

$\boxed{\textbf{Identités de Bézout généralisées}}$

• **Théorème** Soit $\mathcal{D} : E \rightarrow F$ un opérateur **surjectif**. Si $\mathcal{D}$ engendre un D-module $M = D^m/D^l\,R$ **libre**, il existe alors des opérateurs différentiels $\mathcal{D}_{-1}$, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_{-1}$ tels:

$$1. \begin{pmatrix} \mathcal{D} \\ \mathcal{P}_{-1} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \mathcal{P} & \mathcal{D}_{-1} \end{pmatrix} = I.$$

$$2. \begin{pmatrix} \mathcal{P} & \mathcal{D}_{-1} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \mathcal{D} \\ \mathcal{P}_{-1} \end{pmatrix} = I.$$

Ces deux identités sont appelés **identités de Bézout généralisées directes et inverses**.

Applications: placement de pôles, calcul des formes de Brunovsky, réalisation...

• **Exemple** Considérons le système de contrôle:

$$\ddot{y} + \alpha(t)\dot{y} + y - \dot{u} - \alpha(t)u = 0,$$

où $\alpha(t)$ est une fonction dépendant du temps t.

Nous avons les **identités de Bézout généralisées**:

1. $$\begin{pmatrix} \frac{d^2}{dt^2} + \alpha(t)\frac{d}{dt} + 1 & -\frac{d}{dt} - \alpha(t) \\ -\frac{d}{dt} & 1 \end{pmatrix} \circ$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{dt} + \alpha(t) \\ & \\ \frac{d}{dt} & \frac{d^2}{dt^2} + \alpha(t)\frac{d}{dt} + (1 + \dot{\alpha}(t)) \end{pmatrix} = I_2.$$

2. $$\begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{dt} + \alpha(t) \\ & \\ \frac{d}{dt} & \frac{d^2}{dt^2} + \alpha(t)\frac{d}{dt} + (1 + \dot{\alpha}(t)) \end{pmatrix} \circ$$

$$\begin{pmatrix} \frac{d^2}{dt^2} + \alpha(t)\frac{d}{dt} + 1 & -\frac{d}{dt} - \alpha(t) \\ & \\ -\frac{d}{dt} & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Commande optimale

• **Problème** Minimiser la fonction coût

$$\frac{1}{2}\int_0^T (x(t)^2 + u(t)^2)\,dt$$

où $\dot{x}(t) + x(t) - u(t) = 0$, $x(0) = x_0$.

Le système $\dot{x}(t)+x(t)-u(t) = 0$ est paramétrisable:

$$\left\{\begin{array}{l} \xi(t) = x(t) \\ \dot{\xi}(t) + \xi(t) = u(t). \end{array}\right.$$

• En **substituant la paramétrisation** dans le coût, on est ramené à un **problème sans-contrainte**:

minimiser $\frac{1}{2}\int_0^T (\xi(t)^2 + (\dot{\xi}(t)+\xi(t))^2)\,dt$ avec:

$$\left\{\begin{array}{l} \xi(t) = x(t) \\ \dot{\xi}(t) + \xi(t) = u(t) \end{array}\right.$$

Nous obtenons alors le système suivant

$$\left\{\begin{array}{l} \xi(t) = x(t) \\ \dot{\xi}(t) + \xi(t) = u(t) \\ \ddot{\xi}(t) - 2\,\xi(t) = 0 \\ \dot{\xi}(T) + \xi(T) = 0 \\ \xi(0) = x_0 \end{array}\right.$$

qui, par intégrations, nous donne le **contrôleur**:

$$u(t) = \frac{-e^{\sqrt{2}(t-T)} + e^{-\sqrt{2}(t-T)}}{(1-\sqrt{2})\,e^{\sqrt{2}(t-T)} - (1+\sqrt{2})\;e^{-\sqrt{2}(t-T)}}\,x(t).$$

Résumé

Module	**ext**	**Paramétrisation**
avec torsion	$\mathrm{ext}^1_D(N,D) \neq 0$	$\emptyset$
sans-torsion	$\mathrm{ext}^1_D(N,D) = 0$	$\mathcal{D}_{-1}$
réflexif	$\mathrm{ext}^i_D(N,D) = 0, 1 \leq i \leq 2$	$\mathcal{D}_{-i},\ 1 \leq i \leq 2$
	.	.
	.	.
	$\mathrm{ext}^i_D(N,D) = 0,\ 1 \leq i \leq n-1$	$\mathcal{D}_{-i},\ 1 \leq i \leq n-1$
projectif	$\mathrm{ext}^i_D(N,D) = 0,\ 1 \leq i \leq n$	$\mathcal{D}_{-i},\ 1 \leq i \leq n$
libre		$\mathcal{D}_{-1}$ injectif

Module	**Propriétes structurelles**	**Primalité**	**Commande optimale**
avec torsion	élément autonome	$\emptyset$	
sans-torsion	contrôlabilité	au sens des mineurs	problème sans contrainte
réflexif			
	.	.	.
	.	.	.
		faible au sens des zéros	
projectif	identité de Bézout généralisée inverse	au sens des zéros	calcul de λ sans intégrations
libre	identités de Bézout généralisées directes et inverses, platitude		

Boîte à outils pour l'automatique

Développement d'une **boîte à outils pour l'automatique** à l'aide des méthodes effectives de l'analyse algébrique et de l'algèbre différentielle sous Maple.

Théories	**Analyse algébrique**	**Algèbre différentielle**
Systèmes de contrôle	Systèmes multidimensionnels	Systèmes EDO non-linéaires
Équations	EDP linéaires	EDO non-linéaires
Logiciels	KAN Macauley 2 Mgfun	Diffalg

Fonctions/modules holonomes

• **Conception des lois de commande** pour **stabiliser** ou **optimiser les performances** du système:

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t), \\ y(t) = C(t)\,x(t) + D(t)\,u(t). \end{array}\right. \qquad (6)$$

$$(6) \quad + \quad u(t) = K(t)\,x(t)$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dot{x}(t) = (A(t) + B(t)\,K(t))\,x(t), \\ y(t) = (C(t) + D(t)\,K(t))\,x(t). \end{array}\right.$$

• Si $A(t) = A, B(t) = B, C(t) = C$, alors les solutions de $\dot{x}(t) = (A + B\,K)\,x(t)$ sont des **combinaisons d'exponentielles**:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{m} v_i(t)\,e^{\alpha_i\,t}.$$

• Si le système (6) est contrôlable, alors il existe toujours $u(t) = K\,x(t)$ tel que l'on peut choisir librement les α_i.

$\Rightarrow$ **choix du taux de décroissance** du système bouclé quand $t \to +\infty$.

• Si $\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t)$ varie dans le temps, alors les solutions de

$$\dot{x}(t) = (A(t) + B(t)\,K(t))\,x(t)$$

ne se décomposent plus sur la base des $e^{\alpha_i t}$.

$\Rightarrow$ **Idée**: déterminer certaines classes de systèmes telles que $\dot{x}(t) = (A(t) + B(t)\,K(t))\,x(t)$ se décomposent sur une base de certaines fonctions spéciales ($\Rightarrow$ fonctions/modules holonomes).

• **Exemple** de guidage/pilotage:

$$\begin{cases} t\,\ddot{y}(t) + (\gamma - t)\,\dot{y}(t) - \alpha\,y(t) = u(t), \\ u(t) = -k_1\,\dot{y}(t) - k_2\,y(t) \end{cases}$$

$\Rightarrow t\,\ddot{y}(t) + ((\gamma + k_1) - t)\,\dot{y}(t) - (\alpha - k_2)\,y(t) = 0$

$$\begin{array}{l} y(t) = \\ \quad C_1(y_0, \dot{y}_0, \gamma + k_1, \alpha - k2)\,F_1(\gamma + k_1, \alpha - k2, t) \\ +C_2(y_0, \dot{y}_0, \gamma + k_1, \alpha - k2)\;F_2(\gamma + k_1, \alpha - k2, t) \end{array}$$

où F_1 et F_2 sont deux fonctions **hypergéométriques confluentes**.

$\Rightarrow$ choix de k_1 et de k_2 afin que le système en boucle fermé ait un comportement aussi proche que souhaité.

Publications

• J.F. Pommaret & A. Quadrat (2000).
"**Formal elimination theory of multidimensional systems and applications to control theory**", *Mathematics of Control, Signals and Systems*, vol. 13, pp. 193-215.

• J.F. Pommaret & A. Quadrat (1999).
"**Algebraic analysis of linear multidimensional control systems**", *IMA J. Control and Information*, vol. 16, pp. 275-297.

• J.F. Pommaret & A. Quadrat (1999).
"**Localization and parametrization of linear multidimensional control systems**", *Systems and Control Letters*, vol. 37, pp. 247-260.

• J.F. Pommaret & A. Quadrat (1999).
"**A formal approach to optimal control**", soumis à SIAM Journal of Control and Optimization.

• J.F. Pommaret & A. Quadrat (1998).
"**Generalized Bézout identity**", *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, vol. 9, pp. 91-116.